28. Sur la théorie des espaces à hyperconnexion euclidienne, II.*

Par Kentaro YANO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKAYA, M.I.A., March 12, 1945.)

§ 4. Les tenseurs de courbure.

Le tenseur de courbure $R_{\cdot jkh}^i$ de Riemann-Christoffel de V_n est donné par

$$(4.1) \quad R_{\cdot jkh}^i = \{_{jk}^i\}_{\cdot h} - \{_{jh}^i\}_{\cdot k} + \{_{jk}^a\} \{_{ah}^i\} - \{_{jh}^a\} \{_{ak}^i\}.$$

Il apparaît dans la formule de Ricci:

$$(4.2) \quad v_{\cdot k;h}^i - v_{\cdot h;k}^i = v^j R_{\cdot jkh}^i,$$

et satisfait aux relations algébriques :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} R_{\cdot jkh}^i &= -R_{\cdot jhk}^i, & R_{\cdot jkh}^i + R_{\cdot khj}^i + R_{\cdot hjk}^i &= 0, \\ R_{ijkh} &= -R_{jikh}, & R_{ijkh} &= R_{khij}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $R_{ijkh} = g_{ia} R_{\cdot jkh}^a$,

De plus, il satisfait à l'identité bien connue de Bianchi:

$$(4.4) \quad R_{\cdot jkh;l}^i + R_{\cdot jhl;k}^i + R_{\cdot jlk;h}^i = 0,$$

d'où

$$(4.5) \quad \left(R_{\cdot k}^i - \frac{1}{2} R \delta_k^i \right)_{;i} = 0,$$

où nous avons posé $R_{\cdot k}^i = g^{ij} R_{jk}^i$ et $R_{jk} = R_{\cdot jki}^i$, R_{jk} étant le tenseur de Ricci qui est symétrique par rapport aux deux indices inférieurs.

Cela étant, nous allons considérer le tenseur de courbure de E_m . Pour cela, calculons $V_{\cdot k;h}^\lambda - V_{\cdot h;k}^\lambda$, on trouve, par un calcul facile,

$$(4.6) \quad V_{\cdot k;h}^\lambda - V_{\cdot h;k}^\lambda = V^\mu K_{\cdot \mu kh}^\lambda,$$

où

$$(4.7) \quad K_{\cdot \mu kh}^\lambda = \Gamma_{\mu k, h}^\lambda - \Gamma_{\mu h, k}^\lambda + \Gamma_{\mu k}^\alpha \Gamma_{ah}^\lambda - \Gamma_{\mu h}^\alpha \Gamma_{ak}^\lambda.$$

Les composantes du tenseur de courbure ainsi définies satisfont aux relations algébriques

$$(4.8) \quad K_{\cdot \mu kh}^\lambda = -K_{\cdot \mu hk}^\lambda, \quad K_{\lambda \mu kh} = -K_{\mu \lambda kh},$$

la deuxième étant une conséquence de l'identité:

$$0 = G_{\lambda \mu; k; h} - G_{\lambda \mu; h; k} = -G_{\alpha \mu} K_{\cdot \lambda kh}^\alpha - G_{\lambda \alpha} K_{\cdot \mu kh}^\alpha.$$

Calculons cette fois $B_{\cdot j; k; h}^\lambda - B_{\cdot j; h; k}^\lambda$, alors on trouve

$$(4.9) \quad B_{\cdot j; k; h}^\lambda - B_{\cdot j; h; k}^\lambda = B_{\cdot j}^\mu K_{\cdot \mu kh}^\lambda - B_{\cdot j}^\lambda R_{\cdot jkh}^i.$$

* La dépense de cette recherche fut réglée par le frais du Ministère de l'Instruction Publique pour les recherches scientifiques.

La première partie de cette Note fut publiée dans ce Proc., **21** (1945), 156-163.

En substituant (2.8) dans cette équation et en tenant compte de (2.15), on obtient

$$(4.10) \quad (H_{jk}^{\cdot P}{}_{;h} - H_{jh}^{\cdot P}{}_{;k})B_P^{\cdot \lambda} - B_i^{\cdot \lambda}(H_{jk}^{\cdot P}H_{hP}^i - H_{jh}^{\cdot P}H_{kP}^i) \\ = B_j^{\cdot \mu}K_{\mu kh}^{\cdot \lambda} - B_i^{\cdot \lambda}R_{ijkh}^i,$$

d'où on tire

$$(4.11) \quad R_{ijkh}^i = K_{ijkh}^i + H_{jk}^{\cdot P}H_{hP}^i - H_{jh}^{\cdot P}H_{kP}^i,$$

et

$$(4.12) \quad 0 = K_{jkh}^P - H_{jk}^{\cdot P}{}_{;h} + H_{jh}^{\cdot P}{}_{;k},$$

où nous avons posé

$$(4.13) \quad K_{jkh}^i = B_{\cdot \lambda}^i B_j^{\cdot \mu} K_{\mu kh}^{\cdot \lambda} \quad \text{et} \quad K_{jkh}^P = B_{\cdot \lambda}^P B_j^{\cdot \mu} K_{\mu kh}^{\cdot \lambda}.$$

La deuxième identité de (4.3) et l'équation (4.11) nous donnent

$$(4.14) \quad K_{ijkh}^i + K_{ikhj}^i + K_{ijhk}^i + N_{jk}^{\cdot P}H_{hP}^i + N_{kh}^{\cdot P}H_{jP}^i + N_{hj}^{\cdot P}H_{kP}^i = 0,$$

où nous avons posé

$$(4.15) \quad N_{jk}^{\cdot P} = H_{jk}^{\cdot P} - H_{kj}^{\cdot P}.$$

D'autre part, l'équation (4.12) nous donne

$$(4.16) \quad K_{jkh}^P + K_{khj}^P + K_{hjk}^P = N_{jk}^{\cdot P}{}_{;h} + N_{kh}^{\cdot P}{}_{;j} + N_{hj}^{\cdot P}{}_{;k}.$$

De plus, si l'on pose $K_{ijkh} = g_{ia}K_{jkh}^a$, on obtient, de (4.11),

$$(4.17) \quad K_{ijkh} = -K_{jikh}.$$

Cela étant, calculons cette fois $B_Q^{\cdot \lambda}{}_{;k;h} - B_Q^{\cdot \lambda}{}_{;h;k}$, alors on trouve

$$(4.18) \quad B_Q^{\cdot \lambda}{}_{;k;h} - B_Q^{\cdot \lambda}{}_{;h;k} = B_Q^{\cdot \mu}K_{\mu kh}^{\cdot \lambda} - B_P^{\cdot \lambda}R_{PQkh}^P,$$

où nous avons posé

$$(4.19) \quad R_{PQkh}^P = \Gamma_{Qk,h}^P - \Gamma_{Qh,k}^P + \Gamma_{Qk}^R \Gamma_{Rh}^P - \Gamma_{Qh}^R \Gamma_{Rk}^P.$$

Ce tenseur de courbure de E_{m-n} satisfait aux relations algébriques

$$(4.20) \quad R_{PQkh}^P = -R_{PQhk}^P, \quad R_{PQkh} = -R_{QPkh},$$

la deuxième étant une conséquence de

$$0 = g_{PQ;k;h} - g_{PQ;h;k} = -g_{RQ}R_{Pkh}^R - g_{PR}R_{Qkh}^R.$$

Or, en substituant (2.15) dans (4.18), et en tenant compte de (2.8), on trouve

$$(4.21) \quad H_{ik}^{\cdot \lambda}H_{hQ}^i - H_{ih}^{\cdot \lambda}H_{kQ}^i - B_i^{\cdot \lambda}(H_{kQ}^i{}_{;h} - H_{hQ}^i{}_{;k}) \\ = B_Q^{\cdot \mu}K_{\mu kh}^{\cdot \lambda} - B_P^{\cdot \lambda}R_{PQkh}^P,$$

d'où on tire

$$(4.22) \quad H_{kQ}^i{}_{;h} - H_{hQ}^i{}_{;k} = -B_{\cdot \lambda}^i B_Q^{\cdot \mu}K_{\mu kh}^{\cdot \lambda},$$

et

$$(4.23) \quad R_{PQkh}^P + H_{ik}^{\cdot P}H_{hQ}^i - H_{ih}^{\cdot P}H_{kQ}^i = 0.$$

Comme nous avons $-B_{\cdot \lambda}^i B_Q^{\cdot \mu}K_{\mu kh}^{\cdot \lambda} = g_{PQ}g^{ij}K_{jkh}^P$, l'équation (4.22) est équivalente à (4.12).

Or, nous avons déjà démontré la formule de Ricci (4.6).

Appliquons cette formule à un tenseur mixte $V^\lambda_{;k}$. Nous aurons, par un calcul facile,

$$(4.24) \quad V^\lambda_{;k;h;l} - V^\lambda_{;k;l;h} = V^\mu_{;k} K^\lambda_{\mu hl} - V^\lambda_{;i} R^i_{\cdot khl}.$$

D'autre part, en dérivant covariantement la formule (4.6), on a

$$(4.25) \quad V^\lambda_{;k;h;l} - V^\lambda_{;h;k;l} = V^\mu_{;l} K^\lambda_{\mu kh} - V^\mu K^\lambda_{\mu kh;l}.$$

On permute les indices k, h, l cycliquement dans (4.24) et dans (4.25), et on compare les équations obtenues, alors en tenant compte de l'identité (4.3), on trouve

$$V^\mu (K^\lambda_{\mu kh;l} + K^\lambda_{\mu hl;k} + K^\lambda_{\mu lk;h}) = 0,$$

d'où

$$(4.26) \quad K^\lambda_{\mu kh;l} + K^\lambda_{\mu hl;k} + K^\lambda_{\mu lk;h} = 0,$$

V^μ étant tout à fait arbitraire. La formule (4.26) nous donne l'identité de Bianchi pour le tenseur de courbure $K^\lambda_{\mu kh}$.

On peut démontrer, par un procédé analogue, l'identité de Bianchi

$$(4.27) \quad R^P_{\cdot Qkh;l} + R^P_{\cdot Qhl;k} + R^P_{\cdot Qlk;h} = 0,$$

pour le tenseur de courbure $R^P_{\cdot Qkh}$.

§ 5. La détermination du tenseur de courbure $K^\lambda_{\mu kh}$ de E_m .

Nous avons trouvé trois tenseurs de courbure, celui de V_n $R^i_{\cdot jkh}$, celui de E_{m-n} $R^P_{\cdot Qkh}$ et celui de E_m $K^\lambda_{\mu kh}$. Nous allons montrer, dans ce Chapitre, que les composantes $K^\lambda_{\mu kh}$ du tenseur de courbure de E_m peuvent se déterminer en termes de $R^i_{\cdot jkh}$, $R^P_{\cdot Qkh}$ et H^{iP}_{jk} , le tenseur qui relie les connexions de V_n et E_{m-n} à celle de E_m .

Des équations (4.10), on obtient, en contractant $B^j_{\cdot \mu}$,

$$(5.1) \quad B^{\lambda}_{\cdot P} B^j_{\cdot \mu} (H^{iP}_{jk;h} - H^{iP}_{jh;k}) - B^{\lambda}_{\cdot i} B^j_{\cdot \mu} (H^{iP}_{jk} H^i_{\cdot hP} - H^{iP}_{jh} H^i_{\cdot kP}) \\ = B^j_{\cdot \mu} B^i_{\cdot \alpha} K^\lambda_{\alpha kh} - B^{\lambda}_{\cdot i} B^j_{\cdot \mu} R^i_{\cdot jkh}.$$

D'autre part, des équations (4.21), on trouve, en contractant $B^Q_{\cdot \mu}$,

$$(5.2) \quad H^{i\lambda}_{ik} H^i_{\cdot h\mu} - H^{i\lambda}_{ih} H^i_{\cdot k\mu} - B^{\lambda}_{\cdot i} B^Q_{\cdot \mu} (H^i_{\cdot kQ;h} - H^i_{\cdot hQ;k}) \\ = B^Q_{\cdot \mu} B^i_{\cdot \alpha} K^\lambda_{\alpha kh} - B^{\lambda}_{\cdot P} B^Q_{\cdot \mu} R^P_{\cdot Qkh}.$$

En ajoutant (5.1) et (5.2) et remarquant que $B^j_{\cdot \mu} B^i_{\cdot \alpha} + B^Q_{\cdot \mu} B^i_{\cdot \alpha} = \delta^i_{\mu}$, on trouve

$$(5.3) \quad K^\lambda_{\mu kh} = B^{\lambda}_{\cdot i} B^j_{\cdot \mu} R^i_{\cdot jkh} + B^{\lambda}_{\cdot P} B^Q_{\cdot \mu} R^P_{\cdot Qkh} \\ + B^{\lambda}_{\cdot P} B^j_{\cdot \mu} (H^{iP}_{jk;h} - H^{iP}_{jh;k}) - B^{\lambda}_{\cdot i} B^j_{\cdot \mu} (H^{iP}_{jk} H^i_{\cdot hP} - H^{iP}_{jh} H^i_{\cdot kP}) \\ + H^{i\lambda}_{ik} H^i_{\cdot h\mu} - H^{i\lambda}_{ih} H^i_{\cdot k\mu} - B^{\lambda}_{\cdot i} B^Q_{\cdot \mu} (H^i_{\cdot kQ;h} - H^i_{\cdot hQ;k}),$$

ce qui est une généralisation d'une formule donnée par MM. Michal et Botsford.

Le tenseur de courbure $K^\lambda_{\mu kh}$ de E_m étant donné par la formule (5.3), nous posons

$$(5.4) \quad K_{\mu k} = B^{\lambda}_{\cdot \lambda} K^\lambda_{\mu kh},$$

et l'appelons le tenseur d'Einstein-Mayer. De (5.3) on obtient

$$(5.5) \quad K_{\mu k} = B_{\bullet \mu}^j (R_{jk} - H_{jk}^{\bullet \bullet P} H_{\bullet a P}^a + H_{ja}^{\bullet \bullet P} H_{\bullet k P}^a) \\ - B_{\bullet \mu}^Q (H_{\bullet k Q; a}^a - H_{\bullet a Q; k}^a).$$

Cela étant, posons encore

$$(5.6) \quad K = B^{k\mu} K_{\mu k},$$

alors, on aura, de (5.5),

$$(5.7) \quad K = R - H_{\bullet a}^{\bullet \bullet P} H_{\bullet b P}^a + H_{\bullet b}^{\bullet \bullet P} H_{\bullet a P}^a,$$

K étant la courbure scalaire de E_m .

§ 6. Les lignes les plus droites relativement à E_m .

La ligne géodésique de V_n est donnée par

$$(6.1) \quad \frac{\delta^2 x^i}{ds^2} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \{^i_{jk}\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Donc, le vecteur $\frac{dx^i}{ds}$ tangent à la courbe se déplace parallèlement à lui-

même; si l'on déplace, le long de cette courbe, le vecteur $B_i^{\bullet \lambda} \frac{dx^i}{ds}$ de E_m tangent

à la courbe, on trouve

$$(6.2) \quad \frac{\delta}{ds} \left(B_i^{\bullet \lambda} \frac{dx^i}{ds} \right) = H_{jk}^{\bullet \lambda} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds},$$

par conséquent, le vecteur $B_i^{\bullet \lambda} \frac{dx^i}{ds}$ ne se déplace parallèlement que dans le cas

où nous avons $H_{jk}^{\bullet \lambda} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$.

Or, nous allons considérer un vecteur V^λ de E_m qui se déplace toujours parallèlement à lui-même dans la direction déterminée par $v^i = B_{\bullet \lambda}^i V^\lambda$. La direction v^* dans V_n décrit une courbe. C'est la ligne la plus droite relativement à E_m considérée par MM. Einstein et Mayer pour représenter la trajectoire d'une particule dans le champ gravifique et électromagnétique.

Posons

$$\frac{dx^i}{dr} = B_{\bullet \lambda}^i V^\lambda.$$

Alors, on trouve

$$(6.3) \quad V^\lambda = B_i^{\bullet \lambda} \frac{dx^i}{dr} + B_P^{\bullet \lambda} v^P,$$

où v^P est défini par

$$(6.4) \quad v^P = B_{\bullet \lambda}^P V^\lambda.$$

Or, d'après la définition, on a, de (6.3),

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{dr} V^\lambda &= B_i^{\cdot\lambda} \left(\frac{\delta^2 x^i}{dr^2} - H_{\cdot k P}^i v^P \frac{dx^k}{dr} \right) + B_P^{\cdot\lambda} \left(H_{jk}^{\cdot\cdot P} \frac{dx^j}{dr} \frac{dx^k}{dr} + \frac{\delta}{dr} v^P \right) \\ &= \alpha V^\lambda = \alpha \left(B_i^{\cdot\lambda} \frac{dx^i}{dr} + B_P^{\cdot\lambda} v^P \right), \end{aligned}$$

d'où

$$(6.5) \quad \frac{\delta^2 x^i}{dr^2} + H_{\cdot k P}^i v^P \frac{dx^k}{dr} = \alpha \frac{dx^i}{dr}.$$

et

$$(6.6) \quad \frac{\delta}{dr} v^P + H_{jk}^{\cdot\cdot P} \frac{dx^j}{dr} \frac{dx^k}{dr} = \alpha v^P.$$

Si l'on suppose que V^λ soit un vecteur unitaire, on aura $\alpha = 0$.

§ 7. V_n plan ou géodésique relativement à E_m .

Si l'espace vectoriel linéaire E_n se déplace parallèlement à lui-même quand on déplace dans n'importe quelle direction, on dit que V_n est plan relativement à E_m .

Pour cela, on doit avoir

$$B_{\cdot\lambda}^P \delta(B_j^{\cdot\lambda} v^j) = H_{jk}^{\cdot\cdot P} v^j dx^k = 0,$$

pour n'importe quel vecteur v^i et pour n'importe quelle direction dx^i , donc,

$$(7.1) \quad H_{jk}^{\cdot\cdot P} = 0 \quad \text{ou} \quad H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = 0.$$

Dans ce cas, l'espace vectoriel linéaire E_{m-n} se déplace aussi parallèlement à lui-même, comme on peut du reste le vérifier en tenant compte de (2.15).

Si le vecteur $B_i^{\cdot\lambda} \frac{dx^i}{ds}$ de E_m tangent à une géodésique de V_n se déplace

toujours parallèlement à lui-même le long de la géodésique, on dit que V_n est géodésique relativement à E_m .

Pour cela, on doit avoir

$$-\frac{\delta}{ds} \left(B_i^{\cdot\lambda} \frac{dx^i}{ds} \right) = H_{jk}^{\cdot\lambda} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

pour n'importe quelle direction $\frac{dx^j}{ds}$, d'où

$$(7.2) \quad H_{jk}^{\cdot\lambda} + H_{kj}^{\cdot\lambda} = 0 \quad \text{ou} \quad H_{jk}^{\cdot\cdot P} + H_{kj}^{\cdot\cdot P} = 0.$$

§ 8. *La théorie d'Einstein et Mayer et la généralisation par Michal et Botsford.*

Dans leur théorie unitaire des champs, MM. Einstein et Mayer ont considéré un V_n géodésique relativement à E_n . Examinons ce cas, en supposant que V_n soit géodésique relativement à E_m .

Dans ce cas, les équations de la ligne la plus droite relativement à E_m s'écri-

vent

$$(8.1) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \{i_k\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = H^i_{\cdot kP} v^P \frac{dx^k}{ds}, \quad \frac{\delta}{ds} v^P = 0,$$

donc, v^P se déplace parallèlement d'après la connexion de E_{m-n} .

Or, l'équation (5.5) s'écrit dans ce cas

$$(8.2) \quad K_{\mu k} = B^j_{\cdot \mu} (R_{jk} + H^P_{ja} H^a_{\cdot kP}) - B^Q_{\cdot \mu} H^a_{\cdot kQ;a},$$

et l'équation (5.7)

$$(8.3) \quad K = R + H^{\alpha \cdot P}_{\cdot b} H^b_{\cdot aP}.$$

Posons, avec Einstein et Mayer,

$$(8.4) \quad U_{\mu k} = K_{\mu k} - \frac{1}{4} B_{k\mu} (K + R) \\ = B^j_{\cdot \mu} \left(R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk} + H^P_{ja} H^a_{\cdot kP} - \frac{1}{4} H^{\alpha \cdot P}_{\cdot b} H^b_{\cdot aP} g_{jk} \right) \\ - B^Q_{\cdot \mu} H^a_{\cdot kQ;a}.$$

En dérivant (8.4) covariamment, on trouve

$$U_{\mu k;h} = H^j_{\cdot h\mu} \left(R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk} + H^P_{ja} H^a_{\cdot kP} - \frac{1}{4} H^{\alpha \cdot P}_{\cdot b} H^b_{\cdot aP} g_{jk} \right) \\ + B^j_{\cdot \mu} \left[R_{jk;h} - \frac{1}{2} R_{;h} g_{jk} + H^P_{ja} H^a_{\cdot kP;h} + H^P_{ja} H^a_{\cdot kP;h} \right. \\ \left. - \frac{1}{4} H^{\alpha \cdot P}_{\cdot b;h} H^b_{\cdot aP} + H^{\alpha \cdot P}_{\cdot b} H^b_{\cdot aP;h} \right] g_{jk} \\ + B_{i\mu} H^i_{\cdot h} H^a_{\cdot kQ;a} - B^Q_{\cdot \mu} H^a_{\cdot kQ;a;h},$$

d'où

$$(8.5) \quad U_{\mu}{}^i{}_{;i} = \frac{1}{2} B^j_{\cdot \mu} (H^{\cdot P}_{jk;h} + H^{\cdot P}_{kh;j} + H^{\cdot P}_{hj;k}) H^{\cdot kh}_{\cdot P} - B^Q_{\cdot \mu} H^{\cdot ab}_{\cdot Q;a;b},$$

grâce à l'identité (4.5) et $R_{jk} = R_{kj}$.

D'autre part, on a

$$H^{\cdot ab}_{\cdot Q;k;h} - H^{\cdot ab}_{\cdot Q;h;k} = H^{\cdot cb}_{\cdot Q} R^a_{\cdot ckh} + H^{\cdot ac}_{\cdot Q} R^b_{\cdot ckh} - H^{\cdot ab}_{\cdot P} R^P_{\cdot Qkh},$$

d'où, en posant $a = k$, $b = h$,

$$(8.6) \quad 2H^{\cdot ab}_{\cdot Q;a;b} = -H^{\cdot ab}_{\cdot P} R^P_{\cdot Qab}.$$

En substituant (8.6) dans (8.5), on obtient finalement

$$(8.7) \quad U_{\mu}{}^i{}_{;i} = \frac{1}{2} [B^j_{\cdot \mu} (H^{\cdot P}_{jk;h} + H^{\cdot P}_{kh;j} + H^{\cdot P}_{hj;k}) H^{\cdot kh}_{\cdot P} + B^Q_{\cdot \mu} H^{\cdot ab}_{\cdot P} R^P_{\cdot Qab}]$$

Examinons le cas où $n = m - 1$. Dans ce cas, en posant

$$B^{\cdot \lambda}_{\cdot n} = B^{\lambda}, \quad H^{\cdot n}_{\cdot jk} = H_{jk}, \quad \text{etc.,}$$

nous avons, de (8.4),

$$U_{\mu k} = B^j_{\cdot \mu} \left[\left(R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk} \right) + \left(H_{ja} H^a_{\cdot k} - \frac{1}{4} H^a_{\cdot b} H^b_{\cdot a} g_{jk} \right) \right] - B_{\mu} H^a_{\cdot k;a},$$

et de (8.7)

$$(8.8) \quad U_{\mu; i}^{\cdot i} = -\frac{1}{2} B_{\cdot \mu}^j (H_{jk; h} + H_{kh; j} + H_{hj; k}) H^{kh},$$

parce que $R_{\cdot qkh}^p = 0$.

Ceux qui correspondent aux équations des champs d'Einstein et Mayer sont

$$U_{\mu k} = 0 \quad \text{et} \quad H_{jk; h} + H_{kh; j} + H_{hj; k} = 0,$$

d'où on a

$$(8.9) \quad \left(R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk} \right) + \left(H_{j\alpha}^{\cdot \alpha} H_{\cdot k}^{\cdot \alpha} - \frac{1}{4} H_{\cdot b}^{\cdot \alpha} H_{\cdot a}^{\cdot \alpha} g_{jk} \right) = 0,$$

et

$$(8.10) \quad H_{\cdot k; \alpha}^{\cdot \alpha} = 0,$$

H_{jk} étant de la forme

$$(8.11) \quad H_{jk} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^j},$$

où φ_j est un vecteur covariant qui correspond au potentiel électromagnétique.