241. Quelques exemples des ζ -fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre. II

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1970)

Ce petit mémoire est la suite de mon article précédent [4]. Premièrement, dans le paragraphe 1 de [4], le Théorème 1 et la preuve du Théorème 2 contenaient des fautes (le Théorème 2 lui-même a été sauvé). Je vais les corriger dans le paragraphe 4. Et le paragraphe 5 est consacré à citer un autre exemple simple des ζ -fonctions d'Epstein.

§ 4. Je vais reproduire tous les contenus du § 1 dans [4]. Soient n un entier ≥ 2 et Ω la boule unitaire de $\mathbf{R}^n$:

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; |x| \equiv \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} < 1 \right\}. \quad (1)$$

Traitions, dans Ω , un opérateur différentiel L elliptique dégénéré au bord

$$Lu(x) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (1 - |x|^2) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right\} + (n-1)u(x). \quad (2)$$

L est auto-adjoint positif dans $L^2(\Omega)$ du domaine $\mathcal{D}[L] = \{u(x) \in H^1(\Omega); (1 - |x|^2)u(x) \in H^2(\Omega)\}$. Son spectre se consiste des valeurs propres positives $\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^\infty$ dont chacune $\lambda_{k,l}$ est de multiplicité $\mu(k) < \infty$, où

$$\lambda_{k,l} = (2l+2)(2l+2k+n-1), \text{ pour } k, l = 0, 1, 2, \dots; \quad (3)$$

$$\begin{cases} \mu(0) = 1 \text{ et } \mu(k) = 2 \text{ pour } k \geq 1, \text{ si } n = 2; \\ \mu(k) = (2k+n-2) \frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!} \text{ pour } k \geq 0, \text{ si } n \geq 3. \end{cases} \quad (4)$$

Proposition 1. (α) $\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^\infty$ est la totalité des valeurs propres de L dont chacune $\lambda_{k,l}$ est de multiplicité $\mu(k) < \infty$;

(β) Pour (k, l) fixe, une base des fonctions propres correspondante à $\lambda_{k,l}$ est formée par les $\mu(k)$ fonctions (normalisées) suivantes

$$u_{k,l,\alpha}(x) = \sqrt{4l+2k+n} P_l^{(0,k+\nu)}(2|x|^2-1) H_{k,\alpha}(x), \quad (5)$$

pour $k, l = 0, 1, 2, \dots; 1 \leq \alpha \leq \mu(k)$,

où $\{H_{k,\alpha}(x)\}_{\alpha=1}^{\mu(k)}$ est une base des polynômes harmoniques homogènes d'ordre k , les $P_l^{(a,b)}(t)$ sont les polynômes de Jacobi (voir p. 168 du Vol. 2 de [2]), et dernièrement $\nu = (n-2)/2$.

Soit maintenant $T > 0$ très grand et désignons par $N(T)$ la somme des $\mu(k)$ pour lesquelles $\lambda_{k,l} \leq T$. Alors, Théorème 1 dans [4] se corrige comme suit:

Theoreme 1. Lorsque T tend vers l'infini, $N(T)$ se comporte asymptotiquement comme suit:

$$N(T) \sim \frac{T}{4} \log T, \quad \text{si } n=2; \quad (6)$$

$$N(T) \sim \frac{2^{3-2n} \zeta(n-1; 1/2)}{(n-1)!} T^{n-1}, \quad \text{si } n \geq 3. \quad (7)$$

Démonstration de (6). Soit $T > 0$ suffisamment grand et notons par $\nu(l, T)$, pour l fixe, le nombre des k pour lesquels $\lambda_{k,l} \leq T$. Alors, en posant $T_1 = (\sqrt{T} - 1)/2$, nous avons

$$\begin{cases} \nu(l, T) = \left[\frac{T}{2(2l+1)} - l + \frac{1}{2} \right], & \text{si } 0 \leq l \leq [T_1], \\ \text{et } \nu(l, T) = 0 & \text{si } l > [T_1], \end{cases} \quad (8)$$

où $[T_1]$ est la partie entière de T_1 , et nous avons naturellement

$$N(T) = \nu(0, T) + 2 \sum_{l=1}^{[T_1]} \nu(l, T). \quad (9)$$

Estimons la différence $N(T) - \nu(0, T)$:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{T_1} \left(\frac{T}{2(2t+1)} - t - \frac{1}{2} \right) dt &< N(T) - \nu(0, T) \\ &\leq 2 \int_0^{T_1} \left(\frac{T}{2(2t+1)} - t + \frac{1}{2} \right) dt + \frac{T+1}{2}. \end{aligned}$$

Le calcul de ces intégrales est facile et nous obtenons finalement (6), car $\nu(0, T) \sim T/2$. C.Q.F.D.

Démonstration de (7). Nous pourrions vérifier (7) par le même principe que celui du cas $n=2$ ci-dessus, mais il sera intéressant d'introduire la ζ -fonction d'Epstein pour L

$$\zeta_L(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mu(k) \lambda_{k,l}^{-s}, \quad (10)$$

et de déduire (7) par la recherche des singularités de $\zeta_L(s)$ dans le s -plan complexe. Remarquons que la série de (10) est absolument convergente si $\text{Re. } s > n-1$ grâce au résultat de Baouendi-Goulaouic (voir le Théorème 4 de [1]). Nous allons maintenant extraire toutes les singularités possibles de $\zeta_L(s)$ et démontrer qu'elle est une fonction méromorphe dans le s -plan tout entier. Pour l'effectuer, nous avons besoin d'un lemme:

Lemme. Soient $x > 0$, $y > 0$ et posons, pour $\text{Re. } \beta > 1$ et $\text{Re. } (\alpha + \beta) > 2$,

$$\begin{cases} F(\alpha, \beta; x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} (l+x)^{-\alpha} \sum_{p=l}^{\infty} (p+y)^{-\beta}, \text{ et } \\ f(\alpha, \beta; x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} (l+x)^{-\alpha} \int_l^{\infty} (v+y)^{-\beta} dv. \end{cases} \quad (11)$$

Lorsqu'on fixe $x > 0$ et $y > 0$,

(i) la fonction $(\beta-1)f(\alpha, \beta; x, y)/\Gamma(\alpha+\beta-2)$ se prolonge comme une fonction entière de (α, β) ; et,

(ii) la fonction $F(\alpha, \beta; x, y)/\{\Gamma(\beta-1)\Gamma(\alpha+\beta-2)\}$ le fait également.

Preuve. F et f satisfont à l'équation fonctionnelle

$$\frac{\partial}{\partial y} u(\alpha, \beta; x, y) = -\beta u(\alpha, \beta+1; x, y), \quad (12)$$

et, lorsque $y=x>0$, nous voyons que

$$f(\alpha, \beta; x, y) = \frac{1}{\beta-1} \zeta(\alpha+\beta-1; x), \quad (13)$$

où $\zeta(z; a) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+a)^{-z}$ ($\text{Re. } z > 1$ et $a > 0$) est la ζ -fonction de Riemann.

D'où l'on a le développement, pour chaque k : entier ≥ 1 ,

$$f(\alpha, \beta; x, y) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\beta+j-1)}{\Gamma(\beta)j!} (x-y)^j \zeta(\alpha+\beta+j-1; x) - \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)(k-1)!} \int_x^y (u-y)^{k-1} f(\alpha, \beta+k; x, u) du. \quad (14)$$

Dans le membre à droite de (14), le dernier terme est holomorphe dans $\text{Re. } \beta > 1-k$ et $\text{Re. } (\alpha+\beta) > 2-k$. Nous avons donc extrait, comme la première somme à droite de (14), toutes les singularités de f situées dans $\text{Re. } \beta > 1-k$ et $\text{Re. } (\alpha+\beta) > 2-k$, et nous connaissons que la fonction $\zeta(z; a) - 1/(z-1)$ est une fonction entière de z , d'où l'énoncé (i) du lemme.

Passons ensuite à la recherche de F : Nous voyons d'abord que

$$f(\alpha, \beta; x, y) = \int_0^1 F(\alpha, \beta; x, y+u) du. \quad (15)$$

Posons $G(\alpha, \beta; x, y) = F(\alpha, \beta; x, y) - f(\alpha, \beta; x, y)$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta; x, y) &= \beta \int_0^1 F(\alpha, \beta+1; x, y+1-u) u du \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\Gamma(\beta+j)}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\alpha, \beta+j; x, y \\ &\quad + j - u_1 - \dots - u_j) u_1 \dots u_j du_1 \dots du_j \\ &\quad + \frac{\Gamma(\beta+K)}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \dots \int_0^1 G(\alpha, \beta+k; x, y \\ &\quad + k - u_1 - \dots - u_k) u_1 \dots u_k du_1 \dots du_k, \\ &\text{quel que soit } k: \text{ entier } \geq 1. \end{aligned} \quad (16)$$

La première égalité de (16) nous montre que $G(\alpha, \beta; x, y)$ est holomorphe dans $\text{Re. } \beta > 0$ et $\text{Re. } (\alpha+\beta) > 1$. Et la deuxième égalité extrait, comme la première somme à droite, toutes les singularités situées dans $\text{Re. } \beta > -k$ et $\text{Re. } (\alpha+\beta) > 1-k$. Nous avons enfin l'énoncé (ii) grâce à (i). C.Q.F.D.

Corollaire. Les fonctions

$$f(\alpha, \beta; x, y) - \frac{\zeta(\alpha+\beta-1; x)}{\beta-1} \quad \text{et} \quad F(\alpha, \beta; x, y) - \frac{\zeta(\alpha+\beta-1; x)}{\beta-1}$$

sont holomorphes dans $\text{Re. } \beta > 0$ et $\text{Re. } (\alpha+\beta) > 1$.

Nous revenons à la fonction $\zeta_L(s)$. Exprimons-la à l'aide des $F(\alpha, \beta; x, y)$:

$$\zeta_L(s) = 2^{1-2s} F\left(s, s; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 2^{-2s} \zeta\left(2s; \frac{1}{2}\right), \text{ si } n=2; \quad (17)$$

$$2^{2s} \zeta_L(s) = \frac{2}{(n-2)!} \sum_{p=0}^{n-2} (-1)^p \binom{n-2}{p} F\left(s-p, s+p+2-n; \frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \\ + \sum_{q+r \leq n-2} C_{q,r} F\left(s-q, s-r; \frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right), \text{ si } n \geq 3, \quad (18)$$

où les $C_{q,r}$ sont des constantes numériques indépendantes de s . Nous pouvons en déduire le résultat suivant:

Theoreme 2. Si $n \geq 2$, $\zeta_L(s)/\{\Gamma(s-n+1)\Gamma(2s-n)\}$ se prolonge comme une fonction entière de s ;

(ii) Si $n=2$, $4(s-1)\zeta_L(s) - (s-1)^{-1}$ est holomorphe dans $\text{Re. } s > \frac{1}{2}$;

(iii) Si $n \geq 3$,

$$\zeta_L(s) - \frac{2^{3-2n}}{(s-n+1)(n-2)!} \zeta\left(n-1; \frac{1}{2}\right)$$

est holomorphe dans $\text{Re. } s > n - \frac{3}{2}$.

Fin de la démonstration de (7). On n'a qu'à appliquer le théorème tauberien d'Ikêhara à $\zeta_L(s)$ dont la singularité la plus à droite $s=n-1$ est pôle simple, et le résidu à ce point est connu par le (iii) du Théorème 2. C.Q.F.D.

§ 5. Dans ce paragraphe, je vais citer un autre exemple de ζ -fonction d'Epstein pour un opérateur elliptique.

Soit M une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $(n-1)$ dont le point générique est noté par ξ . Posons

$$\mathcal{L}\phi(\xi) = \mathcal{L}\left(\xi; \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\phi(\xi) = \phi(\xi) - \Delta_M \phi(\xi), \quad (19)$$

où Δ_M est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M . Alors, $\mathcal{L}$ est auto-adjoint $\geq I$ sur $L^2(M)$ par rapport à l'élément volumique $d\xi$ sur M , le domaine de $\mathcal{L}$ est $H^2(M)$. Soit $\{\mu_j\}_{j=1}$ la suite des valeurs propres de $\mathcal{L}$ numérotées suivant l'ordre de croissance: $1 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ (on répète chaque μ_j autant de fois que sa multiplicité). Désignons par $\{w_j(\xi)\}_{j=1}^\infty$ le système orthonormal complet formé par les fonctions propres $w_j(\xi)$ correspondantes à μ_j . Considérons la variété $\mathcal{M} = M \times \mathbf{R}_+ = M \times \{t; 0 < t < \infty\}$ et traitons sur $\mathcal{M}$ un opérateur différentiel

$$Lu(\xi, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(t \frac{\partial u}{\partial t}\right) + t \mathcal{L}\left(\xi; \frac{\partial}{\partial \xi}\right)u(\xi, t). \quad (20)$$

Alors L est elliptique du second ordre qui est dégénéré sur le bord $\partial \mathcal{M} = M \times \{t=0\}$. Il est de plus auto-adjoint $\geq I$ sur $L^2(\mathcal{M})$ du domaine $\mathcal{D}[L] = \{u(\xi, t) \in H^1(\mathcal{M}); tu(\xi, t) \in H^2(\mathcal{M})\}$. Son spectre se consiste des valeurs propres $\{\lambda_{l,j}\}_{l,j=1}^\infty$ dont chacune est de multiplicité 1, où

$$\lambda_{l,j} = (2l-1)\sqrt{\mu_j}, \text{ pour } l, j = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Pour chaque (l, j) , la fonction propre (normalisée) correspondant à $\lambda_{l,j}$ est

$$u_{l,j}(\xi, t) = (4\mu_j)^{1/4} w_j(\xi) \exp(-\sqrt{\mu_j} t) L_{l-1}(2\sqrt{\mu_j} t), \quad (22)$$

où les $L_p(z) = \frac{1}{p!} e^z \left(\frac{d}{dz} \right)^p (e^{-z} z^p)$ sont les polynômes de Laguerre.

Cela posé, la ζ -fonction d'Epstein par rapport à L se définit par

$$\zeta_L(s) = \sum_{l,j=1}^{\infty} \lambda_{l,j}^{-s}, \text{ pour } \operatorname{Re} s > n-1. \quad (23)$$

Nous pouvons la comparer avec la ζ -fonction d'Epstein par rapport à $\mathcal{L}$ sur M :

$$\zeta_M(s) = \sum_{l,j=1}^{\infty} \mu_j^{-s}, \text{ pour } \operatorname{Re} s > \frac{n-1}{2}. \quad (24)$$

Nous obtenons une équation fonctionnelle entre elles

$$\zeta_L(s) = 2^{-s} \zeta \left(s; \frac{1}{2} \right) \zeta_M \left(\frac{s}{2} \right), \text{ pour } \operatorname{Re} s > n-1. \quad (25)$$

Il est connu (voir [3]) que le produit $\Gamma \left(s - \frac{n-1}{2} \right) \zeta_M(s)$ se prolonge comme une fonction entière de s . Par conséquent, le produit $(s-1) \cdot \Gamma \left(\frac{s-n+1}{2} \right) \zeta_L(s)$ le fait également.

Références

- [1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic: Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. *Archive for Rat. Mech. Anal.*, **34**, 361-379 (1969).
- [2] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, et F. G. Tricomi: *Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill.
- [3] S. Minakshisundaram et A. Pleijel: Eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian Manifolds. *Canadian J. Math.*, 242-256 (1949).
- [4] N. Shimakura: Quelques exemples des ζ -fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre. *Proc. Japan Acad.*, **45**(10), 866-871 (1969).