フォトクロミック染料による気泡後部定在渦の可視化*

Visualization of a Standing Eddy at the Rear of the Bubble by Using Photochromic Dye

城 田 農**
SHIROTA Minori

小 野 友 輝***
ONO Tomoki

杉 原 慶 治***
SUGIHARA Keiji

真 田 俊 之**
SANADA Toshiyuki

渡 部 正 夫**
WATANABE Masao

Abstract The structure of the flow around a rising bubble in silicone oil is experimentally studied by flow visualization using photochromic dye. The first experimental support for the existence of the standing eddy at the rear of the bubble, as predicted by a previous study by Ryskin and Leal [J. Fluid Mech. 148, 19-35 (1984)], was obtained in the case of high bubble aspect ratio χ . The drag coefficient of small bubble rising in this solution was compared with theoretical one derived by Mei [Phys. Fluids, 6, 418-420(1994)], and it is found that the bubble rising in this solution behaves as the “clean bubble”. It is also shown that both the degree of the fore-aft asymmetry of the bubble shape and the size of standing eddy increases as the discrepancy in both rising velocity and drag coefficient between experimental results and Moore’s theory [J. Fluid Mech. 23, 749-766 (1965)] increases.

Keywords: Bubble, Standing eddy, Flow visualization, Bubble shape fore-aft asymmetry, Drag

1. 緒 言

気泡周囲の高 Re 数流れを解析するために、Levich[1]はポテンシャル流れ中での球形気泡まわりの粘性散逸を計算し、抗力係数を求めた。Moore は Levich の解析を拡張し気泡形状が球形の場合[2]と進行方向に扁平に変形している前後対称の楕円体の場合[3]について、気泡表面での境界層及び後流を考慮した解析を行い、 Re 数についてより高次の効果を考慮に入れた気泡の抗力係数の定式化を行った。

Ryskin ら[4]は、 We 数の関数として抗力係数と気泡形状とを数値的に解析し、高 Re 数の場合には低 We 数においても、気泡前後の対称性は破綻し、得られる抗力係数は Moore[3]の抗力係数とは異なることを示した。Ryskin らは気泡後部の定在

渦の存在がこの差異の一因となっていることを示した。Duineveld[5]は超純水を用いた実験を行い、気泡前後の非対称性が現れる Re 数領域で上昇速度とアスペクト比 χ が Moore 解とは異なり、上昇速度が Moore 解を上回る実験結果を示した。

Dandy ら[6]、Blanco ら[7]は形状固定軸対称楕円体周囲の流れについて、clean bubble（表面でのせん断応力がゼロ）の条件下で、気泡後部に定在渦が存在する流れの数値解析を行った。Blanco ら[7]は気泡後部定在渦の存在臨界曲線を χ と Re との関数で与え、Moore 解の適用限界 Re 数に及ぼす χ の影響について考察した。Dandy ら[6]は、表面せん断応力がゼロではない固体球周囲流れにおける固体球後部に存在する定在渦の可視化実験結果[8]と比較し、中間 Re 数では気泡後部定

* 2006.11.15 受付

** 九州大学大学院工学研究院 〒819-0395 福岡市西区元岡 744

TEL: (092)802-3104 FAX: (092)802-0001 E-mail: shirota@mech.kyushu-u.ac.jp

*** 九州大学大学院工学府

在渦構造と固体球後部定在渦構造とは定性的に相同であることを示した。しかしながら、**clean bubble** 周囲流れ場における気泡後部定在渦を実験的に可視化した研究は存在しない。また、気泡後部定在渦が存在するのは比較的高 Re 数領域であり、数値的にも解析は困難であるために、未知な点が多い。

そこで本研究では、**clean bubble** 条件が比較的容易に実現されるシリコンオイルを液体として用い、フォトクロミック染料を用いて気泡後部定在渦の可視化を行う。気泡の挙動および気泡後部定在渦を高速度ビデオカメラを用いて観察し、気泡形状と気泡後部定在渦の相互作用および抗力係数に及ぼす影響について考察する。

2. 実験

2.1 フォトクロミック染料

フォトクロミック染料は、1967 年に Popovich ら[9]により流れの可視化に利用された。Koso ら[10]は、静止液体中の気泡上昇による乱流混合の計測にフォトクロミック染料を用いて、乱流拡散係数を定量的に評価した。本研究では、フォトクロミック染料を用いた可視化が、特定領域だけを染色でき、液体の性質を乱さず、**clean bubble** 条件を維持できることに着目して、気泡後部定在渦の可視化を行った。なおフォトクロミック染料はシリコンオイルには直接溶解しないため、無極性の有機溶媒であるトルエンに溶かした後に、シリコンオイルと混合した。

2.2 実験装置および方法

実験は、アクリル製の容器内に気泡発生用のノズルを設置し、静止液体中に窒素気泡を発生させることで行った。Fig.1 に実験装置全体の概略図を示す。テストセクションは上下 2 段構造を有する。上部断面が $100\text{mm} \times 100\text{mm}$ で高さ 150mm 、下部断面が $20\text{mm} \times 100\text{mm}$ で高さ 100mm である。

液体には前節で述べた、シリコンオイルにフォトクロミック染料を 25ppm の濃度で溶かしたものをを用いた。気泡発生には気体圧力変動を利用した気泡発生制御装置[11]を用いた。

紫外シート光照射装置（Moritex、MUV-250U-L）により、高さ約 10mm 、幅約 50mm の紫外シート光を発生させ、液体を着色した。着色領域は光強度に依存するが、壁面から 20mm 程度までと限られているために、テストセクション

Fig. 1 Experimental setup.

下部の厚さを上部より薄く 20mm とし、さらに Fig.1 に示すように左右より紫外シート光を照射することにより、液体中の着色強度分布の一樣化を図った。

気泡挙動および着色された液体挙動の撮影は、バックライトを用いて高速度ビデオカメラ（VISION RESEARCH、Phantom V4.2）で行った。撮影条件は、フレームレート 4000fps 、露光時間 $240\mu\text{s}$ 、空間解像度 $512 \times 256 \text{ pixels}$ である。また、気泡形状を詳細に計測するため、スチルデジタルカメラ（株）ニコン、D200: 空間解像度 $2592 \times 3872 \text{ pixels}$ ）を用いた。

2.3 画像解析

得られた画像に画像処理を施し、気泡径、気泡重心位置を算出した。まず撮影画像から背景画像を取り除き、次に得られた画像を二値化した。二値化しきい値は、判別分析法[12]を用いて自動的に決定した。その後気泡中心部のスポットを除去し、面積中心を求めることにより気泡重心位置を算出した。さらに、スチルカメラより得られた画像より気泡形状の定量化を行った。気泡形状を軸対称であると仮定し、ルジャンドル関数 P_n を用いた直交関数展開により、気泡の輪郭を式(1)で表した。

Fig. 2 Typical example of image processing.

Table 1 Properties of liquids

case	σ (mN/m)	ρ (kg/m ³)	ν (mm ³ /s)	Mo
A	20.1	924	4.47	3.8E-07
B	17.8	866	2.1	2.2E-08

$$r(\theta) = \sum_{n=0}^8 A_n P_n[\cos(\theta + \alpha)] \quad (1)$$

ここで、 α は気泡対称軸の鉛直軸からの傾きである。直交関数展開には 8 次までのルジャンドル関数を用いた。なお、 A_0 は気泡平均半径、 A_2 は気泡扁平度、 A_3 は気泡の前後非対称性を記述する展開係数である。

また、気泡周囲に形成される流れ場を解析するために、得られた画像には画像処理による補正を行った。Fig.2 に取得画像と画像処理後の画像の一例を示す。画像処理には MATLAB (Image Processing Toolbox、Curve Fitting Toolbox) を用いた。

2.4 実験条件

実験は等価気泡半径 r が 0.5～1.2 mm の範囲で行った。まず、本実験で用いた液体は混合物であるため物性値の測定を行った。今回の実験で使った液体の物性値および対応するモルトン数 Mo ($=g\nu^4\rho^3/\sigma^3$) を Table 1 に示す。上昇気泡周囲流れ場を観察する際にはより高いコントラストが得られたため溶液 A を用いた。なお、着色特性等の実験条件の検討の際には動粘度が水の動粘度に近い値を有する溶液 B を用いた。溶液 A と溶液 B の物性値には動粘度以外は顕著な違いは見られない。

フォトクロミック染料の着色反応は可逆反応

Fig. 3 Time variation of intensity of colored layer.

Fig. 4 Maximum intensity of colored layer against UV irradiation time.

であるため、流れの可視化を行う場合には染料の退色は避けられない問題である[10]。そこで、着色持続時間について検討した。Fig.3 に紫外シート光を照射する前後の、フォトクロミック染料の輝度値の時間変化を示す。ここで、輝度値として着色領域中心部 10×10pixels における空間平均値をとった。使用したフォトクロミック染料の濃度は 25ppm、50ppm、100ppm の 3 種類である。Fig.3 の縦軸は、輝度値 255 を黒に、0 を白に対応させた場合の、各濃度における最も着色した時刻の輝度値に対する比を表している。この場合の紫外シート光照射時間は、2sec である。本実験では後流を可視化するために、紫外線照射終了直後に気泡を発生させた。使用する気泡は、その上昇速度が 200mm/s 程度であり、撮影画像領域約 25mm を 0.1sec 程度で通過する。そのため、いずれの染料濃度であっても、本実験中におけるフォトクロミック染料輝度値の時間変化は無視できると考えた。

次に、紫外シート光照射時間と染料着色強度との関係を調査した。紫外シート光照射時間を 0.5sec、1.0sec、1.5sec、2.0sec、2.5sec、3.0sec と 6

Fig. 5 Terminal rising velocity of a bubble w_t in silicone oil with/without photochromic dye.

種類に変化させたときの、着色領域中心部 10×10 pixels におけるフォトクロミック染料輝度値の空間平均値変化の最大値を Fig.4 に示す。本研究では、非着色領域とのコントラストが得られるので、着色領域の輝度値が大きいほど望ましいが、紫外シート光を過大に照射すると液体を局所的に加熱し、自由対流を発生させてしまう。これらの影響を考慮に入れて本実験では、紫外シート光照射時間を 1.5sec と定めた。

2.5 Clean bubble 状態の確認

本研究の目的のひとつは、Dandy ら[6]、Blanco ら[7]の数値解析結果を可視化実験によって検証することである。彼らは、気泡界面でせん断応力がゼロとなる clean bubble 状態を用いて数値計算を行ったが、この状態の実現は本実験において本質的に重要である。そこで、シリコンオイル・トルエン混合液へのフォトクロミック染料溶解が及ぼす気泡上昇速度の影響について検討した。界面活性剤等の不純物の作用により気泡表面上での界面張力の分布が発生すると、気液界面でせん断応力の不連続が発生し、clean bubble 条件が満たされなくなり、気泡挙動に大きな影響を及ぼすことが Cuenot ら[13]によって示されている。Fig.5 に気泡半径と気泡上昇定常速度との関係を示す。液体は 2cSt のシリコンオイル 1000ml 中にトルエン 50ml を混合したものと、シリコンオイル 1200ml 中にトルエン 60ml とフォトクロミック染料を 25ppm 溶解したものを混合したものの、2 種類用いた。図より明らかなように、フォトクロミック染料の有無により、気泡上昇速度には有意な差は見られない。

Fig. 6 Drag coefficient C_D on bubbles in silicone oil with / without photochromic dye, as a function of bubble Reynolds number Re .

次に Fig.6 にこれまでに提案されている抗力係数との比較を示す。比較のため、Mei ら[14]による clean bubble 条件における球形上昇気泡の抗力係数の数値解[14]と、Clift ら[15]による剛体球の抗力係数を示した。本実験で用いた液体中を上昇する気泡は clean bubble とみなして良いことがわかった。

2.6 上昇速度および抗力係数の評価

本実験の気泡に働く抗力係数 C_D は、球形気泡に働く浮力と抗力の釣り合いから得られる式(2)を用い、実験で得られた気泡等価半径 r と、気泡重心位置の上昇終端速度 w_t から求めた。また実験により観察された高 Re 数領域における気泡は球形、または進行方向に回転軸を持ち、進行方向につぶれた回転楕円体であった。そのため、 C_D を評価するために、気泡の微小変形を考慮した Moore[3]の抗力係数および上昇速度の理論解と比較した。

$$C_D = \frac{8gr}{3w_t^2} \quad (2)$$

3. 実験結果および考察

3.1 気泡後流定在渦の可視化

静止液体中に気泡を発生させると、気泡は静止状態より加速する。その加速過程において、気泡は後流を形成しながら上昇する。気泡発生ノズル上面はテストセクション底部より約 45mm に設置し、紫外シート光照射による液体の着色直後に気泡を発生させ、流れ場の可視化を行った。ノズル直上が着色領域となる場合 (solid 実験) と、ノズル上面より 40mm 上方が着色領域下端となる

Fig.7 Visualization of the flow field behind a rising bubble: $r=1.11\text{mm}$, $Re=94$. In (a), the flow field around an accelerating bubble was colored, while in (b), bubble motion was in a steady state. Time elapsed as (i)10.5, (ii)39.25, (iii)73.25, (iv)115.25 ms after the bubble passed through the upper line of the colored layer.

Fig.8 Visualization of the flow field behind a rising bubble: $r=0.88\text{mm}$, $Re=60$. In (a), the flow field around an accelerating bubble was colored, while in (b), bubble motion was in a steady state. Time elapsed as (i)13.5, (ii)52, (iii)85.25, (iv)109.25 ms after the bubble passed through the upper line of the colored layer.

Fig.9 Snap shot of visualized standing eddy and drift behind a rising bubble colored (a) in transient state of bubble motion, and (b) in steady state.

場合 (hollow 実験) の 2 種類の紫外シート光照射位置を定めた。solid 実験は発達途中の気泡周囲流れ場を可視化し、hollow 実験は定常気泡周囲流れ場を可視化するためである。発達した気泡後部定在渦は閉じた流線を形成する[6][7]ため、着色領域通過直後は、定在渦領域は非着色領域として認識される (hollow 実験)。一方、発達過程で渦領域に取り込まれた着色液体は閉じた流線が形成されるために、他の領域より濃い着色領域として認識される (solid 実験)。solid 実験結果と hollow 実験結果とを比較することにより、気泡後部定在渦の可視化を行った。

上昇気泡後部に生成される流れ場を可視化した結果を Fig.7 と Fig.8 に示す。Fig.7 は等価気泡半径 r が 1.11mm、アスペクト比 χ が 1.75 の実験結果であり、気泡後部定在渦が形成される場合、Fig.8 は等価気泡半径が 0.88mm、 χ が 1.38 の、気泡後部定在渦が形成されない場合である。それぞれの図において(a)および(b)はそれぞれ solid 実験結果と hollow 実験結果であり、i~iv は時間経過を示す。

Fig.7(a)中気泡下部の黒い部分が、着色された領域である。このとき、気泡後部定在渦(standing eddy)と気泡運動により誘起された周囲液体部分(気泡下部よどみ点、drift) [16]が観察される。他方 Fig.7(b)では定在渦領域が着色されず、Fig.7(a)とは明らかに異なる。これら着色領域の

Fig.10 Terminal rising velocity of a bubble w_t against equivalent radius r .

Fig.11 Drag coefficient C_D versus bubble Reynolds number Re .

差異は、Fig.9 に示すスチルカメラ撮影画像から、より明確に認識できる。以上の結果より hollow 実験では、気泡が着色領域を通過する時点で定在渦が十分形成され、閉じた流線が形成されていたことがわかる。また、時間経過と定在渦の大きさには大きな変化が見られないが、drift 着色領域は収縮し細くなることが観察される。Fig.7(a-iv)では着色領域の分離が観察され定在渦と drift とを明確に区別することができる。なお、気泡の上昇速度は solid 実験観察位置では終端速度の 95%程度、hollow 実験観察位置では 98%程度に達しており、定在渦構造には大きな差異はないと考える。

一方 Fig.8 の場合には、気泡後部流れ場について solid 実験と hollow 実験との間の明確な差異は見られない。この結果より、 Re 数が 60 程度であると気泡後部定在渦が形成されないことがわかる。また、Fig.8 と比較すると、気泡形状が大きく異なっていることがわかる。 Re 数が 60 の場合 (Fig.8) には、気泡形状が前後対称であるが、

Fig.12 Snap shots of a bubble and its rear region: (a) $r=0.57\text{mm}$, $L=6.0\text{mm}$, (b) $r=0.69\text{mm}$, $L=8.7\text{mm}$, (c) $r=0.88\text{mm}$, $L=12.4\text{mm}$, (d) $r=1.11\text{mm}$, $L=11.5\text{mm}$, where L denotes the distance between bubble center and the top of the colored layer.

Re 数が 94 と増加する(Fig.7)と、気泡形状の前後対称性が崩れ、気泡後部が気泡前部に比較して中心軸上での曲率が大きくなっている。気泡形状と気泡後部定在渦の形成が、上昇気泡の挙動に与える影響をさらに調査するために、抗力係数について次節で考察を行う。

3.2 上昇気泡の抗力係数

本節では、上昇速度 w_i および抗力係数 C_D に関して、実験結果と Moore[3]の理論解との比較を行う。Fig.10 に縦軸に上昇速度 w_i 、横軸に気泡半径 r をとり、Fig.11 に縦軸に抗力係数 C_D 、横軸に Re 数をとったグラフを示す。Fig.10 において、 $r=0.55\text{mm}$ 付近で上昇速度 w_i は Moore[3]の理論解とほぼ一致しているが、 $r=0.7\text{mm}$ 以上の場合、 w_i の上限値としておよそ 200mm/s が得られたのに対し、Moore[3]の上昇速度 w_{LM} の上限値は約 160mm/s となっている。両者の差の相対値は 20% 程度であった。Fig.11 においても、 Re 数が大きければ C_D は理論解より小さくなっている。Duineveld[5]は気泡変形が大きくなると実験値と Moore 解による予測との乖離が大きくなり、気泡形状が前後対称でなくなることを超純水を用いた実験で示した。この気泡の前後非対称は Ryskin ら[4]が示した気泡後部定在渦の存在を間接的に支持していると述べている。そこで、次節では、可視化実験により確認された気泡後部定在渦領域形状と、気泡形状について考察を行う。

3.3 気泡形状と気泡後部定在渦

本節では気泡半径 r が大きい場合の、上昇速度と抗力係数の実験値と理論解との差について、気泡形状と気泡後部定在渦領域形状から考察を行う。Fig.12 に(a) $r=0.57\text{mm}$ 、(b) $r=0.69\text{mm}$ 、(c) $r=0.88$

Fig.13 Coefficient of the third- and fifth-order Legendre polynomials representing the shapes of bubbles in figure 12.

mm、(d) $r=1.11\text{mm}$ の気泡画像と気泡後部定在渦領域を示す。径の小さな(a)の気泡の場合、ほぼ球形を保っているのに対し、径の大きな(b)の気泡の場合、進行方向に回転軸を持ち、進行方向につぶれた回転楕円体であった。さらに径の大きな(c)、(d)の気泡の場合、進行方向に向かって気泡の前後に着目すると、気泡後部に比べ前部はより扁平になっており、気泡の前後は非対称な形状をしている。以上より、気泡半径が大きくなるにつれ、球形から回転楕円体に、さらには前後対称性が崩れ、気泡前部が扁平な形状になることがわかる。さらに、気泡前後の非対称性が卓越すると、気泡後部定在渦領域も成長することが Fig.12 よりわかる。これにより、Fig.10 と Fig.11 で示したように、実験値と Moore 解[3]の差異が生じる場合には、Ryskin ら[4]が示した気泡後部定在渦が存在することが実験的に初めて検証された。

気泡形状の前後非対称性を定量的に評価するために、式(1)で得られた気泡形状の直交関数展開係数を用いる。式(1)中 A_3P_3 および A_5P_5 の項が前後非対称性に重要な役割を果たすので、Fig.12(a)～(d)の気泡形状について、 A_3/A_0 および A_5/A_0 を縦軸に、等価半径を横軸にとり、Fig.13 に示した。Fig.10 と Fig.11 で Moore 解が有効であることが示された $r=0.57, 0.69\text{mm}$ (Figs.12 (a)と(b))の場合は気泡形状が前後対称であり、後部定在渦が形成されていないことがわかる。また、気泡形状の前後非対称性が強い場合には、後部定在渦領域がより大きく、Moore 解からの乖離が大きくなる。なお、 $r=0.88\text{mm}$ (Fig.12(c))の場合には、気泡形状の前後非対称性は観察され、実験結果と Moore 解との差異が見られるが、明確な後部定在渦は観察されなかった。この Re 数領域における定在渦の存

在可能性については、計測手法の改善を含めて、より詳細な検討が必要であり今後の課題である。

4. 結 論

静止液体中を上昇する気泡により形成される流れ場を、フォトリソミック染料を用いて可視化した。その結果、以下の結論を得た。

- (1) シリコンオイルとトルエンの混合液（動粘度 $2.1\text{mm}^2/\text{s}$ 、表面張力係数 17.8mN/s ）中を上昇する気泡は、フォトリソミック染料の有無に関わらず、せん断応力がゼロとなる clean bubble の条件を満たす。
- (2) Moore[3]が予測した、静止液体中を上昇する clean bubble の上昇速度および抗力係数は、 Re 数が増加すると実験値と乖離する。この場合 Ryskin ら[4]が数値計算で示した気泡後部定在渦（standing eddy）が形成されることがあり、その領域は Re 数とともに増大することを、実験的に初めて示した。

謝 辞

本研究を行うにあたり、東京大学の高木周助教授より貴重な助言を受けた。ここに記して謝意を示す。また、日本学術振興会科学研究費補助金[基盤研究(B)(2)、課題番号 17360082]、文部科学省平成 15 年度 21 世紀 COE プログラム[水素利用機械システムの統合技術]の助成を受けた。ここに記して謝意を示す。

Nomenclature

C_D	: drag coefficient	[-]
g	: gravity	$[\text{mm}/\text{s}^2]$
Mo	: Morton number $(=g\nu^4\rho^3/\sigma^2)$	[-]
r	: bubble radius	$[\text{mm}]$
Re	: Reynolds number $(=2w_r r/\nu)$	[-]
w_r	: terminal rise velocity	$[\text{mm}/\text{s}]$
We	: Weber number	[-]

Greek letters

χ	: aspect ratio	[-]
ν	: kinematic viscosity	$[\text{mm}^2/\text{s}]$
ρ	: density	$[\text{kg}/\text{m}^3]$
σ	: surface tension	$[\text{mN}/\text{m}]$

参考文献

- [1] Levich, V.G., Physico Chemical Hydrodynamics, Prentice Hall, New Jersey (1962).
- [2] Moore, D.W., The boundary layer on a spherical gas bubble, *J. Fluid Mech.* **16**, 161-176 (1963).
- [3] Moore, D.W., The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity, *J. Fluid Mech.*, **23**, 749-766 (1965).
- [4] Ryskin, G. and Leal, L.G., Numerical-solution of free-boundary problems in fluid-mechanics. 2. Buoyancy driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid, *J. Fluid Mech.* **148**, 19-35 (1984).
- [5] Duineveld, P.C., The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **292**, 325-332 (1995).
- [6] Dandy, D.S. and Leal, L.G., Boundary-layer separation from a smooth slip surface, *Phys. Fluids*, **29**(5), 1360-1366 (1986).
- [7] Blanco, A. and Magnaudet, J., The structure of the axisymmetric high-Reynolds number flow around an ellipsoidal bubble of fixed shape, *Phys. Fluids*, **7**(6), 1265-1274 (1995).
- [8] Taneda, S., Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **11**, 1104-1108 (1956).
- [9] Popovich, A. T., Hummel, R. L., A new method for non-disturbing turbulent flow measurements very close to a wall, *Chem. Eng. Sci.*, **22**(1), 21-25 (1967).
- [10] Koso, T., Nakayama, H., Kuniba, Y., Tokai, H., Turbulent mixing of matter by a rising bubble, *Proc. 5th Int. Conf. on Multiphase Flow (ICMF'04)*, Paper 525 (2004).
- [11] Sanada, T., Watanabe, M., Fukano, T., Kariyasaki, A., Behavior of a single coherent gas bubble chain and surrounding liquid jet flow structure, *Chem. Eng. Sci.*, **60**, 4886-4900 (2005).
- [12] 大津展之, 判別および最小 2 乗基準に基づく自動しきい値選定法, *電子通信学会論文誌, D*, J63-D4, 349-356 (1980).
- [13] Cuenot, B., Magnaudet, J. and Spennato, B., The effects of slightly soluble surfactants on the flow around a spherical bubble, *J. Fluid Mech.*, **339**, 25-53 (1997).
- [14] Mei, R., Klausner, J.F. and Lawrence, C.J., A note on the history force on a spherical bubble at finite Reynolds number, *Phys. Fluids*, **6**, 418-420 (1994).
- [15] Clift, R., Grace, J.R. and Weber, M.E., Bubbles, Drops, and Particles, Academic Press (1978).
- [16] Bush, J. W. M., Eames, I., Fluid displacement by high Reynolds number bubble motion in a thin gap, *Int. J. Multiphase Flow*, **24**, 411-430 (1998).