粒子間干渉を考慮した掃流層の数値シミュレーション

Numerical Simulation of Bed-Load Layer: Modelling of Interaction among Saltating Particles

中川博次*・辻本哲郎**・後藤仁志***・渡辺幹広****

By Hiroji NAKAGAWA, Tetsuro TSUJIMOTO, Hitoshi GOTOH and Mikihiro WATANABE

The structure of bed-load layer is characterized by: (i) irregular motion of the individual saltating particle; (ii) particle/flow interaction; and (iii) particle/particle interaction. In this study, the motion of saltating particle is described by the irregular successive saltation model, and the PSI (Particle-Source-In)-Cell model is employed to couple the successive saltation model with the k- ϵ model of turbulence for describing the continuum flow field. Furthermore, PSI-Cell model is modified by considering the effect of the interparticle collision. Results of the present simulation agree well with the experimental results on the existing probability density and the velocity profile of saltating particle.

Keywords: bed-load layer, saltation, PSI-Cell model, particle/particle interaction

1. はじめに

掃流層中の砂粒子の流送過程を固液二相流的な視点で理解するには、A)固相としての砂粒子系、B)液相としての流れ系、C)二相間のカップリングについて適切なモデルが必要となるが、モデリングの鍵となるのが、1)砂粒子間相互の干渉と、2)流れ系と粒子系間の干渉の評価である。

砂粒子系を特徴づける基本的要因の一つは、不規則な幾何形状を有する河床面との衝突・反発を伴う単一砂粒子の不規則運動であるが、この要因のモデル化には確率論が有効である。辻本・中川¹⁾、関根・吉川²⁾は、河床面における衝突・反発の表現に確率論を導入して、単一砂粒子の運動をLagrange的に追跡し、その重畳として砂粒子系の特性を明らかにしている。一方、砂粒子系を特徴づけるもう一つの要因である粒子間衝突については、取扱いが困難であること、各個運搬では粒子間の距離が比較的大きく衝突の発生頻度が低いと期待されることなどの理由から、従来の確率モデルでは考慮されなかった。高濃度の掃流層では、粒子間衝突は無視し得ないものとなるから、広範囲の掃流力に対して有効なモデルの確立には、粒子間衝突の考慮が是非とも必要である。

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部環境地球工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科

*** 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室

**** 学生会員 京都大学大学院 工学研究科修士課程交通土木工学専攻

また、高濃度の掃流層では砂粒子の混入に伴う流れ場の構造の変化が有為なものとなり、この効果の表現がモデル化のもう一つの鍵となる。これは粒子系と流れ系とのカップリングの問題に他ならないが、前述のように単一砂粒子の運動の不規則性の表現にはLagrange型のアプローチが必要不可欠であるから、Euler型の流れ系の表現とLagrange型の砂粒子系のそれとをカップリングする必要がある。Crowe et al.³⁾は、粒子混入の影響を負の生成項として流れの運動量式に反映させるPSI(Particle-Source-In)-セルモデルを用いた固体粒子を含む噴流の数値解析を行っており、Euler-Lagrangeカップリングの手法として示唆的である。

著者ら⁴⁾はすでに、PSI-セルモデルにより確率過程型の砂粒子運動のシミュレーションと流れ場のk-ε乱流モデルをカップリングさせて、流体・粒子間干渉を考慮した掃流層の数値シミュレーションを試みているが、本研究では、単一砂粒子のLagrange的追跡結果を援用した粒子間衝突の近似的評価を行い、流体・粒子間に加えて粒子間相互の干渉を考慮可能なシミュレーションモデルを提案し、確率モデルによる高濃度掃流層の解析を試みる。

2. シミュレーションモデル

2.1 流れ系のモデル

流れ系は、平均流の運動方程式に砂粒子系からのフィードバックを表す負の生成項を有するk-ε乱流モデルにより、式(1)～(6)のように定式化される。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\Gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \Gamma \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} + S_{PU} \quad (2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Gamma \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\Gamma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + S_{PV} \quad (3)$$

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + G + \varepsilon \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} G + C_{2\varepsilon} \varepsilon) \quad (5)$$

$$G = \nu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] ; \quad \Gamma = \nu_t + \nu ; \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6)$$

ここに、 x, y : 流下方向とそれに直交する座標軸、 U, V : x, y 方向の平均流速成分、 P : 静水圧からの偏差圧力、 h : 水深、 ρ : 水の密度、 g : 重力加速度、 θ : 水路床勾配、 S_{PU}, S_{PV} : 粒子系からのフィードバックを表す負の生成項、 Γ : 有効粘性係数、 ν_t : 渦動粘性係数、 G : 乱れエネルギーの発生率である。モデル定数についてはLaunder & Spalding⁵⁾の標準推奨値 ($C_\mu=0.09, C_{\varepsilon 1}=1.44, C_{\varepsilon 2}=1.92, \sigma_k=1.0, \sigma_\varepsilon=1.3$)を用いている。

2.2 粒子系のモデル

粒子系の運動は、不規則継続跳躍モデルで表現され、Saltation 粒子の運動方程式は、

$$\rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{du_p}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho A_2 d^2 \sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2} (U - u_p) \quad (7)$$

$$\rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{dv_p}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho A_2 d^2 \sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2} (V - v_p) - \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g A_3 d^3 \quad (8)$$

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{24}{Re} \quad ; \quad Re = \frac{d\sqrt{(U-u_p)^2 + (V-v_p)^2}}{\nu} \quad (9)$$

で与えられる。ここに、 u_p, v_p : x, y 方向の砂粒子の速度成分、 C_M : 付加質量係数、 α : 砂の密度、 A_2, A_3 : 砂粒子の2次元、3次元の形状係数、 C_D : 抗力係数であり、 $C_M=0.5, A_2=\pi/4, A_3=\pi/6, C_D=0.4$ を用いた。河床面との衝突・反発の不規則性は、2次元反発モデルにより表現される。砂粒径程度の凹凸に起因する衝突の不規則性は、確率変数である河床反発面傾斜角 α を介して、衝突直前・直後の速度(u_{gin}, v_{gin}), (u_{gout}, v_{gout})を以下のように関係づけることで表現される。

$$\begin{bmatrix} u_{gout} \\ v_{gout} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \cdot \cos^2 \alpha - f \cdot \sin^2 \alpha & (e+f) \cos \alpha \sin \alpha \\ (e+f) \cos \alpha \sin \alpha & e \cdot \sin^2 \alpha - f \cdot \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{gin} \\ v_{gin} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここに、 e, f : 反発係数である。個々の砂粒子の不規則運動の重畳として、粒子系の運動が模擬される。

2.3 流体・粒子間の干渉モデル

離散系としての粒子系と連続系としての流れ系は、PSI-セルモデルによりカップリングされる。具体的には、砂粒子のLagrange的追跡過程において、流れ場の格子を横切る際の砂粒子速度を求めて、各格子を通過する際に砂粒子が獲得する運動量を評価し、その反作用としての流れ場の運動量損失を算定することにより、砂粒子混入の影響を流れ場の運動量式に付加項として導入するという方法が取られる(図-1参照)。砂粒子混入の影響を表す負の生成項は、

図-1 PSI-セルモデル

$$\begin{aligned} S_{PU_j} &= -\frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{\sigma}{\rho} q_B w_j \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_p}{R_j} \right) u_{pout_i} - u_{pin_i} \right\} \frac{1}{\Delta V_j} \\ S_{PV_j} &= -\frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{\sigma}{\rho} q_B w_j \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_p}{R_j} \right) v_{pout_i} - v_{pin_i} \right\} \frac{1}{\Delta V_j} \end{aligned} \quad (11)$$

と表される。ここに、 q_B : 掃流砂量、添字 j : 層の番号、 u_p, v_p : 衝突を考慮しないときの砂粒子速度であり、添字 in, out は各層への突入と各層からの脱出を示している。 N_j : 第 j 層を通過する砂粒子の総数、 ΔV_j : セル j の体積、 R_j : 第 j 層内の粒子間衝突による速度変化率(式(12)参照)、 w_j : 存在確率による第 j 層の重み、 α_p : 粒子間衝突が流体の運動量損失に与える影響の大きさを規定する経験定数である。他の粒子との衝突により減速された砂粒子は流れに再度加速されて速度を回復するため、流体に付加的な運動量欠損をもたらす。式(11)は、このような効果を R_j, w_j を通じて近似的に表現したものである。

3. 粒子間衝突の取扱いと計算手続きの概要

粒子間衝突について厳密に取り扱うには、複数の砂粒子の運動過程を同時に追跡する必要があるが、ここでは取扱いの簡便性に配慮し、単一粒子の運動過程の重畳として粒子系を記述する従来の確率モデルの枠組みの範囲内で粒子間衝突の効果を推定することを試みる。手順の概要を図-2に示す。まず、清水流中で単一粒子の不規則運動を模擬し、その重畳から砂粒子の運動特性（すなわち存在確率密度と平均移動速度）を求める(図中の[A])。次に、求められた特性に従って流れ場に粒子を配置する(図中の[B])。

配置された粒子群の各粒子が位置を変化させることなくその高さでの平均粒子速度で流下するものと仮定すると、砂粒子の平均移動速度と同一速度で移動する座標系から見てこの砂粒子群は固定され、相対的位置

に変化が生じなくなる(図中の[C])。このような性質を利用して、各高さの砂粒子群の平均移動速度で移動する座標系において粒子群中を通過する saltation 粒子の運動を模擬し、式(11)中の粒子間衝突に関係するパラメータ R_j, w_j を評価する。粒子群中を運動する saltation 粒子を追跡する際には、以下の仮定を導入し、現象の簡素化を図る。すなわち、粒子間衝突の影響は追跡対象とする saltation 粒子の運動にのみ限定され、衝突の結果粒子群の位置や速度には変化は生じないものと仮定する。単一粒子の運動追跡結果から粒子間衝突を評価するには、このような仮定を導入せざるを得ない。

実際の粒子間衝突で saltation 粒子が失った運動量は他の粒子の獲得する運動量となるが、図-2[C]では、saltation 粒子の運動量損失だけが考慮されることとなり、この意味で粒子間衝突の影響が、過大に見積もられることとなる。逆に、図-2[A]では、単一粒子は粒子間衝突の影響を全く受けずに運動しており、実際の状況は、[A],[C]の中間にあると言える。

粒子間衝突による速度変化率 R_j は、次式のように第 j 層で生じる衝突による速度変化を重ね合わせたものとして表される。

$$R_j = \prod_{i=1}^{N_j^{\infty}} r_{ij} ; r_{ij} = |u_{af}|/|u_{bf}| \quad (12)$$

ここに、 N_j^{∞} : 第 j 層中の衝突回数、 u : 砂粒子の速度ベクトル、添字 bf, af: 衝突前、後である。重み係数については、

$$\frac{w_j}{w_j^s} = f_B(y_j) \Delta y_j / f_B^s(y_j) \Delta y_j = \frac{1 - \beta_p}{R_{pdf}} + \beta_p \quad (13)$$

$$R_{pdf} = f_B^m(y_j) \Delta y_j / f_B^m(y_j) \Delta y_j \quad (14)$$

で評価する。ここに、 f_B, f_B^s : 粒子間衝突を考慮した場合としない場合の砂粒子の存在確率密度で、前者は未知であるが後者は既知であるため、重み関数の比を式(13)のように推定する。ここに、 f_B^m : 図-2[C]の場合の saltation 粒子の存在確率密度である。式(13)は、図-2 [A],[C] の確率密度関数の間に現実の確率密度関数が位置することを示しており、[A],[C] の配分比率を決める経験定数が、 β_p である。

表-1 (I_e : エネルギー勾配, h : 水深, U_m : 平均流速, u_* : 摩擦速度, τ_* : 無次元掃流力) に示す開水路実験の条件下での速度変化率および [A],[C] の場合の確率密度の比についての計算結果を示したのが図-3である。実験には、粒径 $d=0.5\text{cm}$ 比重 2.60 のガラスビーズを用い、反発係数については飛高が実験値とほぼ一致するように、 $e=f=0.75$ を用いた。 β_p については、図-2 [C] の状況が他の砂粒子との衝突の影響をかなり過大に見積もっていることを考慮して、 $\beta_p=0.9$ とした。衝突の生じている範囲で速度変化率は全層にわたってほぼ一定値となる。一方、確率密度の比は底面付近で 1.0 を越え、上部では 1.0 を下回るが、このことは [A] の方が [C] より底

図-2 粒子間衝突の取扱い手順

表-1 計算条件/実験条件

I_e	$h(\text{cm})$	$U_m(\text{cm/s})$	$u_*(\text{cm/s})$	τ_*
0.02	8.29	144.8	13.56	0.23

図-3 粒子間衝突のパラメータ

面付近への偏在化傾向が強く、[C]の方が広範囲の高さに広く分布することを裏付けるものである。このような分布形の相違は以下のように解釈できる。saltation層の中間付近の存在確率の大きい領域が緩い透過性を有する障壁的な機能を果たしており、saltation粒子がこの透過性障壁を抜けて上層部に到達した後は、この障壁に跳ね返されて落下を阻まれ、結果として単一砂粒子の場合より長時間にわたってsaltation層上部に滞在することとなる。また、同時にこの透過性障壁は、saltation粒子の上昇を阻止し、その結果、底面付近の砂粒子の存在確率を上昇させる。これによって、[C]の状況での分布は、[A]に比べて一様化する。

計算全体の流れを図-4に示す。まず、清水流で流れを解き、単一砂粒子の運動を模擬して粒子系の統計的構造を推定する。次に、単一砂粒子の追跡結果から粒子間衝突に関するパラメータ R_p, w_p を評価し、砂粒子混入の影響を表す負の生成項を求めて、再び流れを解く。このプロセスを流れ場の解が収束するまで繰り返し、収束解が得られれば、砂粒子の運動の統計的特性を評価して計算を終了する。

図-4 計算の流れ

流れ場の底面境界条件については、第1格子点で対数則の成立を仮定して流速値を与え、 k, ϵ については第1格子点におけるエネルギー平衡関係を仮定した。一方、水面では軸対称条件を仮定して求めた解を瀧津・中川⁶⁾の方法で乱れエネルギーの減衰を考慮して補正し、また、側方境界については周期境界条件を課す。基礎方程式はコントロール・ボリューム法により離散化され、SIMPLEアルゴリズムに基づいてコード化された。計算格子は、水平方向に10分割、鉛直方向に16分割したスタッガード格子を用い、鉛直方向については掃流層内を詳細に計算するため底面付近を密にした不等間隔格子とした。なお、流れ場の計算コードの作成にあたっては、京都大学大型計算機センターのプログラム・ライブラリ：2方程式 $k-\epsilon$ モデルを用いた2次元等温・非等温場での乱流解析コード（作成者：F.J.K. Ideriah, A.D. Gosman, W.M. Pun, 改訂者：武本行正）を参考にした。粒子系の計算時間スケールは、 $\Delta t=1/500$ 秒を用い、計算の打ち切り条件を successive saltation 30回とした。なお、表-1の条件下でこの計算条件を適用すると約600回の individual saltation が追跡されることとなる。

図-5 砂粒子の存在確率密度

4. 計算結果と考察

図-5は、砂粒子の鉛直方向存在確率密度について表-1の実験とシミュレーション結果とを比較したものである。なお、シミュレーションモデルの特性を明らかにするため、1) 清水流近似を用いた従来型のシミュレーション（図中の Clear）、2) PSI-セルモデルを用いて流体・粒子間干渉を考慮したシミュレーション、3) 修正PSI-セルモデルを用いて流体・粒子間および粒子間相互の干渉を考慮したシミュレーションの3者を比較している。清水流近似を仮定したシミュレーション結果は掃流層上部で実験値より大きく、下部で小さい予測を与える傾向があるが、PSI-セルモデルの導入によりこの傾向は大幅に是正され、実験値との適合性が

向上している。さらに、粒子間衝突を考慮した修正PSI-セルモデルによると、PSI-セルモデルの予測値が一層改善され、実験値との適合性が一層良好となる。 α_p は粒子間衝突の影響が流体の運動量損失に与える影響の大きさを規定するパラメータであるが、 $\alpha_p=0.03$ のときが実験値と良好に適合する。

図-6は、砂粒子の移動速度の水平方向成分について実験とシミュレーション結果とを比較したものである。清水流近似を用いたシミュレーションでは、全領域で過大評価となっているのに対し、PSI-セルモデルを用いたシミュレーションではこの過大評価傾向が大幅に是正されているが、底面付近の移動速度の欠損傾向についてはなお不十分な結果となっている。修正PSI-セルモデルを用いた場合には、

α_p を大きくするに従って移動速度分布は図中で左にシフトする。これによって掃流層上部での移動速度は小さく見積られることとなるが、底面付近の適合性は向上する。掃流層上部でのサンプリング数は少なく、さらに上部ほど移動速度の絶対値も大きくなるため計測誤差が大きくなるので、ここでは移動速度分形を表す速度勾配の高さ方向の変化と底面近傍流速について、シミュレーション結果と実験値の対応を検討した。すなわち図-7に示す底面近傍流速と移動速度分布の変曲点より上部の直線部からの外挿値との差 Δu_p と変曲点の高さ y_{inf} に着目し、これらの α_p に対する変化を調べた。図中に併示した実験結果と比較すると $\alpha_p=0.03$ のときの適合性が最も良好である。

5. おわりに

本研究では、掃流層内の砂粒子の流送過程を連続系としての流体系と離散系としての粒子系からなる固液混相流として記述し、 $k-\epsilon$ 乱流モデルと不規則継続跳躍モデルとをPSI-セルモデルを用いて融合させて、掃流層の流動過程のシミュレーションを実施した。PSI-セルモデルの予測結果は従来の清水流近似を前提としたシミュレーション結果を大幅に改善するものであるが、本研究ではさらに、粒子系における粒子間衝突の影響を考慮したPSI-セルモデルの近似的修正法を提案し、粒子間衝突を考慮しないPSI-セルモデルの結果がさらに改善されることを明らかにした。今後は、粒子間衝突のより普遍的な取扱いを検討して、シミュレーションモデルの改良を行い、飛砂、飛雪などを含めた混相流の統一の予測法の開発へと発展させたい。

参考文献

- 1) 辻本哲郎・中川博次：掃流粒子のSaltationの確率過程論的解析，土木学会論文集，第345号，pp. 83-90, 1984.
- 2) 関根正人・吉川秀夫：掃流砂の停止機構に関する研究，土木学会論文集，第309号，pp. 105-112, 1980.
- 3) Crowe, C.T., Sharma, M.P. and Stock, D.E.: The Particle-Source-In Cell (PSI-CELL) Model for Gas-Droplet Flows, Jour. Fluid Eng., pp. 325-332, 1977.
- 4) 後藤仁志・辻本哲郎・中川博次：PSI-セルモデルによるSaltation層の解析，海岸工学論文集，第39巻，pp. 266-270, 1992.
- 5) Launder, B.E. and Spalding, D.B.: The numerical computation of turbulent flow, Computer Method in Applied Mech. and Eng., Vol. 3, pp. 269, 1974.
- 6) 瀬津家久・中川博次：修正 $k-\epsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算，土木学会論文集，第387号，pp. 126-134, 1987.

図-6 砂粒子の移動速度

図-7 経験定数の効果