固液混相流における支配方程式とその適用性

Governing Equations of Solid-Liquid Two phase Flow and Their Applications

水理委員会共同研究グループ*: 芦田和男・

江頭進治・佐々木幹夫・清水義彦・関根正人・

玉井昌宏・藤田正治・宮本邦明・森 明巨

(五十音順)

By Research Group on Multiphase Flows: K. Ashida,
S. Egashira, M. Sasaki Y. Shimizu, M. Sekine, M. Tamai,
M. Fujita, K. Miyamoto and A. Mori

Three types of models, i.e. one fluid model, two fluid model and particle-fluid model, are generally applied to investigate the characteristics of two phase flows. In each model, the careful consideration on the structures of governing equations and the constitutive relations employed should be needed. Essential point to be discussed in this paper is how the effects of interactions between two phases are taken into account in these basic equations.

Keywords: solid-liquid two phase flow, multiphase flow, governing equations, interaction force

1. 序

土石流、泥流、掃流砂、浮遊砂など土砂水理学で取り扱われる対象は、水（流体、液相）と土砂（固体、固相）からなる固液混相流として一般的に取り扱うことができよう。ここでは、前報¹⁾に引き続き、土砂水理学を中心とするこれらの現象を混相流の力学としてとらえたとき、従来の研究やその基本的考え方がどのように現れてくるか、整理、検討している。前報では、中間報告として研究グループにおける研究の方向と、混相流の力学として土砂水理学を中心とする諸問題について議論しようとしたとき、その解釈にかなりの相違がみられることを報告した。また、その問題が、結局は固液混相流の応力構造がどのように表現されるかといった問題に集約されることをあわせて報告した。

固液混相流は文字どおり固相と液相からなる混相流であるが、その運動は一般的には連続場の物理諸量の時間的变化として偏微分方程式の形で記述される。このことは、固液混相流が何らかの連続体として評価されていることを示している。偏微分方程式を得る最も単純で理解しやすい方法は、流れの中に（連続体に）任意の閉空間（システム）を考え、その閉空間の運動をラグランジュ的に表現して、その後、等価なオイラー表現に書き換えるという手続きであろう。

* 連絡先 正会員 工博 江頭進治 (〒527-77 草津市野路町 1916 立命館大学理工学部土木工学科)

このように考えると、固液混相流の力学的取り扱い、液相・固相の両相の取り扱い、および、連続体に導入されるシステムの取り扱いによって、大きく分類することができる。液相は連続相であるが、固相は連続相としても離散相としても取り扱うことができる。固相を離散相として扱うモデルを粒子一流体モデルと呼ぶ。固相を連続相として扱う場合、その方法に2通りある。ひとつは液相と固相のシステム（閉空間）を独立に与え、固相液相とも独立のシステム・流体として評価する方法で、そういう意味でこれを二流体モデルと呼ぶ。もうひとつは、両相を同一のシステム・流体として評価する方法で、これを一流体モデルと呼んでいる。

一流体モデルでは、システムをただひとつだけ導入する。一流体モデルにしたがえば、固相も液相も同一のシステムで記述されるから固液混相の単一の連続相として取り扱われる。したがって、固液混相流でよく問題となる固相と液相の相互作用は陽の形で現れず、たとえば粘性係数などの物理定数の見かけ上の変化として評価される。

二流体モデルでは、液相、固相と別々の連続相として取り扱い、それぞれの相ごとにシステムを導入する。二流体モデルにしたがえば、それぞれのシステムについての記述だけでなく両システム間の相互作用を同時に記述する必要がある。したがって、この場合、両相の相互作用は陽の形で明確に評価されなければならない。この両相間の相互作用には2つの種類の相互作用がある。ひとつは液体と固体の境界における相互作用である。もう一つは、両相のシステムの重なりかたの時間的变化による相互作用である。すなわち、このシステムの重なり方の時間的变化に伴う物理諸量の交換がもうひとつの重要な評価項目となる。二流体モデルで説明しようとする場合、この両相が互いに矛盾しないように定めなければならない。

粒子～流体モデルでは、固相を離散相として取り扱う。したがって、固相は液相中を運動する個々の離散的な固体粒子としての取り扱いを受ける。連続相である液相と固相である固体粒子との相互作用の与え方でいくつかの立場がある。

2. 支配方程式の構造

2.1 一流体モデル

(1) 支配方程式

一流体モデルが主に扱ってきたテーマは固液混相流の構成方程式、それも比較的特殊な流れにおけるそれである。その流れというのは、固相と液相の速度がほとんど等しいとして扱うことのできるような流れである。たとえば、微細粒子を高濃度に含んだ泥流やスラリー状の流れ、あるいは土石流のような流れである。

一流体モデルにおける支配方程式は、流れの中に固液混相の一つのシステムを導入し、そのシステムの運動をラグランジュ的に記述することにより得られる²⁾。いま、固液混相流の空間にある閉空間 D (システム) を導入し、その運動を保存則の形で記述しよう。質量、運動量、運動エネルギーに関する保存則は、システムの持つ質量、運動量、力学的エネルギーをそれぞれ M, P, K として次のように表される。質量保存則：

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \quad (2.1)$$

運動量保存則：

$$\frac{DP}{Dt} = \int_D \rho b_i dV + \oint_{\partial D} \sigma_{ij} n_j dS \quad (2.2)$$

運動エネルギー保存則：

$$\frac{DK}{Dt} = \int_D \rho b_i u_i dV + \oint_{\partial D} \sigma_{ij} u_i n_j dS - \Phi \quad (2.3)$$

と表される。 D/Dt はラグランジュ時間編微分、 ρ は混合物の密度、 b_i はbody force、 σ_{ij} は応力テンソル、 n_j は ∂D の単位法線ベクトル、 Φ は変形によりシステム内部で消費する単位時間当たりのエネルギーを表す。

このように一流体モデルでは、固液混相流を単一の連続体として取り扱う。このことは保存則が単一のシステムに対して記述されていることに対応している。したがって、この支配方程式系そのものには固液混相流の特徴はどこにも表現されていない。これらの支配方程式の意味するところは、どのような流体も、一つの連続体とみなすことができれば、すなわち一つの流体としての連続体近似すれば、必ずこれらの保存則を満たさなければならないということである。

この支配方程式系に従えば、固液混相流の特徴は、運動量保存則中の応力項、力学的エネルギー保存則中のエネルギー消費の項に集中的に表現されることになる。すなわち、力学的エネルギー保存則を満足するように、運動量保存則中の応力が定められなければならない。このことは、本質的に構成方程式に対する興味と同一である。式(2)を式(3)に代入すると、次式を得る。

$$\Phi = \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad (2.4)$$

上式は、外力のなす仕事は考えているシステムの変形に伴うエネルギー消費と等しいこと、したがって、この支配方程式系に基づいて構成則を決定するとき、流れの力学的モデルは運動エネルギー保存則のエネルギー消費項の中に表現されなければならないことを意味している。

(2) 構成則

流れの対象が粒状体のように離散的であろうが流体のように連続的であろうが、連続体としての取り扱いが可能であれば、あるいは連続体近似をしてある十分に大きな閉空間における変形に対応するエネルギー消費量 Φ を何らかのモデルをたてて見積もることができれば、式(2.4)に基づいて変形に伴う応力を決定することができる¹⁾。すなわち、構成方程式を定めることができる。このとき注意しなければならないことは、エネルギー消費量とそれを支配している内部の運動は、流れを規定しているであろう要素によってモデル化されて評価されているにすぎず、流れの詳細な情報は十分に得られていないということである。したがって、一般的には流れの運動学的な条件はかなりしばられており、とくに平均的な運動(たとえば、平均流速場)に対してモデルをたてることが多く、内部運動量やシステムの閉曲面を通しての種々の物理量の交換を考慮していないため、流れそのものは巨視的には層流ということになることが多い。上述のような方法で導かれた構成則の例について見てみよう。

粘土やシルトを高濃度に含む流れは、ビンガム流体としての性質を持ち、かつ大きな粘性係数をもつが、そのような流れをしばしば泥流と呼んでいる。泥流の構成則については、せん断降伏力と塑性粘度が興味の対象となる。芦田ら³⁾は、一流体モデルを用いて、そのような材料の流動曲線、せん断降伏応力、塑性粘度について検討を行っている。彼らは、泥流中の微細粒子の配列モデルとしてBagnoldと同様のモデルを用い、単純せん断流中の粒子間相互作用および粒子・流体間の相互作用を電気化学的な相互作用が卓越しているとして取り扱い、構成方程式を得ている。具体的には、粒子間相互作用として結合エネルギーを、粒子・流体間相互作用として電気2重層を導入し、単純せん断流場における適当な閉空間のエネルギー消費量 Φ を見積もり、式(2.4)の左辺に代入することによって流動曲線、構成方程式を得ている。理論から得られた流動曲線と2重円筒型共軸回転粘度計を用いた実験との比較を図-1に示すが、両者は非常に一致を見ている。

図-1 泥流のレオロジー曲線

土石流に関する一流体モデルとしての研究についても同様の研究が江頭ら⁴⁾によってなされている。江頭らは、土石流のエネルギー消費空間を粒子内部、粒子表面、流体内部に分け、粒子内部のエネルギー消費は宮本⁵⁾の研究成果を用いて粒子の反発係数で表わし、粒子表面のエネルギー消費については粒子間固体摩擦で評価している。液相のエネルギー消費については粒子・流体間の相互作用を陰に含めた形で、粒子間隙のスケールに支配される乱れエネルギーの生成に費やされるとして評価している。その際、液相は巨視的には固相と同一の速度をもっていることが仮定されている。液相のエネルギー消費は、間隙流体に与えられた乱れエネルギーが回りの粒子により閉じられた空間で液体の粘性により散逸するとして、間接的に評価していることになる。このようにして得られた個々の独立な空間に対して見積もられたエネルギー消費量は、空間の独立性の仮定の下に線形和され適当な閉空間Dのエネルギー消費量Φを求めることにより次のような構成方程式が導かれている。

$$\tau = p_s \tan \phi_s + k_g (1 - e^2) \sigma d^2 C^{1/3} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + k_f \rho d^2 \frac{(1 - C)^{5/3}}{C^{2/3}} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \quad (2.5)$$

ここに、 k_g, k_f は定数、 d は粒径、 e は反発係数、 ρ, σ はそれぞれ液体・固体の密度、 C は粒子濃度である。

得られた構成方程式は、比較的河床勾配が急で掃流力が大きい場での流砂現象に適用され⁶⁾、ほぼBrownの流砂量関数と同様の結果を得ている。

また、当然、このようにして得られた構成則は巨視的には層流のものであるから、乱流への遷移や乱流構造に関する議論も必要になってくるが、この話題そのものはここでの議論の対象とは異なった問題なのでここでは省略することにする。

2.2 二流体モデル

それぞれが異なった性質をもつ2つの物質を考え、両相の間には物質が急変するごく薄い遷移層をおく。遷移層を除いた2つの相は連続体を仮定して微分方程式で記述できるものとする。二流体モデルではこの様な場が考えられている。そこには2つの課題がある。第一は、遷移層の物理モデル(積分形の保存則)を考え、これを厚さ0の界面に閉じこめる数学モデルの構築である。これは、一般に界面における「跳びの条件」と応力に関する境界条件で表される。

第二の課題は、得られた「局時、局所の微分方程式+不連続界面」の場を実用的な方程式とするために、時空間やアンサンブルの平均化を行うことである。実用化とは、界面不連続を平滑化して全時空間で微分可能にすることと、不要な微小変動の除去である。この平均化処理によって、界面不連続は“構成則”となって空間に一樣分布し、2つの相は時空間の各点に同時に存在する形に変換される。以下では、考える物質は非圧縮性とし、また、相変化はないものとして“跳び”は考えないことにする。

平均操作には次式で定義される相関数 X を導入すると都合がよい。

$$X_K(\vec{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \vec{x} \text{ is in phase } K \text{ at time } t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.6)$$

局時、局所の連続式および運動方程式は次のようである。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (2.8)$$

ここで X を汎関数とすると次式が成り立つ。

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} + v_i \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = 0 \quad (2.9)$$

ここに、 v_i は界面の速度。式 (2.6), (2.7) に X_k を乗じて平均化する。このとき、微、積分の順序交換などに関する Leibniz' rule, Gauss' rule, Reynolds' rule が使える⁷⁾。これらの関係を用いると、式 (2.7), (2.8) は次のように変形される。ここに、 $\langle \rangle$ は平均を表す。

$$\frac{\partial \langle X_k \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle X_k \rho u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \langle X_k \rho u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle X_k \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial \langle X_k \sigma_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \langle \sigma_{ij} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \rangle + \langle X_k \rho b_i \rangle \quad (2.11)$$

式 (2.11) の右辺第2項に含まれる $\partial X_k / \partial x_i$ は、界面以外の地点では0で、界面を横切る地点でのみ値をもつ。この項は界面の効果、すなわち、相間の相互作用を表すことになる。ここで、相 k の体積濃度 $\alpha_k = \langle X_k \rangle$ を導入して、変数 ϕ の2種類の平均を定義する。

$$\tilde{\phi}_k = \langle X_k \phi \rangle / \alpha_k, \quad \hat{\phi}_k = \langle \rho_k X_k \phi \rangle / \langle \phi_k X_k \rangle \quad (2.12)$$

式 (2.11) の左辺の第2項の ρ, u_i を平均変量と変動分に分けて

$$\langle X_k \rho u_i u_j \rangle = \alpha_k \tilde{\rho}_k \hat{u}_{ki} \hat{u}_{kj} - \alpha_k \tau_{kij}$$

と書く。これらの記号を用いると平均化方程式は

$$\frac{\partial \alpha_k \tilde{\rho}_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \tilde{\rho}_k \hat{u}_{ki}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \alpha_k \tilde{\rho}_k \hat{u}_{ki}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \tilde{\rho}_k \hat{u}_{ki} \hat{u}_{kj}}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_k (\sigma_{kij} + \tau_{kij})}{\partial x_j} - \langle \sigma_{kij} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \rangle + \alpha_k \tilde{\rho}_k b_i \quad (2.14)$$

となる。これが二流体モデルによる支配方程式である（ただし、平均操作が一回の場合）。 $\sigma_{kij} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}$, τ_{kij} , α_1 (or α_2) を与えなければならない。 $\langle \sigma_{kij} \partial X_k / \partial x_j \rangle$ は構成則として与える。 τ_{kij} は“平均空間におれるレイノルズ・ストレス”で、これを決定するためには乱流モデルが必要である。 α_k は平均化によって現れる重要な変数である。固相の圧力の代わりに、 α_k を未知量とすることが多い。固相の圧力は液相の圧力と関係づける。

これらを定めるのはいずれも簡単な問題ではない。一つの対策は式(2.13),(2.14)をそれぞれ $k=1$ と2について加え、

$$\langle \sigma_{1ij} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \rangle + \langle \sigma_{2ij} \frac{\partial X_2}{\partial x_j} \rangle = 0$$

を仮定して相互干渉項を除くことである。新たに、変数

$$\rho_m = \sum \alpha_k \tilde{\rho}_k, \quad \rho_m u_{mi} = \sum \alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{u}_{ki} \quad (2.15)$$

を導入すると、それぞれ次式が得られる。

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_{mi}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \rho_m u_{mi}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_{mi} u_{mj}}{\partial x_j} = \sum \left(\frac{\partial \alpha_k (\sigma_{kij} + \tau_{kij})}{\partial x_j} \right) - \tau_{Di} + \sum \alpha_k \tilde{\rho}_k b_i \quad (2.17)$$

ここに、 $\tau_{Di} = \sum (\partial(\alpha_k \rho_k w_{ki} w_{kj}) / \partial x_j)$, $w_{ki} = \tilde{u}_{ki} - u_{mi}$

式(2.16), (2.17)に従うシステムは、二流体モデルから見た混合体モデルと言われるものである。この場合、 τ_D には、 u_{1i} , u_{2i} が含まれているから、厳密には $k=1$ または2の一方の方程式が必要であり、相互干渉項は除かれない。そこで、 τ_D を適当にモデル化して除く。最も簡単なものは τ_D さらには τ_{kij} を無視したもので均質モデルと呼ばれる。一流体モデルは、 τ_D , τ_{kij} を σ_{ij} に含ませたものと考えられる。

2.3 粒子～流体モデル

これは、固体粒子をそのまま「粒」として扱い、液相は連続体の支配方程式に従うようにモデル化するものである。この場合、支配方程式として次のようなものが適用されている。

粒子相：

$$(m + m_v) dv_i / dt = F_i + f_i \quad (2.18)$$

流体相：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho b_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - [f_i] \quad (2.20)$$

ここに、 m は粒子の質量、 m_v は仮想質量、 v_i は粒子速度、 F_i , b_i は体積力、 ρ は流体の密度、 u_i は流体の速度、 σ_{ij} は応力テンソルである。 f_i は粒子～流体間の相互作用であり、粒子濃度が小さく、粒子の存在が流体の構成則に影響を与えない場合には次式で与えられる。

$$f_i = \int_A \sigma_{ij} n_j dA \quad (2.21)$$

ここに、 A は粒子の表面全体、 n_j は法線ベクトルである。この場合には、式(2.20)の $[f_i]$ は0である。 σ_{ij} には流体相の構成則がそのまま採用される。一方、粒子濃度が大きくなり、粒子の流体相に与える影響が無視できなくなると、相互作用の構造は複雑になる。現状においては、二流体モデルの場合と同様な方法によって導かれ、これは次のように与えられている。

$$[f_i] = \langle -\sigma_{ij} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \rangle \quad (2.22)$$

ここに、 p は粒子と流体との界面における圧力、 X_k は相関数(汎関数)、 $\langle \rangle$ は中間尺度を用いた平均操作を意味する。実際の計算に当たっては、 $[f_i]$ として粒子抗力が採用されている。

3. 支配方程式から見た固液混相流研究

3.1 浮遊砂流

浮遊砂流は固液混相流の代表的なものであるが、固相と液相の相互作用や固相の応力構造をモデル化することが困難なために、必ずしも混相流として厳密に議論されてきたわけではない。ここでは、これまでの浮遊砂流の研究を一流体モデル、二流体モデルおよび粒子～流体モデルという立場から見てみよう。

(1) 一流体モデルによる解析例

浮遊砂流において、カルマン定数や抵抗係数が濃度とともに変化することは多くの実験により明らかにされている⁸⁾。このような流水構造の変化特性は、浮遊砂流を一流体と見なして次のような乱れエネルギー平衡方程式に基づいて説明されている^{9),10),11)}。

$$\tau(du/dy) = D + \rho(\gamma - 1)w_0gC \quad (3.1)$$

ここに、 τ :せん断応力、 u :流速、 D :粘性によるエネルギー散逸、 ρ :水の密度、 γ :砂粒子の比重、 w_0 :沈降速度、 g :重力加速度、 C :濃度である。この式で右辺第2項が砂粒子を浮遊させるために必要なエネルギーを表わしている。日野¹⁰⁾は、乱流構造の変化を乱れの加速度方程式により解析し、式(3.1)と連立してカルマン定数の変化を議論し、Itakuraら¹¹⁾は、粒子と流体の相互作用によって消費されるエネルギーをMonin-Obukhov長を使って式(3.1)に追加して検討している。このようなモデルを使って、カルマン定数の変化や流速分布が説明されている。しかし、これらの研究ではエネルギーの散逸の内部構造を詳細に議論しておらず、今後この点について詳細な議論が必要である。

(2) 二流体モデルによる解析例

浮遊砂流を固相と液相の二流体として扱った場合、たとえばMcTigue¹²⁾によると液相および固相の運動方程式は次式のようなものである。

液相:

$$\rho_f(1-C)\left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial t} + u_{fj}\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}((1-C)\sigma_{fij}) + \rho_f(1-C)b_i - f_i \quad (3.2)$$

固相:

$$\rho_s C \left(\frac{\partial u_{si}}{\partial t} + u_{sj} \frac{\partial u_{si}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (C \sigma_{sij}) + \rho_s C b_i + f_i \quad (3.3)$$

ここに、 ρ_f :液相の密度、 ρ_s :固相の密度、 u_{fi} :液相の流速、 u_{si} :固相の流速、 σ_{fij} :液相の応力、 σ_{sij} :固相の応力、 f_i :液相と固相の相互作用力である。支配方程式はこれらの式と両相の質量保存則からなるが、方程式系を閉じるためには $f_i, \sigma_{fij}, \sigma_{sij}$ を与えなければならない。しかし、固相内の応力構造や固相と液相の相互作用を詳細にモデル化したような研究は少なく^{12),13)}、現時点では、厳密に二流体モデルとして解析することはできない。したがって、従来、式(3.2)、(3.3)の代わりに、 $v_{pi} = u_{fi} - v_{oi}$ という仮定を用いて濃度の拡散方程式を導いている。ここに、 v_{pi}, u_{fi} :固相および液相の平均流速、 v_{oi} :固相の沈降速度である。しかし、河床という境界を有する場における浮遊粒子の一つの軌跡の中で、浮遊粒子の鉛直方向の平均速度は0であるにもかかわらず $v_{pi} = u_{fi} - v_{oi}$ とすると $-v_o$ になり、この仮定には問題があるものと考えられる。このような点を改善したり拡散係数を適切に求めるためには、 $f_i, \sigma_{fij}, \sigma_{sij}$ を評価して解析しなければならない。

(3) 粒子～流体モデル

浮遊砂流を粒子～流体モデルとして扱う場合の支配方程式は、乱流中の浮遊粒子の運動方程式で

あり、これまで Tchen¹⁴⁾ の式が一般に適用されている。この支配方程式を確率的な外力を与える流体のモデルの中で解き、統計的な処理をすれば粒子流体モデルのフレームが閉じる^{15),16),17)}。支配方程式の適用性は実験との比較により検証されているので、乱流構造をいかにモデル化し、浮遊粒子と流体との相互作用や浮遊粒子同士の衝突をいかに取り入れるかが問題である。従来この点に関して、乱れの作用時間を一定としたり、流体粒子の運動に一次マルコフ過程を適用するなど、乱流構造を単純化しているし、浮遊粒子と流体および浮遊粒子同士の相互作用はこれまで考慮されておらず、どの研究も一方向モデルにとどまっている。とくに高濃度の条件に対しては二方向モデルの開発を進めてゆく必要がある。

3.2 掃流砂流

掃流砂に関する従来研究を、第2章で説明した解析モデルという観点から見直してみると、その大半は粒子～流体モデルの範疇に属し、わずかに江頭らによる研究^{4),6)}だけが一流体モデルとしての取り扱い方をしている。また、二流体モデルに属する研究は著者らの知る限りなされていないようである。以下では、従来の研究を、その依拠した支配方程式あるいは想定した考え方がどのようなものであったに焦点を当ててレビューし、現状を明確にするとともに、今後の掃流砂研究が向かうべき方向について考えていく。

(1) 粒子～流体モデルによる解析

掃流砂の濃度が比較的希薄であるという条件下では、移動する土砂粒子相互間の interaction が顕著でなく、また、土砂混入に伴う流れ場の変化が微小であるとの考え方から、掃流砂流を粒子・流体モデルにより解析されることが多い。これは、水の流速場を求め、その中を単一の土砂粒子がどのように運動するかを知ることで、掃流砂全体の輸送量を予測しようとするものである。

a. 流れ場の取り扱い:

流れ場の扱いに関しては、移動土砂と水流との interaction をどの程度考慮に入れるかにより、One Way, One and Half Way, Two Way Model と分けて考えることができる。

掃流砂混入による流れ場への影響を考慮に入れない One Way Model によるものがほとんどである。この場合には、流れ場を清水流として扱い、流速分布は対数則に従うとしており、第2章で示した流れ場の支配方程式を解くことを省略している。このような扱いは、掃流力が限界掃流力に近い領域では有効であり、しかも解析が極めて容易であることからしばしば用いられる。一方、流れへの影響を簡単な形で取り込んだのが One and Half Way Model である。これは、平衡状態の Saltation を伴う流れを対象にエネルギー・バランスという観点から、Sekine and Kikkawa¹⁸⁾ により実験事実に基づいて提案されたものであり、エネルギー的に平衡状態にある掃流砂流では、土砂は Saltation 中に水から受けたエネルギーを河床面との衝突の際に消費することで平衡状態を保ち、水流は、この土砂への供給エネルギーの分だけ清水流よりエネルギー勾配の大きな流れに変化していると考えた。ここでは、依然として流速分布を対数則で近似するものとし、エネルギー勾配の変化を相当粗度高さの変化として考慮することで処理している。このモデルでは、予め想定した流れ場の中で単粒子の土砂の運動を解析し、河床面との衝突の際のエネルギー消費量を算出した上で、流速分布を更新していくという繰り返し計算となるため、One Way Model に比べて、計算は煩雑にならざるを得ない。なお、参考までに、 τ^* が 0.1 程度までは One Way と One and Half Way Model で顕著な計算結果の差は見られないようである。さらに、掃流砂と流れとの interaction を流れ場の計算に陽に反映させようとするのが Two Way Model であり、最近、中川・辻本・後藤¹⁹⁾ により研究されている。これは、第2章で説明した full set の流れの支配方程式を解くもので、より厳

密な扱いと考えることもできる。しかし、肝心の interaction term の評価方法や、これを支配方程式へ body force の形で入れてよいかなど、前報で指摘したような問題がある。将来、Two Way 的な考え方でモデル化していくことになるか否かの議論とは別に、interaction term をどのように考えていくべきかについては、今後十分な議論を要する。

b. 掃流砂量:

掃流砂に関する研究を、古い順に、第1世代 (Stochastic Model: Einstein²⁰⁾、佐藤・吉川・芦田²¹⁾)、第2世代 (Sliding Model: 芦田・道上²²⁾、Engelund and Fredsoe²³⁾)、第3世代 (Saltation Model: 中川・辻本²⁴⁾、関根・吉川^{25),26)}、Wiberg and Smith²⁷⁾、Anderson and Haff²⁸⁾) のように分けてレビューをしていくことにするが、第1,2世代の研究は運動に関する情報が乏しいこともあり、正に掃流砂量を予測することに主眼がおかれていた。これに対して、第3世代では、近年のコンピュータの汎用化・高速化という事情を背景に、第二章で示した粒子についての質点系の運動方程式を直接解くことで運動軌跡を解析できるようになったため、運動特性そのもののより深い理解が得られるようになった。しかし、最近解析モデルの過剰な細分化に対して、しっかりとした将来の見通しが示されていないとの声もあり、これを掃流砂量予測という本来の目的にどう反映させていくかについてしっかり考える時期に来ている。

さて、単位幅当たりの掃流砂量 q_B は、掃流層内の土砂の平均移動速度 $\bar{u}_p$ と土砂の体積濃度 V_t の積として、次式により求められる。

$$q_B \equiv V_t \times \bar{u}_p \quad (3.4)$$

そこで、上記の各世代の研究では、掃流層内の土砂の平均移動速度 $\bar{u}_p$ と土砂の体積濃度 V_t をどのような支配方程式に基づいて定式化したかについて、以下に詳述し、支配方程式の検討に代えることにする。

まず、掃流層内の土砂の平均移動速度 $\bar{u}_p$ について見てみよう。第1世代の佐藤・吉川・芦田²¹⁾ は、掃流層内の土砂の平均移動速度 $\bar{u}_p$ は経験的に摩擦速度に比例すると考え、 $\bar{u}_p = \beta u^*$ とすることで流れ方向への質点系の運動方程式を解くことを省略している。また、第2世代の芦田・道上²²⁾ は、滑動形式の土砂移動を想定し、定常状態の力の釣り合い式

$$0 = \frac{1}{2} \rho C_D A_p |u_b - u_p| (u_b - u_p) + \rho R V_p g \sin \alpha - \mu \rho R V_p g \cos \alpha \quad (3.5)$$

に基づき、 $\bar{u}_p$ を次のように誘導した。

$$\bar{u}_p = f(z_b) \sqrt{RgD} \times (\sqrt{\tau^*} - \sqrt{\tau_c^*}) \quad (3.6)$$

ここに、 D は粒径、 R は土砂の水中比重、 μ は動摩擦係数、 α は水路の縦断方向傾斜角、 R は土砂粒子の水中比重 ($= \sigma_s - 1$) である。また、 $f(z_b)$ は土砂に作用する流速と摩擦速度との比を表す関数である。なお、式 (3.5) の右辺第3項が移動土砂と河床との摩擦の項であり、ここでは揚力の影響は考慮されず、土砂移動の主たる原因を抗力としている。このように、第2世代では、土砂の移動速度を質点系の力の釣り合い式に基づいて算出しており、この点に第1世代からの大きな進展があった。さらに、第3世代では、Saltation 形式の土砂移動を想定し、第2章で示した質点系の運動方程式を直接解くというシミュレーションを行うため、土砂の移動特性についてはより深い理解が得られ、移動速度については、たとえば、

$$\bar{u}_p = \alpha \sqrt{RgD} \times \left(\frac{u^*}{w_o} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_c^*}{\tau^*}} \right) \quad (3.7)$$

のように定式化された¹⁸⁾。ここに、 $\alpha = 8.0$ である。

次に、土砂の体積濃度 V_t について考える。第一世代の佐藤・吉川・芦田は、土砂の移動の原因が揚力にあるとし、鉛直方向の力の釣り合いから、揚力による作用が重力に打ち勝つことで流送土砂濃度が維持されるとの考えから、 V_t を以下のように求めている。

$$V_t = \frac{A_e \times \int_{p_c}^{\infty} p f(p) dp}{\rho(\sigma_s - 1)g} \quad (3.8)$$

ここに、 σ_p は揚圧力 p の標準偏差、 p_c は移動限界時の揚圧力、 A_e は揚圧力が有効に働く面積である。また、 ρ は水の密度、 σ_s は土砂の比重である。なお、その際に揚圧力の変動を確率論的に取り扱っており、これが Stochastic Model と呼ばれる所以である。この考え方は、単一粒子を取り扱う粒子～流体モデルの枠組みではなく、二流体モデルにおける固相の扱いと考えるべきであろう。すなわち、これは、二流体モデルの固相についての鉛直方向の支配方程式で、移流項と拡散項を無視し、重力項と圧力項とが釣り合うとした扱いに相当するものとなっている。

第2世代の芦田・道上は、いわゆる Bagnolds²⁹⁾ の仮説に依拠し、いわゆる一流体モデルにおける流れ方向の式を導入した。すなわち、掃流層内の土砂混じりの流体塊についての流れ方向の運動量式

$$\tau + \rho R g V_t \sin \alpha - \mu \rho R g V_t \cos \alpha - \tau_c = 0 \quad (3.9)$$

に基づき、 V_t を導いている。しかし、式 (3.5) と (3.9) という独立ではない2本の式が用いられている。

第三世代の Saltation Model による研究では、未だ明確な形で体積濃度を予測することは試みられておらず、この意味では第二世代以降顕著な進展は見られていない。これは、Saltation Model で単一の土砂粒子の流送過程を解析することが比較的容易であったのに対し、移動土砂濃度あるいは個数については、河床表面に露出している土砂粒子の不規則な配列や移動粒子の河床粒子群との不規則衝突といったランダムなファクターの影響が強いため、この影響を極めて簡易的に取り扱ってきた従来のモデルでは十分な精度で予測できなかったためである。この点に関しては、今後の研究により、不規則な河床表面近傍で生じている粒径スケールの現象がより詳しく理解されるようになれば、同一の支配方程式に基づく一連の運動の解析の結果として、移動土砂濃度も評価できるようになると考える。なお、One and Half Way および Two Way Model では、土砂混入に伴う流れへの影響を見積もる際に V_t を知る必要があるが、これについては Saltation Model とは独立に与えており、本来閉じた系の中で行われるべき解析が、実際にはそうならないというのが現状である。

なお、第三世代の研究の延長上で、複数粒子を同時に追跡することにより、希薄濃度というモデルの制約条件を少しでも広げようとする中川・辻本・後藤ら³⁰⁾の研究や、Bed Material Load を同一の質点系の運動、粒子・流体モデルの範疇で一括して解析しようとする関根・小川田³¹⁾の研究が進められているが、これについてはここでは付記するにとどめる。

(2) 一流体モデルによる解析

掃流砂の濃度が高くなるにつれて、土砂粒子相互間の接触の機会も増えるばかりか、その周囲の水流も清水流とは異なるものとなり、粒子～流体モデルでは解析できなくなる。江頭ら^{4),6)}は、土石流・泥流に関する一流体モデルによる研究の成果を、掃流砂流に拡張し、掃流層厚さの推定式ならびに掃流層内の流速分布を導き、これらに基づいて掃流砂量式を導いている。しかし、適用領域等に関する議論が十分行われていない。

3. 3 混相噴流・プリューム

一般的に混相噴流の数値解析は希薄粒子濃度を対象としており、粒子の存在が流体運動に影響を及ぼさないことを前提とする方程式系が用いられる。この場合には、粒子運動は相間の相対運動を無視して拡散方程式により解析するか、粒子追跡法(粒子～流体モデル)によるかのいずれかとなる。前者においては計算精度が乱流拡散係数の評価法にのみ依存することから、最近では後者が多用される傾向にある。加えて、粒子追跡法において乱流拡散の効果を導入するために、確率論的モデルが種々提案されている状況にある。同モデルでは、平均流場の相互作用に加えて、モンテカルロ法により統計的に有為な数のサンプルの運動軌道を求めることにより、粒子の乱流拡散を評価する。乱流場においては確率論的モデルの使用が必須であることは、多くの研究成果により既に常識となっている。

混相噴流や混相管路流に対する各種モデルの適用性については Faeth³²⁾ に詳しい。統計的モデルの優位は粒子濃度が希薄な場合、つまり粒子混入が流体運動に影響を及ぼさないような場合に限定される。なぜならば、粒子から流体乱流へのフィードバックを考慮しなければならないようなケースでは、集合体としての粒子挙動などを考慮することが必要となり、平均的な粒子拡散分布だけでは議論できなくなることが予想されるからである。こうしたことを解決するために、LESと粒子追跡を組み合わせた方法³³⁾も提案されている。

玉井ら³⁴⁾は、静水中を粒子群が連続的に沈降する粒子プルームに対して二流体モデルによる数値解析を行っている。ここでは、粒子群の落下により誘起される流動場による乱流拡散の影響が大きいことから、これを基礎方程式中で考慮している。混相流に関するレイノルズ方程式を誘導するために、二流体モデルの基礎方程式を時間平均することになる。

二流体モデルの基礎方程式の誘導過程における空間あるいは時間平均は「中間尺度」の平均化といわれる。中間尺度とは多数の粒子を含む空間、あるいは多数の粒子が通過する時間のことである。一般に、中間尺度内での変動成分の相関については無視することになり、これが二流体モデルの対象とする最小の時間空間単位となる。既往の二流体モデルを概観すると、層流状態の粘性応力項 $\alpha_k \mu_k (\partial u_{ki} / \partial x_j + \partial u_{kj} / \partial x_i)$ (α_k は k 相の濃度) 中の μ_k は第 k 相の分子粘性係数であるとされている。しかしながら、多数の粒子が入るように時空間平均された基礎方程式において単相と同じ粘性係数が用いられて良いものか、あるいは「中間尺度」が分子粘性を考慮できるような大きさのものか、等の疑問が生じる。つまり、時空間平均することにより単相の構成則がそのまま利用できるかどうかは検討を要することになる。例えば、希薄粒子濃度のように、粒子間距離が非常に大きい、あるいは粒子が時折しか通過しないような場合、また粒径が大きい場合について、「中間尺度」をいかに考えるべきかは問題である。この中間尺度の定義は非常に曖昧なものであり、それによって基礎方程式の意味合いや用いるべき構成方程式も種々変化する。

混相流に関するレイノルズ方程式を誘導するためには、この「中間尺度」は乱流を表現する時間空間スケールよりずっと小さいと仮定して、平均量と乱流変動に分離して、時間平均を行うことになる。このような方程式には、濃度と速度変動成分の勾配などに関する新たな乱流相関項が生じることになり、これらに対する構成方程式が必要となる。これらの項に関し、玉井らは Elghobashi et al.³⁵⁾ の計算法を踏襲して、単相流に関して開発された完結方法をそのまま用いている。

二流体モデルによる解析例は、噴流・プリューム以外にも多く見られる。例えば、Abou - Arab and Roco³⁶⁾ は管内固液混相流を対象に数値解析を行っている。また、清水ら³⁷⁾ による柱群を含む流れの解析に用いられた支配方程式系も二流体モデルの適用の特殊な例の一つである。

4. 結語

固液混相流の支配方程式の構造とその適用例について検討した。本研究を通して常に議論の対象となった課題とその展望を記し、結語とする。

(1) 一流体モデルは、適用に際して粒子径や粒子濃度などの制約は厳しいものの、支配方程式の数学的表現とその物理的意味は明確である。そのため適用例も多く、例えば、志村、日野、板倉・岸らの浮遊砂を含む流れの構造を議論した古典的な研究や、土石流、泥流、さらには掃流砂等の流れの解析に適用されている。

構成則の一般性という観点からこのモデルを見ると、システムのエネルギー散逸構造については運動学的条件等を直感的に定めてこれを議論している段階にある。より一般性を高めるためには、粒子～流体の相互作用や個々の相におけるエネルギー散逸機構、およびその表現法に関する研究が必要である。

(2) 二流体モデルは、固相と液相それぞれ独立な支配方程式から出発し、二つの相の境界を含むごく薄い領域に汎関数を導入して、ある領域（中間尺度）にわたる平均操作から得られたものである。第3章で紹介したように、最近多くの適用例が見られ、それぞれ成果が発表されている。

このモデルにおいては、相互作用が支配方程式および構成則にどんな形で取り込まれるかが重要であるが、ここで紹介した方法によれば、相互作用はbody forceの形式で支配方程式に現れている。換言すれば、これは式(2.17)に見られるように、相互作用はエネルギー散逸機構（構成則）には影響を与えないという結果であって、その物理的な解釈はかなり難しい。これはシステムの作り方、あるいは平均操作の仕方に起因するものと思われるので、今後、こういった観点から問題を見直す必要もあろう。

(3) 粒子～流体モデルは、粒子は質点、弾性体、あるいは非弾性体からなる「粒」の支配方程式に従うとするものである。粒子濃度が小さく、相互作用がOne Wayの条件を満たすような領域では、式(2.18)の f_i としてどこまでの現象を考慮するのかといった課題はあるが、第3章で紹介したように多くの成果があげられている。相互作用がTwo Wayの場合においても、上述の(2)のような課題は残されているものの、掃流砂流などの解析に適用されるようになってきている。

混相流の支配方程式は衆目の認めるような段階にまで確立されていない状況にあって、その構造を見直してみようというのが本研究の第一の目的であった。本研究のメンバーの中においても、これに関する統一見解は未だ得られておらず、本論の主題は全く的外れである恐れもある。皆様の忌憚のない御意見を寄せて頂ければ幸甚である。

本研究は文部省科学研究費（平成5、6年度総合研究(A) 代表者 芦田和男京都大学名誉教授、河川環境管理財団大阪研究所所長）の補助を受けて、水理委員会環境水理部会の共同研究のテーマの一つとして推進しているものである。ここに、記して深謝する次第である。

参考文献

- 1) 芦田和夫・江頭進治・佐々木幹夫・清水義彦・関根正人・玉井昌宏・藤田正治・宮本邦明・森明巨：固液混相流における支配方程式の構造について、水工学論文集、第38巻、pp. 563～570, 1994.
- 2) Miyamoto, K. and Egashira, S. : Mud and Debris Flow, Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, No. SI-2, 1993, pp.1-19.

- 3) 芦田和男・山野邦明・神田昌幸：高濃度流れに関する研究(2)、京都大学防災研究所年報、29 B-2, 1986, pp.361-375.
- 4) 江頭進治・芦田和男・矢島啓・高浜淳一郎：土石流の構成則に関する研究、京都大学防災研究所年報、32 B-2, 1989, pp.487-501.
- 5) 宮本邦明：Newton流体を含む粒子流の流動機構に関する基礎的研究、立命館大学学位論文、1985, pp.39-72.
- 6) 江頭進治：掃流砂と土石流における力学の統一化、土砂移動現象に関するシンポジウム、1992, pp.57-69.
- 7) Drew D.A. : Mathematical model of two-phase flow, Ann.Rev.Fluid Mecha,1983
- 8) Vanoni, V.A. : Transportation of suspended sediment by water, Trans., ASCE, 111, pp67-102, 1946.
- 9) 志村博康：流砂のある水流の諸特性、土木学会論文集、第46号、1957.
- 10) 日野幹雄：固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化、土木学会論文集、第92号、1963.
- 11) Itakura, T. and Kishi, T. : Open channel flow with suspended sediments, J. of Hydraulics Div., Proc. ASCE, Vol.106, HY8, pp.1325-1343,1980.
- 12) McTigue, D.F. : Mixture theory for suspended sediment transport, Proc. ASCE, Vol.107, HY6, 1981.
- 13) 福嶋祐介・福岡捷二：浮遊砂を含む流れの二相流的取扱いに基づく流速分布と濃度分布、第23回水理講演会論文集、pp.139-144、1979.
- 14) Hinze, J.O. : Turbulence, the Second Edition, McGraw-Hill, 1975.
- 15) Yalin, M.S. and Krishnappan, B.M. : A probabilistic method for determining the distribution of suspended solids in open channels, Proc. 1st Symp. on River Mechanics, Bangkok, 1973.
- 16) 芦田和男・藤田正治：平衡および非平衡浮遊砂量算定の確率モデル、土木学会論文集、第375号、pp. 107-116、1986.
- 17) 大本照憲・平野宗夫・石丸英伸：開水路流れにおける粒子運動の数値シミュレーション、第31回水理講演会論文集、pp.593-599、1987.
- 18) Sekine, M. and Kikkawa, H. : Mechanics of Saltating Grains, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, pp. 536 ~ 558, 1992.
- 19) 後藤仁志・辻本哲郎・中川博次：PSI-セルモデルによる Saltation 層の解析、海岸工学論文集, 39, pp. 266 ~ 270, 1992.
- 20) Einstein, H. A. : The bedload function for sediment transportation in open channel flows, Tech. Bulletin No. 1026, USDA, Soil Conservation Service, 1950, 1-71.
- 21) 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男：河床砂礫の掃流運搬に関する研究(1)、建設省土木研究所報告、98, 1958.
- 22) 芦田和男・道上正規：移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究、土木学会論文報告集、206, pp. 59 ~ 69, 1972.
- 23) Engelund, F., Fredsoe, J. R. : A sediment transport model for straight alluvial channels, Nordic Hydrology, 7, 293-306, 1976.
- 24) 中川博次・辻本哲郎：掃流粒子の saltation の確率過程論的解析、土木学会論文集、345, pp. 83 ~ 90, 1984.
- 25) 関根正人・吉川秀夫：掃流砂の流送機構に関する研究、土木学会論文集、351, pp. 69 ~ 75, 1984.
- 26) 関根正人・吉川秀夫：掃流砂の停止機構に関する研究、土木学会論文集、399, pp. 105-112, 1988.
- 27) Wiberg, P. L. and Smith, J.D. : Model for calculating bedload transport of sediment, Journal of Hydraulic

Engineering, ASCE, 115(1), pp. 101 ~ 123, 1989.

28) Anderson, R. S. and Haff, P. K. : Simulation of eolian saltation, Science, 241, pp. 820 ~ 823, 1988.

29) Bagnolds, R. A. : The flow of cohesionless grains in fluids, Philosophical Trans. Royal Society of London, 249, 1957.

30) 中川博次・辻本哲郎・後藤仁志・渡辺幹広：粒子間衝突を考慮した掃流層の数値シミュレーション、水工学論文集、37, pp. 605 ~ 640, 1993.

31) 関根正人・小川田大吉：掃・浮遊砂が混在する流れ場における土砂の運動に関する研究、水工学論文集、38, pp. 597 ~ 602, 1994.

32) Feath, G. M. : Recent advance in modelling particle transport properties and dispersion in turbulent flow, Proc. ASME-JSME Therm. Engng. Conf., Vol. 2, pp. 517-534, 1983.

33) 灘岡和夫・八木宏・二瓶泰雄：高濃度固液混相流に関するLES乱流モデルの開発、水工学論文集、第38巻、pp. 577-584, 1994.

34) 玉井昌宏・村岡浩爾・下屋陽八郎：k- ϵ 乱流モデルによる粒子プルームの数値解析、海岸工学論文集、第40巻、pp. 1071-1075, 1993.

35) Elghobashi, S., Abou-Arab, T., Rizk, M. and Mostafa, A. : Prediction of the particle laden jet with a two-equation turbulence, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 10, No. 6, pp. 697-710, 1984.

36) Abou-Arab, T. W. and Roco, M. C. : Solid Phase Contribution in the Two-Phase Turbulence Kinetic Energy Equation, ASME, Journal of Fluid Engineering, Vol. 112, pp. 351-361, 1990.

37) 清水義彦・辻本哲郎・中川博：直立性植生層を伴う流れ場の数値計算に関する研究、土木学会論文集、No. 447/ II-19, pp. 34-44, 1992.