線形理論にもとづく蛇行流路の共振深掘れ解析

Analysis on experimental data of bed topography in meandering channels
with resonance condition based on linear theories

* ** ***

中村 健作 . 長谷川 和義 . 鳥谷部 寿人

By Kensaku NAKAMURA , Kazuyoshi HASEGAWA and Toshihito TOYABE

Resonance states of bed in a meandering channel were discussed by applying linear theories of Parker and Hasegawa to many experimental data of bed topography obtained in channels with changing the radius of curvature and the meander length. It was found from the analysis that (1) data of amplitude of a fundamental bed wave in the resonance condition given from the linear theories is not very different from those in other conditions, (2) bell shaped frequency response of wave amplitude is seen in both the experimental data and theories under conditions of no bars formation as well as bar formation, and (3) the linear solution for phase lag between a channel plan form and the bed wave agrees with experimental data fairly well.

Key Words: meandering channel, bed topography, resonance,
linear theory, data analysis

1. まえがき

蛇行流路において交互砂州の成長作用と流路の湾曲効果が一致したとき、いわゆる共振状態が現れる。両者の相互作用を流路状態の性質として意識的に取り上げたのは木下(1961)であり、Engelund(1975)も固定砂州と交互砂州の共存について示唆している。しかし、共振に対する言及はない。共振現象を初めて見いだし問題化したのは、Blondeaux and Seminara(1985)とStruiksma et al.(1985)がほぼ同時であり、前者は蛇行流路内の底面変動に関する線形化方程式中に振幅が無限になる共振点が現れることを指摘し、後者は直線部から湾曲部への流入点で「過洗掘」が発生することを実測と数値解析から示した。その後、Parker and Johannesson(1989)は、非常に見通しのよい線形化式を導き、これらの現象が空間的振動方程式によって記述説明できることを示した。彼らの解析によれば、蛇行内の底面変動は砂州発生に関わる自由振動系に湾曲効果が外力として作用する強制振動問題に帰着し、湾曲流入部の「過洗掘」は外力にステップ関数が加わるときの過渡応答問題となる。これに先立って長谷川(1983)は非常によく似た線形解析を進めたが、共振現象を指摘するまでにはいたらなかった。

ところで、線形方程式による限り共振波長における応答振幅は無限大になり、実際に矛盾する。Seminara and Tubino(1990)は、共振波長と共振川幅水深比(特異点)周りの摂動解による非線形解析を進め、現実に近い振幅応答を得ている。この研究の背景にColombini et al.(1987)による砂州波高の有限振幅理論、Tubino and Seminara(1990)による交互砂州と固定砂州の相互干渉に関する非線形理論などがあるが、展開式の項数が膨大でありかなり難解なものになっている。形成機構の見通しという点では線形解に分がある。

* 学生員 北海道大学工学研究科土木工学専攻 (060 北海道札幌市北区北13条西8丁目)
** 正会員 工博 北海道大学 工学部 土木工学科 (060 北海道札幌市北区北13条西8丁目)
*** 正会員 開発土木研究所 河川研究室 (063 北海道札幌市豊平区平岸1条3丁目)

開発土木研究所の鳥谷部、渡邊、清水（当時）ら（1993, 1994）は、共振現象が実際の河川管理に重要な意味をもつものか否かを確認するため、波長、最大曲率、幅水深比をさまざまに組み合わせた80種の実験をおこなうとともに非線形項をすべて生かした準3次元の数値解析を進め、特性をまとめている。これらによれば共振波長の近傍に河床深掘れの増大がみとめられるが、通常見られる掘れに比して極端に深くなることはないようである。

本論文は、上述の開発土木研究所における実験（以下「実験」と呼称）結果に対して解釈の容易な線形理論を「かぶせ」、共振状態発現の仕組みを再吟味するとともに線形解の適用限界を明かにしようとするものである。

2. 実験における平衡底面形状の波数特性

実験は R/B （最小曲率半径/流路幅） $=5.0$ および 10.0 の二通りの蛇行形状シリーズについておこなわれ、それぞれにおいて λ/B （蛇行波長/流路幅） $=6.28 \sim 31.4$ の間で8種類に波長を変えた流路が用いられている。幅は30 cmに固定され、曲線形にsine-generated curveがあたえられている。使用砂は平均粒径0.056 cmの一種のみである。これらの流路に対し、流量と勾配を調節して交互砂州の非発生、発生領域を満たすような B/H （流路幅/平均水深） $=10, 20, 30, 40$ の4種の通水がなされた。およそ平衡状態に達した後、河床読み取り装置にて水面形状と底面形状が計測された。

得られた底面形状データに対し、横断方向基本波長を流路幅の2倍に流下方向基本波長を1蛇行長にそれぞれとって2重フーリエ解析をおこなうと、横断方向モード数 i および流下方向モード数 j につき、 $(i, j)=(1, 1), (2, 0), (3, 1), (2, 2)$ などの振幅成分の卓越が共通して認められる（長谷川ら（1993, 1994））。これは従来長谷川（1983）による実験結果と同じであるが、Garciaら（1993）の指摘（ $(1, 1)(2, 0)(1, 2)(1, 3)$ が卓越）とはやや異なっている。これらの主要振幅の水深無次元値につき全実験結果を比較すると、 $(2, 0)$ 波と $(3, 1)$ 波は流路形状によらずほぼ共通した性質を示し、主に B/H の増大とともにその振幅が増加する。これに対し、 $(2, 2)$ 波は流路形状に強く影響され λ/B に応じて変化するが、 B/H によっても変わる。最大の振幅をもつ $(1, 1)$ 波はやはり λ/B に対応して変化するが、 $\lambda/B=10 \sim 20$ において大きな値を示しこれからはずれると減少する。この波は、流路湾曲の影響が直接反映するという点で特別の意味をもっている。すなわち、線形論に立つ限り共振系をなすのはこの成分波だけであり以後この波について論ずるが、その前に全体の概念を図-1において整理しておく。

蛇行流路内の $(2, 0)$ 波および $(3, 1)$ 波の振幅 $(A_{20})_F, (A_{31})_F$ はほとんど曲がりの影響を受けず、直線流路の $(A_{20})_T, (A_{31})_T$ とあまり変わらない。しかし、 $(A_{22})_F$ は湾曲の間接的影響を受けて $(A_{22})_T$ とは異なる値を示す。蛇行流路内の $(1, 1)$ 波の振幅 $(A_{11})_B$ は、曲がりの影響を受けた砂州の $(A_{11})_F$ の他に直接的な曲がりの作用による $(A_{11})_C$ が重なって現れる。共振が問題になるのは $(A_{11})_F$ に対してである。線形理論の上では、曲がりの影響と砂州の影響を分けて考えることができ、後に2つの解の線形和をとることができることを表している。

- (T): 直線水路における砂州の振幅成分
 (F): 曲がりの影響を受けた砂州の振幅成分
 (C): 曲がりによる洗掘の振幅成分
 $(A_{20})_T \approx (A_{20})_F, (A_{31})_T \approx (A_{31})_F$
 $(A_{22})_T \neq (A_{22})_F, (A_{11})_B = (A_{11})_C + (A_{11})_F$

図1 振幅成分の概念図

図2 平面および横断座標系の定義

3. 線形理論と共振条件

3-1. Parkerの共振条件

Parkerらは、水深平均を施した流下方向、横断方向の各運動方程式、連続式、流砂連続式、流砂量式から出発して湾曲水路に対する線形化方程式を導き、これを曲がりの直接効果の部分（C-問題）と曲がりの影響を受けた砂州の部分（F-問題）に分割して非常に分かりやすい説明を行っている。このうちの（F-問題）についての線形化方程式を図-2の定義記号に従いながら記述すると以下のようである。

$$ru'_F + 2Pu_F + P_1\eta_F = 0 \quad (1)$$

$$ru'_F - r\eta'_F + \frac{\partial v_F}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

$$rMu'_F + rM_1\eta'_F + \frac{\partial v_F}{\partial n} - \Gamma \frac{\partial^2 \eta_F}{\partial n^2} = -r(M-1)u'_c + r(M_1+1)h'_c \quad (3)$$

$$v_F|_{n=\pm 1} = 0, \frac{\partial \eta_F}{\partial n}|_{n=\pm 1} = 0 \quad (4)$$

ここに、 $r = 2\pi H / (\tilde{\lambda} C_{f0})$; C_{f0} = 平均流の摩擦係数; $(u_F, v_F, \eta_F) = (\tilde{u}_F / \Psi_0 U, \tilde{v}_F / \Psi_0 U, \tilde{\eta}_F / \Psi_0 H)$, $(\tilde{u}_F, \tilde{v}_F, \tilde{\eta}_F)$ = それぞれ流下方向流速、横断方向流速、河床変位の曲がりの影響を受けた砂州による摂動分; $u_c = \tilde{u}_c / \Psi_0 U = n(\tilde{a}_c \cos \phi + \tilde{b}_c \sin \phi)$, $h_c = \tilde{h}_c / \Psi_0 H = (A + F^2)n \sin \phi$, $(\tilde{u}_c, \tilde{h}_c)$ = それぞれ流下方向流速、水深の曲がり自身の影響による摂動分; $(\tilde{a}_c, \tilde{b}_c)$ = 偏倚流速 u_c に関する Engelund (1974) の第2近似解の係数で

$$r, C_{f0} \text{ を含む; } F = \text{平均流のフルード数; } A = \frac{7.51}{\beta} \frac{\chi + 2/7}{\chi}, \chi_1 = \frac{1}{13} \frac{1}{\sqrt{C_{f0}}}, \chi = \chi_1 - \frac{1}{3}, P \approx 1,$$

$$P_1 = 1 + 5\sqrt{C_{f0}}; M = 3/(1 - \tau^* c / \tau^* s_0), M_1 = 2.5\sqrt{C_{f0}}M,$$

$$\Gamma = \left(\frac{H}{B}\right)^2 \frac{1}{C_{f0}} \frac{1 + \alpha^* \mu}{f^* \mu} \sqrt{\frac{\tau^* c}{\tau^* s_0}}, \alpha^* = 0.85, \mu = \text{クーロン係数}, f^* = 1.19 (\mu = 0.43 \text{ に対し}), \tau^* c = \text{無次元限界掃流力}, \tau^* s_0 = \text{平均流に対する無次元掃流力。なお } \phi \text{ は流下方向軸 } \phi \text{ に関する微分を表す。}$$

式(1), (2)および式(3)の右边を0とおいた式系は、直線流路における砂州流れを表す線形化方程式に完全に一致している。違いは式(3)の右边が存在することで、これが曲がりによる砂州の変形効果(強制項)を与えている。これらの式を η について整理し、さらに $n \approx (\pi^2/8)\sin(\pi n/2)$ の近似のもとで $\eta_F = \eta_{Fb} \sin(\pi n/2)$ とおくと(5)式になる。ただし、Parkerらは η に関する展開は行っておらず式(5)は著者らが別途導いたものであるが、岸(1988)がすでに同様の誘導を行い解析に用いている経緯がある。

$$\eta_{Fb} + \frac{r \left\{ M_1 + 1 - \frac{P_1}{2P}(M-1) + \frac{\pi^2 \Gamma}{8P} \right\}}{\frac{r^2}{2P}(M_1+1)} \eta_{Fb} + \frac{\frac{\pi^2}{4} \Gamma}{\frac{r^2}{2P}(M_1+1)} \eta_{Fb} = \frac{8}{\pi^2} \frac{D_1 + \frac{r}{2P} D_2}{\frac{r^2}{2P}(M_1+1)} \cos \phi + \frac{8}{\pi^2} \frac{D_2 - \frac{r}{2P} D_1}{\frac{r^2}{2P}(M_1+1)} \sin \phi \quad (5)$$

$$D_1 = r \{ (M_1+1)(A+F^2) - (M-1)b_c \}, D_2 = r(M-1)a_c$$

さて式(5)は空間的な強制振動の式形をなしており、その共振条件は左辺第三項の係数が強制振動の波数(=1)に一致することである。これより共振波数が次のように定まる。

$$\Gamma_{res} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2P\Gamma}{M_1+1}} \quad (6)$$

真の共振状態は減衰項における係数がゼロになる状態(これは砂州の発達が停止する中立条件に等しい)において現れるので、Parkerらは、

$$\Gamma_{res} = \left(\frac{2}{\pi} \right) \left\{ (M_1-1)P_1 - 2P(M_1+1) \right\} \quad (7)$$

をもその条件として提案し、これら2式をもって共振条件としている。しかし、(7)式の Γ は与えられた実験条件のもとで常に実現するわけではなく、通常(7)式とは異なる値をとる。

3-2 Parkerの線形解と実験値の比較

式(5)より η_{Fb} を解くと次の式が得られる。

$$\eta_{Fb} = \frac{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}{\sqrt{(K_1 \cdot 1)^2 + (K_2 - 1)^2}} \sin(\varphi + \varphi_1) \quad (8)$$

$$\text{ただし、} K_1 = \frac{2P(M_1+1) - P_1(M-1) + \frac{1}{4}\pi^2\Gamma}{r(M_1+1)}, \quad K_2 = \frac{\pi^2 P\Gamma}{2r^2(M_1+1)}, \quad E_1 = \frac{8}{\pi^2} \frac{2PD_1 + rD_2}{r^2(M_1+1)},$$

$$E_2 = \frac{8}{\pi^2} \frac{2PD_2 - rD_1}{r^2(M_1+1)}, \quad \phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{E_1}{E_2}\right), \quad \phi_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{K_1}{K_2-1}\right) + \phi_0$$

これを η_F に与え、湾曲2次流による洗掘深形状

$$\eta_0 = -\frac{\pi^2}{8} A \sin \phi \cdot \sin \frac{\pi}{2} n \quad (9)$$

を加えると、線形蛇行洗掘形状は、

$$\frac{\tilde{\eta}_0}{H} = \Psi_0 \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{8} A\right)^2 + \frac{E_1^2 + E_2^2}{K_1^2 + (K_2-1)^2}} - \frac{\pi^2}{4} A \sqrt{\frac{E_1^2 + E_2^2}{K_1^2 + (K_2-1)^2}} \cos \phi_1 \times \sin(\phi + \phi_2) \sin \frac{\pi}{2} n \quad (10)$$

ただし、

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{E_1^2 + E_2^2}{K_1^2 + (K_2-1)^2}} \sin \phi_1}{-\frac{\pi^2}{8} A + \sqrt{\frac{E_1^2 + E_2^2}{K_1^2 + (K_2-1)^2}} \cos \phi_1} \right\} \quad (11)$$

実測底面形状の(1,1)波の振幅 A_{11} は、式(10)によって比較が可能である。その際、減衰項の係数の動きによって振幅の変化が異なるものと考えられるので、各実験値を B/H の異なるケースごとに分けて比較を試みることにする。図-3～図-6は、横軸に r/r_{res} を、縦軸に A_{11}/H を取りこれらの比較結果を示したものである。理論上の真の共振状態は、 $K_1=0$ の起こる $B/H=30$ のケースにおいて現れており、理論振幅が無限大になっている。しかし、実験値は共振波数を中心にした山形分布を示すもののその最大値は1程度であり、他のケースに比べてほとんど違いない。一方、理論上砂州の発達条件($K_1 < 0$)にある $B/H=40$ のケースでは、共振波数に頂点をもつ有限高の山形が現れており実測値もその近傍にある。興味深いのは理論上非砂州条件($K_1 > 0$)にある $B/H=10$ 、20のケースであり、いずれも共振波数近傍に頂点をもつ有限山形分布をなして実測点もその傾向にしたがっている。この事実は、危険な河床深掘れの生ずる蛇行波長が、従来考えられていたような砂州形成と湾曲深掘れの同調時のみ現れるのではなく、非砂州状態においても現れることを示すものである。ただし、Parkerらの理論は共振現象の本筋を残すために流れの加速度項や横断面勾配などに対して大胆な省略が施されており、砂州の卓越波長が現れないなど砂州議論がやや大まかなものになっている。実際、実験の観察では $B/H=20$ のケースで弱い砂州の発生が認められており、このケースの実験値は砂州と曲がりの共存状態のものと考えられる。これらの疑問を明確にするため、次に長谷川の理論解との比較を試みることにする。

図3 Parkerの理論値と
実験値との比較

図4 Parkerの理論値と
実験値との比較

図5 Parkerの理論値と
実験値との比較

図6 Parkerの理論値と
実験値との比較

3 - 3 長谷川の理論解と実験値の比較

長谷川(1983)の理論は、Parkerらの理論で省略されている $\frac{\partial v}{\partial s}$ や $\frac{\partial \xi}{\partial n}$ を残した展開をおこなっており、砂州の卓越波数が存在する内容になっている。ただし、Galerkin法による近似解法が用いられているほか、2次流の表現も異なっている。この解法では η を直接求めているため、強制振動式にみられるような明瞭な解釈は難しくなる。紙数の都合で結果のみを記すと、(1, 1)波に関して以下ようになる。

$$\frac{\tilde{\eta}_B}{H} = \sqrt{\frac{K^2 + \Lambda^2}{\kappa^2 + \lambda^2}} \cos\{\omega(s - \sigma)\} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (12)$$

ただし、

$$\kappa = M \left(b_{11} - \frac{5}{3} \sqrt{Cr_0} \right) + \frac{\pi}{2\gamma\omega} c_{11}, \quad \lambda = Ma_{11} - \frac{\pi}{2\gamma\omega} d_{11} - \frac{\pi^2}{4\gamma^2\omega} \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_k \mu_{\tau_0}}}$$

$$K = \frac{\Psi_0}{\gamma} \left(Mb_{11}' - \frac{\pi}{2\gamma\omega} c_{11}' \right), \quad \Lambda = \frac{\Psi_0}{\gamma} \left(Ma_{11}' - \frac{\pi}{2\gamma\omega} d_{11}' + \frac{\pi}{2\gamma\omega} N_{11} \right), \quad \omega = \frac{2\pi H}{\tilde{\lambda}}$$

$s = H$ で無次元化した流れ方向軸、 N_{11} = 2次流強度に関わる係数で14を与えた。 a_{11} , $a_{11}' \sim d_{11}$, d_{11}' などは、 ω , M , γ , F , Cf_0 の複雑な関数である。他は前出の記号と同じである。

式(6)の共振条件に対応する条件は、 $\lambda = 0$ から得られるが、 A_{11} が ω の高次項を含むため、これを満たす ω を解析的に導くのは難しい。したがって、ここでは ω を直接横軸にとって式(12)の振幅を実験値と比較する。図7～図10はこれらの結果を示すものである。これらの図より以下の事が分かる。共振条件が $B/H=20.0$ のケースにおいて現れており、前述の場合と異なっている。これは砂州成長の中立線がモデルの違いで動いたためであるが、先述のように実験では弱い砂州の発生を見ており、図-8の長谷川解の方が実態に近いものと考えられる。すなわち、 $B/H=20$ のケースにおいて線形理論における真の共振状態が現れているものといえる。しかし、実験点は山形を描くものの高々1.0までの値しかとらず、他に比して特別な変化は現れていない。注目の非砂州状態にある $B/H=10$ のケースについてみると、長谷川解においても山形変化が認められ先述の見解の妥当なことが確認される。ただし、ピーク位置が実験値からややずれている。この傾向は、長谷川解にとって砂州の成長域にあたる $B/H=30, 40$ のケースにおいても現れている。砂州の成長率にかかわるパラメータ (λ) が大きくなるほど理論ピークの値が小さくなるのはParker解と同様であり、一見矛盾しているように感じられる。このことについては後に考察する。

図7 長谷川の理論値と
実験値との比較

図8 長谷川の理論値と
実験値との比較

図9 長谷川の理論値と
実験値との比較

図10 長谷川の理論値と
実験値との比較

4. 線形解における位相と実験値

Parker解における(1,1)波の位相は、式(11)の ϕ_2 によってあたえられる。これを実験値と比較する。ただし、実験は蛇行曲頂を原点とし、深掘れ位置の下流側へのずれが正、上流側へのずれが負となるように測っているほか、深掘れを正としているので理論の方も同様の表現に改める。すなわち理論における位相 ϕ_2 を $\phi_3 = \pi - \phi_2$ とおき実験値と比較する。その結果を図-11～図-14に示す。非砂州の $B/H=10$ のケースを除き、おおむね一致しているものといえる。非砂州の場合、深掘れ部がかなり下流に下り、しばしば変曲点付近から時として凸岸頂点にまで及ぶことがある。実験値にはそれが現れているが、理論線は変曲点止まり($\pi/2$ 程度)になっている。

砂州が伴うようになると深掘れ部は凹岸曲頂近くにとどまることが多いが、 $B/H=20, 30, 40$ のケースで理論値・実験値ともにその傾向を示している。砂州河床の場合、共振波長より長波長の蛇行流路において深掘れ部が曲頂の上流側に現れることが注目される。この結果は実験値によっても裏づけられている。

図11 A_{11} 波の曲頂からの位相差

図12 A_{11} 波の曲頂からの位相差

図13 A_{11} 波の曲頂からの位相差

図14 A_{11} 波の曲頂からの位相差

5. 考察

再び式(5)に戻って考察を進める。先述のように、この式の減衰項の係数 K_1 は砂州の発達率を表すパラメータに他ならない。したがって真の共振状態が生ずる $K_1=0$ の状態は、河床が擾乱に対して中立安定であることを意味する。外力が加わった場合に一切抵抗することなくこれに従う状態、と考えることができる。

係数 K_1 が正の場合、河床は擾乱に対して安定であり外力による変形にもブレーキがかかる。しかし、応答振幅がある波数においてピークをとることには変わりがなく、共振系としての性質は流砂のある蛇行河床に本来的に存在するものといえる。また、減衰項の係数が正の場合、河床の自励的な波に対応する式(5)の同次解（自由振動）は距離的に減衰するので、解は特解である式(8)のみを考えることですむわけである。

一方、減衰項の係数 K_1 が負の場合には、河床は不安定であり砂州の発生成長が始まる。この場合の同次解は距離とともに値を増し、式(8)の特解はこれに覆われて意味がなくなることになる。すなわち、厳密にはこのケースに線形理論を適用することができない。砂州領域の実験値が見かけ上式(8)の特解部分に従うのは、砂州の成長が他の要因（非線形効果）によって停止し、同次解部分を落としたのと同様な事態が生ずるためといえるかもしれない。位相解の適用性の良さから見てこの解釈はある程度妥当なように思われる。この場合の河床

は、砂州形成に向かう独自の成長システムが機能しており、外力による変形をも抑止するものといえようか。

6. まとめ

最大無次元曲率、無次元蛇行波数、流路幅水深比を種々に組み合わせた80例の蛇行流路実験の平衡底面形状データに対して線形論の立場から解析を加え、次の結論を得た。

- (1)底面を構成する主要波のうち、(2, 0)波および(3, 1)波の振幅は曲がりの影響を顕著に受けず、流路幅水深比など砂州の成長率にかかわるパラメータにしたがって変化する。(1, 1)波および(2, 2)波の振幅は主に無次元蛇行波数とともに変化し、極大値をとる波数域がある。線形論に立つ場合、共振系が問題になるのは(1, 1)波の中の曲がりの影響下にある砂州(曲がりの直接作用による洗掘分を除いた部分)に対してである。
- (2)Parkerおよび長谷川の線形解は、ともに砂州成長率がゼロになる条件(中立安定)のもとで共振波数を有するが、実測振幅値はこの条件においても他とあまり変わらない。
- (3)振幅が共振波数の周りで山形を描いて変化する傾向は非砂州条件でも起こり、流砂のある蛇行河床で生ずる本来的な性質と考えられる。実験結果もこれに一致する。
- (4)砂州の成長条件のもとでは線形解は本来成り立たなくなるが、特解部分に対する実験値の対応は良好である。非線形効果による砂州の成長停止が、このことの背景にあるようである。
- (5)線形式の位相解と実測(1, 1)波の位相の対応もかなり良好である。しかし、線形解の成立性に問題のある砂州域で一致性がよく、成立性に問題のない非砂州域で逆に悪くなっている。

7. あとがき

本論は、線形論をもとにしたことから必然的に(1, 1)波のみを対象にしたが、他の成分波をくorumて議論するためにはどうしても非線形解析が必要になる。その際、砂州の形成にかかわる問題と曲がりが及ぼす非線形効果は一応分けて考えることができそうである。今後の課題としたい。

参考文献

- (1) Blondeaux, P. and Seminara, G.: A unified bar-bend theory of river meanders, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 112, pp. 363-377, 1985.
- (2) Colombini et al.: Finite-amplitude alternate bars, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 181, pp. 213-232, 1987.
- (3) Engelund, F.: Flow and topography in channel bends, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, vol. 100, HY11, 1631-1648, 1974.
- (4) 長谷川 和義: 蛇曲流路における流れと平衡底面形状に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 338, pp105-114, 1983.
- (5) 長谷川 和義, 中村 健作: 共振深掘れに着目した系統蛇行実験にみられる砂州と強制洗掘の干渉過程, 土木学会北海道支部論文報告集第49号, 1993.
- (6) 長谷川 和義, 中村 健作: 砂州と強制蛇行洗掘が共存する河床地形の干渉過程に着目した波数解析, 土木学会北海道支部論文報告集第50号, 1994.
- (7) 木下 良作: 石狩川河道変遷調査, 科学技術庁資源局資料第36号, 1961.
- (8) 岸 力: 河川の湾曲部における流れと河床地形に関する研究の進展, 第4回日中河川及びダム会議論文集(札幌会議), 建設省河川局, pp23-45, 1988.
- (9) Marcelo, G. and Yarko, N.: Dynamics of sediment bars in straight and meandering channels: experiments on the resonance phenomenon, *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, Vol. 31, 1993.
- (10) Parker, G. and Johannesson, H.: Observations on several recent theories of resonance and over-deepening in meandering channels, *River Meandering, Water Resources Monograph 12, AGU*, Ch. 12, pp. 379-415, 1989.
- (11) Seminara, G. and Tubino, M.: Risonanza non lineare in meandri di ampiezza finita Parte prima: Theoria, Atti XXII Convegno di Idraulica e Costruzione Idrauliche, Cosenza, 1990.
- (12) Struiksma et al.: Bed deformation in curved alluvial channels, *J. Hydraulic Res.*, 23(1), pp. 57-59, 1985.
- (13) 鳥谷部. 清水. 渡邊: 共振深掘れの発生条件に関する移動床蛇行水路実験, 土木学会北海道支部論文報告集第49号, 1993.
- (14) 鳥谷部. 清水. 渡邊: 共振深掘れの発生条件に関する移動床蛇行水路実験, 土木学会北海道支部論文報告集第50号, 1994.