3次元移動座標系を用いた非線形スロッシング現象の数値解析

Numerical Prediction of 3D Non-Linear Sloshing with Body-Fitted Coordinates

牛島 省*

Satoru Ushijima

A numerical prediction method has been developed for three-dimensional flows having oscillating free-surfaces. On the basis of the arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) method, the profiles of free-surfaces are represented by three-dimensional body-fitted coordinates, which are regenerated in each computational step using cubic spline functions. Navier-Stokes equations are discretized on a Lagrangian scheme in the transformed space with sufficient numerical accuracy. The present computational technique has been applied to three-dimensional non-linear sloshing in a cylindrical tank. As a result, it is concluded that the reasonable numerical results are obtained by the present method.

Keywords: non-linear sloshing, free surface, arbitrary Lagrangian-Eulerian, 3D body-fitted coordinates

1. はじめに

本研究では、非線形スロッシング現象に見られるような、大規模な自由液面の変動を伴う3次元流動を数値解析するための手法について検討を行った。

このような自由液面の数値解析手法としては、速度ポテンシャルを仮定して、その境界値問題として現象を取り扱う方法がこれまでに数多く提案されてきた[1]~[5]。一方、このようなポテンシャルモデルでは適切に表現できない流体粘性の効果などを正確に扱えるナビア・ストークス(NS)方程式に基づき、自由液面を有する流れをより厳密に数値解析するという方法も報告されている。NS方程式を用いる方法は、以前は膨大な計算時間が必要であるというのが通説だったが、計算機的能力が向上した今日においては、計算時間が解法上の重大な欠点となることは少ないと考えられる。これらの解析例としては、2次元場を対象としたもの[6]~[9]や、少数ではあるが、3次元場を対象とするもの[10],[11]がある。

本研究では、自由液面の変動が発生する場合においても、液面下の3次元流動を精度良く解析するため、NS方程式を用いた数値解析手法を作成した。自由液面に対しては、ALE法に基づき、各計算ステップごとに3次元境界適合座標系を生成して、非定常的に変化する形状を表現する。このため、液面形状を含めた解析領域全体が、写像空間中では等メッシュ間隔の計算点から構成される単純な矩形領域として表現されるので、オイラー的な計算点を利用するVOF法等の解析手法と比較して、液面近傍での境界条件等の設定が容易に行え、しかも解析精度を高く保てるという利点がある。また、NS方程式は、写像空間中で著者が提案したLagrangeスキーム[12]上で離散化され、特に移流項は3次元空間中で局所的な3次スプライン内挿[12]を行って3次精度で評価されるものとした。

本研究では、この解析手法を3次元円筒容器内の非線形スロッシング現象へ適用し、既往の解析例や実験結果等と比較した。

* 正会員 工博 (財)電力中央研究所 水理部流体グループ (〒270-11我孫子市我孫子1646)
E-mail : ushijima@criepi.denken.or.jp

2. 数値解析手法

2.1 3次元境界適合座標系の生成

時間の経過とともに変形する自由液面に対して、境界適合座標系を各計算ステップごとに生成して、計算点の再配置を行う。ALE法では、ラグランジュ的なリゾーニングとは異なり、計算点の移動速度は流体の速度とは必ずしも一致しなくてよい。このため、ある時刻に与えられた自由液面形状を境界条件として、以下の関係式を用いて座標生成が行われる。

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_p \partial \xi_q} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_p}{\partial x_j} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_q}{\partial x_j} \right)^* + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \right)^* + P_m \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} \right)^* = 0 \quad (1)$$

ここで、 x_i と ξ_m は、それぞれ物理空間と写像空間上の3次元の空間座標である。(1)式中では、*印の付いた項は3次スプライン関数を利用した微分計算法を用いて求められる[12]。

2.2 運動方程式

本研究では、スロッシング発生時の流体の粘性効果などを正確に扱うため、流体の運動方程式としてNS方程式を用いる。写像空間上に変換された同方程式は、以下のように表される。

$$\frac{D u_i}{D t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + F_i + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \right) \quad (2)$$

ここで、 u_i は x_i 方向の流速成分であり、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 ν は動粘性係数である。 F_i は外力で、ここでは重力加速度とスロッシング時に外部から加えられる加速度を考えるものとする。(1)式による座標生成の際に、流体の移動速度とは必ずしも一致しない計算点の移動が生ずるため、(2)式中のラグランジュ微分オペレータ D/Dt は次式で定義されるものとなる[13]。

$$\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + (U_m - U_{0m}) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \quad (3)$$

ここで、 t と τ はそれぞれ物理空間と写像空間の時間であるが、本研究ではこれらは等しく扱っている。また、 U_{0m} および U_m は、それぞれ計算点の移動速度と流体の流速の反変成分で、次式で与えられる。

$$U_{0m} = \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (4a)$$

$$U_m = u_i \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (4b)$$

写像空間上に変換された運動方程式は、ラグランジュスキーム上で次式のように離散化される[12]。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left[-PG_i^{n+1} + F_i^n + \left(\frac{3}{2} D_i^n - \frac{1}{2} D_i^{n-1} \right) \right] \Delta t \quad (5)$$

ここで、 PG_i と D_i は、それぞれ運動方程式の圧力項と拡散項であり、 Δt は1ステップの計算時間間隔である。また、'および'が付いた項は、それぞれ n および $n-1$ ステップにおける、上流点位置での値であることを示している。(5)式右辺第1項は、移流項であるが、これは3次元空間中における局所的な3次スプライン内挿[12]により計算されるものとした。

2.3 圧力の解析方法

圧力を計算する際には、SMAC法[14]と同様に、まず圧力が静水圧で与えられると仮定して流速の推定値を求め、次に連続式が満足されるように、圧力を補正するという2段階の計算を行うものとした。静水圧分布を仮定した場合の圧力項を PG_i^* とおくと、 PG_i^* を用いて、次式から流速の推定値 u_i^* が得られる。

$$u_i^* = u_i^n + \left[-PG_i^* + F_i^n + \left(\frac{3}{2} D_i^n - \frac{1}{2} D_i^{n-1} \right) \right] \Delta t \quad (6)$$

(5)式から(6)式を辺々引くことにより、以下の関係が得られる。

$$u_i^C = -PG_i^C \Delta t \quad (7) \quad \text{ここに} \quad u_i^C = u_i^{n+1} - u_i^* \quad (8a) \quad PG_i^C = PG_i^{n+1} - PG_i^* \quad (8b)$$

$n+1$ ステップで流体の連続性が満足されるものとすれば[15]、次の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial PG_i^C}{\partial x_i} \Delta t = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad (9)$$

これより、補正圧力項 PG_i^C は、流速の推定値 u_i^* から求められることになる。得られた補正圧力項を(7)式に用いて、補正流速 u_i^C が計算され、これを(8a)式に適用することにより、求める $n+1$ ステップの流速成分が得られることになる。また、 $n+1$ ステップの圧力は、(8b)式から計算される。

2.4 自由液面における境界条件

(1)自由液面の動的境界条件

自由液面における動的境界条件は、写像空間上において次式のように表される。

$$\frac{D^* h}{Dt} = u_{s3} \quad (10)$$

ここで、 h は静止時の自由液面位置などの基準位置から、変動する自由液面までの高さである。添字Sは自由液面における値を意味し、特に u_{s3} は直交座標系の鉛直上方に向かう流速成分である。(10)式左辺の微分演算子は、次式で表される2次元場のラグランジュ微分演算子である。

$$\frac{D^*}{Dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} (U_{sm} - U_{osm}) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \quad [m=1,2] \quad (11)$$

運動方程式等と同様に、ラグランジュスキーム上で(10)式を離散化し、次式から h を求めるものとした。

$$h^{n+1} = h^n + u_{s3}^n \Delta t \quad (12)$$

上式右辺第1項は、離散化した運動方程式の移流項と同様、局所3次スプライン内挿[12]を用いて求める。

(2)自由液面における流速境界条件

自由液面においては、液面上部の気体と液面との間に作用する粘性応力が無視できると仮定すれば、次のような2つの応力条件が成立する。

$$n_i \sigma_{ij} n_j = S k \quad (13a) \quad \tau_i \sigma_{ij} n_j = 0 \quad (13b)$$

ここで、 S は表面張力係数であり、 k は自由液面の曲率である。なお、以下に示す計算では、表面張力は無視できると考え、(13a)式右辺を0とおいた。また、 n_i と τ_i は、それぞれ自由液面における法線方向および接線方向に向かう単位ベクトルの成分である。(13)式中で、 σ_{ij} は次式の応力テンソルである。

$$\sigma_{ij} = -p_0 \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (14)$$

ここに、 μ は粘性係数、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 p_0 は大気圧であるが、本研究では $p_0 = 0$ と仮定した。計算では、これらの境界条件を写像空間中に変換し、自由液面における流速境界条件等を定めた。

2.5 数値解析のフロー

以上の数値計算の主な手順は、図1のように表される。境界適合座標系の生成が毎ステップごとに行われることを除けば、計算のフローは著者が作成した局所洗掘現象の数値解法[13]のそれとほぼ同様である。計算では、最初に初期条件あるいは再計算のための計算条件として与えられた液面形状に適合するような3次元の境界適合座標系が生成され、これに基づいて流体計算が進められる。この流体計算では、まず支配方程式中の移流項や拡散項がラグランジュスキーム上で算定され、上述したように、圧力が静水圧で与えられた場合の流速の推定値 u_i^* が求められる。次に連続式が満足されるように、補正された圧力項 PG_i^c が収束計算により求められ、これより $n+1$ ステップの流速成分が得られる。そして、新しい時刻の液面形状が計算され、再びこれに適合するような3次元境界適合座標系が生成されて、以上と同様の計算手順が所定の時刻まで繰り返される。

図1 数値計算のフロー

3. 3次元円筒容器内のスロッシング現象への適用

3.1 水平加振時の非線形スロッシング現象

図2に、計算の対象とする円筒容器と直交座標系、主な記号を示した。図中に表されているように、 R と H はそれぞれ容器の半径と静穏時の水深である。ここでは、 $R = H = 0.5m$ とし、容器に対して、次式で示される x_1 方向の加速度を与えた。

$$a_1(t) = -X_1 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (15)$$

ここで、振幅 X_1 を $10mm$ 、角周波数 ω を 5.85 rad/s とした。この角周波数は、ポテンシャル理論から得られる(1,1)モードのスロッシングの固有振動数に相当する。図3は、加振方向両端における液面変位の時系列を表したものである。時間の経過とともに、変位が増大し、平衡液面から上の変位が下の変位よりも大きくなっており、非線形なスロッシング運動が発生している。この結果は、Kasugaら[16]が行った境界要素法による3次元のスロッシング計算結果とほぼ同様なものとなっているが、液面振幅は本計算の結果の方がわずかに大きくなった。

また、振幅 X_1 と角周波数 ω をそれぞれ $2mm$ 、 10.22 rad/s とした場合に生ずる、(1,2)モードの非線形スロッシング現象が生じた際の自由液面形状の変化を図4に示した。

図2 円筒容器と座標系

図3 円筒容器の加振方向両端における液面変動

図4 解析により得られた(1,2)モードのスロッシング現象の液面形状

3.2 鉛直加振時の非線形スロッシング現象

線形理論に基づく数値解析手法では、鉛直方向の加速度が加わる場合のスロッシング現象を適切に扱うことが困難である[17]。ここでは、 $R=0.1m$ 、 $H=0.2m$ の円筒容器内の液体に、以下の(16)式で与えられる初期液面形を設定し、(17)式で表される鉛直方向の加速度を加えた。

$$h = H + 0.02R \cos\left(\frac{\pi r}{R}\right) \quad (16)$$

$$a_z(t) = -X_3 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (17)$$

ここで、変位 X_3 と周波数 $\omega/2\pi$ は、それぞれ $2.0mm$ および $6.168s^{-1}$ とした。鉛直方向の加振時の1次共振振動数は、水平方向のそれの2倍になる[17]。ここで設定した計算条件は、ポテンシャル理論から得られる水平方向加振時の(0,1)モードの固有振動数の2倍の値であり、鉛直方向加振時の(0,1)モードの固有振動

数に相当する。

図5に、円筒容器中心と容器壁面近傍の液位変動の時系列を示した。時間の経過とともに、円筒容器中心の液位変化が大きくなっているが、低下時の波高よりも上昇時の波高変化が大きくなるという非線形なスロッシング現象が生じていることが示されている。図6は、円筒容器中心軸を含む鉛直断面内の水面形状を示すもので、Dodgeら[18]の実験結果と比較したものである。計算結果としては、2組の水面形状が図中に示されているが、実験結果と同様に、時刻1.1および1.26秒の液面形は時刻1.26秒の最大波高(10.6 mm)で、また同様に時刻1.75および1.92秒の液面形は時刻1.92秒の最大波高(33.5mm)でそれぞれ正規化されている。本研究の計算結果と実験結果はよく似たものとなっているが、計算結果では、時間の経過とともに、中心の上昇時の波高が大きくなるという非線形な傾向が強まるものとなった。

図5 鉛直加振時の液面変動の時系列

図6 鉛直加振時の液面形状
(●Dodgeら[18]の実験結果)

4. おわりに

本研究では、スロッシング現象発生時における3次元流体の挙動を精度良く表現するため、NS方程式を支配方程式とし、ALE法に基づき各計算ステップごとに境界適合座標系を生成して、非定常的に変化する液面形状を扱う数値解析手法を提案した。この解析手法の適用性を確認するため、3次元円筒容器内の液体に水平および鉛直加振を与えた場合の非線形スロッシング現象の計算を行い、既往の解析例や実験結果等と比較して、妥当な結果が得られることを示した。

本研究の数値解析手法の特徴の1つは、従来スロッシング現象に対して提案されてきたポテンシャルモデルと異なり、粘性の効果を含めた流動現象をより厳密に解析できる点にあるので、今後は流動場が加振された場合などの複雑なスロッシング現象へ適用を進めたいと考える。

参考文献

- [1] T. Nakayama and K. Washizu, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.15, 1980. [2] T. Nakayama and K. Washizu, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.17, 1981. [3] 大山巧, 土木学会論文集, No. 417, 255-264, 1990. [4] 田中宏明・中山司, 日本機械学会論文集 B, Vol.57, No.538, 1991. [5] 阿部和久・神尾忠弘, 土木学会論文集, No.489, 1994. [6] B. Ramaswamy, J. Comput. Phys., 90, 1990. [7] T. Okamoto, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.11, 1990. [8] 木倉宏成・武口達・沢田達男・棚橋隆彦, 日本機械学会論文集 B, Vol.57, No.540, 1991. [9] 田中伸和・福原華一, 水工学論文集, 1996. [10] K. H. Chen and R. H. Pletcher, AIAA J., Vol.31, No.5, 1993. [11] 米山望, 電力中央研究所研究報告, U95063, 平成8年. [12] S. Ushijima, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.19, 1994. [13] S. Ushijima, J. Comput. Phys., 125, 1996. [14] A. A. Amsden, J. Comput. Phys., 6, 1970. [15] F. H. Harlow and J. E. Welch, Phys. Fluids Vol.8, No.12, 1965. [16] I. Kasuga, R. Sugino and N. Tosaka, Boundary Element Methods, (eds. M. Tanaka, M. Du Q. and T. Honma), Elsevier Science Publishers, 1993. [17] Abramson, H.N. NASA, SP-106, 1966. [18] T. Dodge, D. D. Kana and H. N. Abramson, AIAA J., Vol.3, No.4, 1965.