溶接残留応力を考慮したき裂先端特異場の特性テンソル法による評価*

齊藤 啓***, 平島 禎****, 麻 寧緒*****, 村川 英一*****

Crack singular field evaluation with characteristic tensor considering residual stress*

by SAITO Kei***, HIRASHIMA Tei****, MA Ninshu***** and MURAKAWA Hidekazu*****

To accurately evaluate the fracture behaviors and fatigue life of welded structures, it is necessary to consider welding residual stress in addition to the stress produced by the applied loads. Characteristic tensor, which has a proportional relationship to stress intensity factor (SIF), is one new approach to evaluate stress singularity caused by a crack. Characteristic tensor is the tensor which is easily calculated by integrating stresses in a simple sphere zone around a crack tip using coarse mesh without special limitation in the mesh division, even under general case like mixed-mode loading conditions. In this study, the stress singularity in the welded plate is evaluated by characteristic tensor and its effectiveness with the residual stress field is verified. Firstly, the residual stress distribution in butt welded plates is calculated by finite element method. Secondly, the singular stress field is obtained by introducing a straight single crack in the welded plates. A crack with different lengths and the crack tip located at different residual stress states are considered in reproducing the stress singularity. In each case, SIF is estimated from the characteristic tensor calculated from stress distribution nearby a crack tip and compared to those from the green function or virtual crack extension method. Additionally, the stress singularity caused by the external load is evaluated in the same manner. The estimated SIFs with coarse mesh are in good agreement with the conventional methods. The results suggest that characteristic tensor provides a practical approach to evaluating stress singularity in welding structures.

Key Words: Characteristic tensor, Stress intensity factor, Stress singularity, Residual stress, Finite element method

1. 緒 言

溶接構造物に存在するき裂の進展挙動は、溶接残留応力に大きく影響されることが知られている¹⁾。そのため、例えば高精度な溶接構造物の破壊現象や寿命予測のためには、構造物の自重などの死荷重による応力や外部からの活荷重による応力に加えて、残留応力を考慮した評価が重要となる。溶接残留応力場を得るためには、試験および計測を用いる方法、並びに、数値計算を用いる手法がある。残留応力場を試験および計測から決定する場合、中性子回折による内部残留応力場の推定方法²⁾、X線回折法による表面残留応力場の推定法³⁾および固有ひずみに基づく測定法^{4,5)}がある。Cut compliance methodは、コンパクトテンション試験片を用いたひずみの計測結果から破壊力学パラメーターを算出する手法である^{6,7)}。得られた破壊力学パラメーターを重み関数法に適用することにより、残留応力場を同定する。本手法では、対象としている形状に適合した重み関数の同定が必要である。様々な形状に適合する多くの関数を用意されているものの、適用対象は限られる⁸⁾。一方、有限要素

法を代表とする数値計算による予測手法では、熱解析と構造解析を連成させることにより、溶接による残留応力場を計算する。任意の形状における複雑な応力場を高効率かつ高精度で取得できるため、良く利用されている手法である。有限要素法は、溶接構造物のき裂進展挙動を評価するためにも有用である。溶接により発生する残留応力分布を引き継いだ応力解析から、き裂進展挙動の評価に必須な破壊力学パラメーターを導出のための様々な方法が提案されている^{9,10)}。これらの手法の計算精度は高く、多くの研究において妥当性が証明されている。一方、これらの手法は計算プロセスが複雑であり、工業界で用いられている汎用数値計算コードへの導入の難易度は高い。また、計算コストも高いため、製品設計への適用を妨げるひとつの要因となっている。数値計算を用いた設計効率の向上のために、より実用的かつ高精度な手法が求められている。

著者らが提案した特性テンソル法^{14,15)}は、き裂先端近傍の無限小領域における平均応力をもとに定義される特性テンソルにより特異場を評価する手法である。特性テンソルは、数値計算から得られる応力場から簡単に算出することができる。特性テンソルの各成分は、与えられたき裂長さや載荷荷重に対して確定値となる性質を持ち、応力拡大係数やJ積分値といった破壊力学パラメーターに対応したテンソル量である。そのため、信頼性の高い特異場の評価が可能となる。また、各テンソル成分が混合モード下の応力拡大係数に対応しており、多軸応力下における特異場の評価に適用することができる。このように、特性テンソル法は既存

*受付日 2020年8月14日 受理日 2021年5月12日

**正 員 大阪大学大学院 Member, Graduate School of Engineering, Osaka University

***正 員 株式会社 JSOL Member, JSOL Corporation
**** 株式会社 JSOL JSOL Corporation

*****正 員 大阪大学 接合科学研究所 Member, Joining and Welding Research Institute, Osaka University

の有限要素解析コードとの親和性も高く、比較的簡単に破壊力学パラメーターに基づいた特異場の評価が可能である。き裂進展解析の製品設計への適用拡大に、大きく貢献できる可能性がある。

本研究では、固有ひずみの概念に基づく有限要素法を用いて突き合わせ溶接の残留応力分布を模擬し、溶接残留応力場中のき裂に特性テンソル法を適用し、き裂進展評価に必要な破壊力学パラメーターの推定を行う。具体的に、残留応力や外荷重により形成される特異場の応力拡大係数を特性テンソルから算出し、解析解または他の手法で得られた値と比較することにより、残留応力場における本手法の有効性と優位性を示す。

2. 特性テンソル

2.1 特性テンソルの定義

本章では、特性テンソルの定義および応力場からの導出方法について示す。特性テンソルは、き裂先端近傍の無限小領域で定義されるテンソル量である。等方弾性体である無限平板中の長さ $2a$ のき裂と座標系を、Fig.1 のように想定する。き裂先端から無限小の半径 $r=R$ 内の領域 Ω_R における平均応力 μ_{ij} は以下のように表される。

$$\mu_{ij} = \frac{1}{V_{\Omega_R}} \int_{\Omega_R} \sigma_{ij} dV \quad (R \rightarrow 0) \quad (1)$$

ここで、 V_{Ω_R} は領域 Ω_R の体積、 σ_{ij} は Fig.1 に示した座標系に基づく応力成分を示す。特性テンソルは平均応力 μ_{ij} に平均化半径 R の平方根を乗じることによって得られ、応力拡大係数と同じ次元の物理量として定義される。

$$\chi_{ij} = \sqrt{R} \mu_{ij} \quad (R \rightarrow 0) \quad (2)$$

一方、応力拡大係数を用いた以下の式は、き裂近傍の特異応力場を近似する式として広く用いられている¹¹⁾。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta) + T \delta_{1i} \delta_{1j} + O(\sqrt{r}) + \dots \quad (3)$$

ここで、 K_I 、 K_{II} はそれぞれ Mode-I、Mode-II の応力拡大係数、

Fig.1 Single straight crack and associated coordinate system

$f_{ij}(\theta)$ 、 $g_{ij}(\theta)$ は Fig.1 に示した座標系における円周方向の位置を表す θ の関数、 T はき裂に平行な一定応力 (T 応力)、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。応力場の特異性を表す第一項および二項に着目すると、それらの平均から計算される特性テンソルは、与えられたき裂長さと荷重荷重に対して確定値となる。

$$\chi_{ij} = \text{const.} \quad (R \rightarrow 0) \quad (4)$$

従って、特性テンソルは、式(3)で近似されるき裂周辺の特異応力場の評価に適している。

2.2 特性テンソルの性質

特性テンソルは、き裂による特異性の評価に用いられる破壊力学パラメーターと密接に関連するテンソル量である。応力解析結果から特性テンソルの計算を通し、比較的簡単に破壊力学パラメーターを予測することが可能である。応力拡大係数と特性テンソルの関連を示すため、Fig.2 に示す無限平板中のき裂を想定する。Mode-I の変形を想定するため、境界の荷重荷重方向に対して垂直に配置された長さ $2a$ のき裂を考える。き裂の方向に沿った座標系に従うと、応力分布は以下のように表される。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T \delta_{1i} \delta_{1j} + O(\sqrt{r}) + \dots \quad (5)$$

ここで、 $(i,j) \in \{(1,1) (2,2) (1,2)\}$ 、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とすると、 $f_{ij}(\theta)$ はそれぞれ

$$f_{11}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{3}{2} \theta \right) \quad (6)$$

$$f_{22}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{3}{2} \theta \right) \quad (7)$$

$$f_{12}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (8)$$

と表される。式(5)の第三項以降は $r \rightarrow 0$ を考慮すると $O(\sqrt{r}) \rightarrow 0$ となる。また、き裂近傍の応力の対称性を考慮し、式(6)、(7)を円周方向に積分すると以下のように表される。

Fig.2 Single crack in infinite body subjected to uniaxial loading

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{11}(\theta) d\theta = 3.2 \quad (9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{22}(\theta) d\theta = 4.8 \quad (10)$$

一方、式(8)の積分値は0となる。式(1)、(2)の定義に従って計算すると、mode-Iにおける特性テンソルは以下のように表される。

$$\chi_{11} = \sqrt{R} \mu_{11} = 1.6 \sqrt{\frac{8}{9\pi^3}} K_I (R \rightarrow 0) \quad (11)$$

$$\chi_{22} = \sqrt{R} \mu_{22} = 2.4 \sqrt{\frac{8}{9\pi^3}} K_I (R \rightarrow 0) \quad (12)$$

$$\chi_{12} = 0 (R \rightarrow 0) \quad (13)$$

式(11)、(12)は、特性テンソルがmode-I荷重下の応力拡大係数と比例関係となることを示している。応力拡大係数は式(11)、(12)で表される特性テンソル成分を用いて算出する

Fig.3 Dimension of plane plate with butt weld

Table 1 Material properties

Young Modulus [MPa]	Poisson Ratio	Expansion coefficient [K ⁻¹]
2.0×10^5	0.3	1.21×10^{-5}

ことができる。また、式(13)で示される特性テンソルの χ_{12} 成分は、mode-I 荷重下においては0となるが、mode-II 荷重下においては K_{II} と比例関係となる。一方で、特性テンソルの χ_{11} 成分と χ_{22} 成分は、mode-II 荷重下においては0となる¹⁵⁾。このように、特性テンソル法では応力解析結果から得られたき裂周辺の応力分布を積分し、積分半径の平方根を乗じるという比較的簡単な操作のみで、破壊力学パラメータと密接に関連したテンソル量を導出することができる。

3. 溶接残留応力場

3.1 解析モデル

有限寸法の板の突き合わせ溶接を想定した残留応力場を有限要素法により計算するためには、Fig.3に示す解析モデルを用いる。平板の形状はメッシュサイズを最小0.5mmとし、二次元平板要素としてモデル化する。材料特性はTable 1に示す値とし、温度やひずみに依らず一定とする。平板中央において全体座標系Y方向と平行な溶接線を定義し、溶接線上に初期温度200℃を与える。Fig.4には、平板中央の溶接線上に原点を置いた局所座標系におけるx軸方向の初期温度分布を示す。初期温度20℃から定常状態(200℃)に冷却する際の熱収縮ひずみ(固有ひずみ)から残留応力場を熱弾性解析で算出する。Fig.5には、平板全体および溶接線付近のY方向における溶接残留応力分布を示す。

Fig.4 Initial temperature in direction

Fig.5 Residual stress field in the self-balanced condition

3.2 特異要素

き裂先端の特異性支配域における応力場を正確にとらえるため、き裂先端周辺に八節点二次要素に基づいた特異要素を導入する¹⁶⁾。Fig. 6に要素の模式図を示す。本要素では、き裂先端の節点を含む要素辺上の中間節点をき裂先端から要素辺長 $1/4$ の位置に移動することで、変位場をき裂からの距離 r の平方根の関数として補間することができる。これにより、変位を微分して得られるひずみおよび応力場は $1/\sqrt{r}$ の特異性を有することとなり、線形破壊力学に即した特異場を正確に表すことができる。本研究では、要素面内に九点の積分点を設定し、特異場を精度高く表現する。

3.3 き裂の導入

Fig. 5に示した溶接残留応力を有する突き合わせ溶接板にき裂を導入し、残留応力の再分配による特異応力場を得る。き裂は、平板中央の位置に溶接線に対し垂直に設定する。本

研究では、き裂半長 a を 2.5 mm から 15.0 mm とし、計6ケース (C1～C6) のき裂長さを考慮する。Table 2に各ケースのき裂長さを示す。Fig. 7には、残留応力場中のC1 ($a=2.5\text{ mm}$) のき裂を、Fig. 8には、Fig. 5の平板中央の溶接線上に定義した局所座標 x 軸に沿った Y 方向の応力分布とき裂先端の位置を示す。残留応力は、溶接線に対して垂直方向に、き裂から遠ざかるに従い引張から圧縮へ応力状態が遷移している。き裂長さ a が変化することにより、応力状態が異なる位置にき裂先端が配置される。これにより、き裂先端ではそれぞれ性質が異なる特異場が形成される。特異応力場は、Fig. 5に示した応力場を引き継いだ有限要素モデルのき裂に位置する節点を分離してき裂表面を生成し、応力分配後のつり合い状態を求めることで取得する。き裂周辺のメッシュサイズは、 0.5 mm である。Fig. 9には、き裂導入後のき裂周辺の Y 方向応力分布を示す。き裂先端の特異応力場は、溶接線中央の引張応力場によって励起される。そのため、き裂長 a が大きくなりき裂先端が溶接線から離れると、特異場の強さも小さくなる。

Fig. 6 Quadrilateral quadratic isoparametric element

Table 2 Crack length in each case

C1	C2	C3	C4	C5	C6
2.5 mm	5.0 mm	7.5 mm	10.0 mm	12.5 mm	15.0 mm

Fig. 8 Residual stress distribution and crack tip location

Fig. 7 Crack location of C1 in the residual stress field (before stress redistribution)

Fig.9 Crack tip location and surrounding stress distribution after stress redistribution

4. 特性テンソルを用いた破壊力学パラメータの同定

4.1 特性テンソルの計算手法

応力再分配後の応力分布から特性テンソルを算出し、破壊力学パラメータの同定を行う。ここで、Fig.1に示したき裂先端に原点を置き、1方向をき裂進展方向にとった座標系を想定する。特性テンソルは、式(1)、(2)で示した通り、特異性支配領域となるき裂近傍の無限小領域 $\Omega_{r=R \rightarrow 0}$ において定義され、与えられたき裂長さや荷重に対して確定値となる。一方、有限要素法を代表とする数値計算においては、き裂先端の無限小領域の応力場を表現するためには離散化精度を限りなく大きくする必要があるが、計算時間やリソースの制約から現実的ではない。そのため、本来無限小となるべき平均化半径 R は、有限値とならざるを得ない。この場合、式(3)の第三項目以降で示した T 応力や高次項が無視できなくなるため、評価すべき特性テンソルの確定値から乖離が発生する。よって、高精度な特異場の評価には、特性テンソル法の構築理論を有限要素法に適用するための手法が必要となる。そこで本研究では、最小二乗法を利用した補完手法を利用して、無限小領域における固有の特性テンソルを取得する。有限値の領域から式(1)、(2)を用いて算出した特性テンソルから近似関数を求め、 $R \rightarrow 0$ におけるテンソル値を予測する。

有限要素法から得られた応力場から特性テンソルを計算するため、式(1)に従って平均応力を算出する。この時、有限値をとる半径 R の領域内にある積分点の応力を、ガウス求積法を用いて積分する。

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{1}{\bar{A}} \sum_{k=1}^{n_{ip}} (\sigma_{ij} \det J)_k w_k \quad (14)$$

ここで、 $\bar{\mu}_{ij}$ は有限な領域における平均応力成分、 n_{ip} は半径 R 内にある積分点の総数、 σ_{ij} は応力成分、 w_k はガウス求積法を用いて積分する際の離散点にかかる重み、 $\det J$ はヤコビアン、 $\bar{A}$ はガウス求積法により積算した面積を示す。式中で k の指標が付いた変数は、対応する積分点の値であることを示す。式(2)より、特性テンソルは以下のように算出される。

$$\bar{\chi}_{ij}(R) = \sqrt{R} \bar{\mu}_{ij} \quad (15)$$

ここで、 $\bar{\chi}_{ij}(R)$ は半径 R の有限な積分領域から求められた特性テンソルである。特異性支配領域となる無限小半径で定義される特性テンソル χ_{ij} を推定するため、式(15)で算出された有限領域の特性テンソルを以下のように近似する。

$$\bar{\chi}_{ij}(R) = \chi_{ij} + \sum_{m=1}^m \psi_{m,ij} R^{\frac{m}{2}} \quad (16)$$

ここで、 $\psi_{m,ij}$ は半径 R に関する多項式の第 m 番目の項の係数である。最小二乗法により係数を同定し、 $R=0$ における特性テンソルを算出する。

4.2 応力拡大係数の推定

本研究では、まず有限要素法を用いて特性テンソルを計算し、次に式(16)に基づき線形近似関数を用いて $R=0$ における特性テンソルから破壊力学パラメータである応力拡大係数を推定する。なお、有限の半径 R で特性テンソルを計算する場合、 χ_{11} 成分に関しては、 T 応力の作用によって生じる $TR^{1/2}$ の項が無視できなくなることがあるため、線形近

似には不向きである。従って、 χ_{22} 成分を対象とした以下の式によって、無限小領域における特性テンソルを推定する。また、線形近似には、今回対象としたケースにおいて、特性テンソルが平均化半径 R に対しておよそ線形に変化しているとみなせる $R \leq 2.0 \text{ mm}$ の範囲の算出値を用いる。

$$\bar{\chi}_{22}(R) = \chi_{22} + \psi_{1,22}R \quad (17)$$

ここで、 χ_{22} は $R=0$ における特性テンソル値である。特性テンソル成分 χ_{22} および式 (12) の関係を用いて、以下の式より Mode-I の応力拡大係数を算出する。

$$K_I = \frac{1}{2.4} \sqrt{\frac{9\pi^3}{8}} \chi_{22} \quad (18)$$

4.3 残留応力場が生成する特異場の評価

Fig.9 に示した六ケースの応力分布から式 (14), (15) により特性テンソル成分を算出する。算出した特性テンソルから応力拡大係数を推定し、他の手法による予測値と比較することで妥当性を検証する。C1 から C4 については、グリーン関数を用いて解析的に算出した応力拡大係数と比較する。残留応力場中の応力拡大係数は、重み関数法と同様の形として以下の式で表される¹⁷⁾。

$$K_I^G = \int_{-a}^a p(x)g(a,x)dx \quad (19)$$

ここで、 a はき裂半長、 $p(x)$ はき裂面上の圧力分布、 $g(a,x)$ は以下の式で表されるグリーン関数である。

$$g(a,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \quad (20)$$

有限要素法で取得した残留応力分布からき裂面上の圧力分布を抽出し、式 (20) に乗じて対応するき裂長さの範囲で積分することにより、応力拡大係数を算出する。C5 と C6 については、領域積分法¹⁸⁾にて同定した J 積分値から以下の式により変換した応力拡大係数と比較する。

$$K_I^{\text{VCE}} = \sqrt{J} / \sqrt{\frac{1-\nu^2}{E}} \quad (21)$$

Fig.10 には、き裂を中心とした半径 R の有限領域において算出された特性テンソル成分 $\bar{\chi}_{22}$ から式 (18) を用いて変換した応力拡大係数 $K_I(\bar{\chi}_{22})$ と、これらのデータ点を用いて式 (17) による最小二乗法より同定した直線近似関数を、グリーン関数および領域積分法によって求めた応力拡大係数 K_I^G および K_I^{VCE} と併せて示している。特性テンソルから推定した応力拡大係数は、平均応力を算出する半径 R が大きくなるに従い、応力拡大係数の推定誤差は大きくなる傾向にある。これは、半径 R が大きくなると、式 (3) の第四項目以降に示した高次項の影響が大きくなり、無限小領域で定義された特性テンソルとの乖離が大きくなるためであるが、いずれのケースにおいても、 $R \rightarrow 0$ において他の手法から導出した

Fig.10 Estimated stress intensity factor at each radius and the linear approximate function. K_I^G and K_I^{VCE} are the stress intensity factors estimated by green function and virtual crack extension method and shown as constant solid line.

Table 3 SIFs estimated from characteristic tensor method and percentage error

Crack location	SIF for comparison ($\text{N} \cdot \text{mm}^{-\frac{3}{2}}$)		$\chi_{22}(R=0 \text{ mm})$		$\bar{\chi}_{22}(R=2.5 \text{ mm})$	
			K_I ($\text{N} \cdot \text{mm}^{-\frac{3}{2}}$)	Error(%)	K_I ($\text{N} \cdot \text{mm}^{-\frac{3}{2}}$)	Error(%)
C1	K_I^G	1494.4	1503.6	-0.62 %	1572.0	5.19 %
C2		2102.4	2161.3	-2.80 %	2185.8	3.97 %
C3		2050.1	2118.8	-3.35 %	2095.9	2.24 %
C4		1479.3	1499.1	-1.34 %	1500.4	1.43 %
C5	K_I^{VCE}	1107.8	1121.6	-1.25 %	1119.5	1.05 %
C6		-904.9	-900.3	0.51 %	901.7	-0.36 %

応力拡大係数に収束する様子が確認できる。Table 3 には、き裂位置 C1～C6 において、 $R=0.25 \text{ mm}$ における特性テンソル値から推定した応力拡大係数および線形近似関数から推定したき裂先端 ($R=0$) における応力拡大係数を、比較対象となる応力拡大係数との誤差とともに示している。算出した特性テンソル値のうち、最小の半径は $R=0.25 \text{ mm}$ であるが、これは本解析で用いたメッシュサイズ 0.5 mm のおよそ半分の長さである。このときに評価される積分点は、特異要素を用いたため、き裂先端に隣接する四要素に含まれる積分点 $9 \times 4 = 36$ 点のうちき裂先端に近い $3 \times 4 = 12$ 点のみであるが、他の手法を用いた算出値との誤差は最大で 5% 程度である。き裂近傍の 1 要素の評価でも良好に応力拡大係数を予測できており、比較的大きく実用的なメッシュサイズでも十分評価が可能である。線形近似関数より同定した $R=0$ における応力拡大係数の誤差はおおむね 3% 以下であり、さらに精度良く予測できていることがわかる。

Fig. 11 は、C1～C6 における溶接線中心からき裂に沿った方向の各積分点の Y 方向応力の値を示す。また、応力拡大係数から算出した応力特異場 ($\sigma_{YY} = K_I / \sqrt{2\pi(x-a)}$) を破線として示す。いずれのケースにおいても、積分点の応力はき裂先端近傍においては破線に漸近し、き裂先端からの距離が増加するに従って破線から乖離している。これは、式 (3) で示される $1/\sqrt{r}$ の特異性以外の項の影響である。C1 ($a=0.25 \text{ mm}$) は、Fig. 8 に示した通りほぼ様な残留応力場中にき裂が位置するケースであるが、き裂先端からの距離の増加に従って応力値は破線より大きくなる。一方、Fig. 10(a) に示した特性テンソル値から算出した応力拡大係数についても、平均化半径 R の増加に従って正の傾きをもって増加する。これは、算出した平均応力についても特性テンソル法が想定している $1/\sqrt{r}$ の特異場に対して大きくなるためである。突き合わせ溶接を想定した残留応力場においては、Fig. 5, 8 に示したように溶接線から離れるに従って残留応力が低下する。Fig. 10(c) に示した C3 ($a=7.5 \text{ mm}$) は、残留応力が引張から圧縮へ遷移している箇所にき裂先端が位置するケースである。本ケースでは、Fig. 11 に見られるように、き裂先端から離れた領域における応力分布は $1/\sqrt{r}$ の

Fig. 11 Stress distribution at $Y=0$ from weld line in each crack location. Markers represent stress value of each integration point. Stress singularity distribution derived from $\sigma_{YY} = K_I / \sqrt{2\pi r}$ is represented by broken lines.

特異応力場を示す破線に対して、低い値を示している。また、特性テンソル値は平均化半径 R の増加に伴って小さくなる。これは、残留応力の低下により、特性テンソル法が想定している特異場に対して平均応力が小さくなっているためである。このように、有限な大きさの領域で計算された特性テンソルは、き裂先端が位置する箇所の応力状態に依存して、平均化半径 R に対し異なるプロファイルを示すことがわかる。特に、その傾きが大きい場合は、有限な平均化半径が予測精度に与える影響が大きくなる。一方、Fig. 10(a)～(f) に示すように、傾きの変動が大きい領域で線形近似可能となるように平均化半径を定め、 $R=0$ における応力拡大係数を評価すれば、誤差は実用に十分な程度まで軽減できると考えられる。

4.4 残留応力場および外力が生成する特異場の評価

溶接残留応力および外力が複合的に作用した場合のき裂周辺の特異場を評価し、特性テンソル法の適応性を検証す

る. Fig. 12 に模式図を示す. Fig. 9 に示した C1 から C6 の形状と応力状態を引き継いだ平板の境界に Y 方向の垂直応力 $\sigma_{YY}=200\text{MPa}$ を载荷し, 改めてつり合い状態を求める. Fig. 13 には, 外力载荷後のき裂周辺の Y 方向応力分布を示す. 前章と同様の方法で, き裂先端の応力場から特性テンソルを算出し, 破壊力学パラメーターである応力拡大係数を推定する. 本研究では, 平板の物性を等方弾性体と想定していることから, 応力拡大係数は残留応力および载荷による特異場の重ね合わせとして表すことができる. 中央にき裂を有した平板に対し, き裂と垂直な方向に一軸引張荷重が作用する場合, き裂周辺の応力拡大係数は有限寸法の影響を考慮した補正項によって以下のようにあらわされる¹³⁾.

Fig. 12 Loading condition to welded plate with a single crack

$$K_I^{\text{EXT}} = \sigma \sqrt{\pi a} \left[\sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - 0.025 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] \quad (22)$$

ここで, W は板幅を表す. 前章で比較に用いた溶接残留応力による応力拡大係数 K_I^G および K_I^{VCE} と外力による応力拡大係数 K_I^{EXT} を足し合わせた値を比較対象とし, 本手法の妥当性を検証する.

$$K_I^{G+\text{EXT}} = K_I^G + K_I^{\text{EXT}} \quad (23)$$

$$K_I^{\text{VCE}+\text{EXT}} = K_I^G + K_I^{\text{EXT}} \quad (24)$$

Fig. 14 には, C1 ~ C6 それぞれにおいて, 有限な平均化半径 R より算出された特性テンソル成分 $\bar{\chi}_{22}$ から式 (18) を用いて推定した応力拡大係数 $K_I(\bar{\chi}_{22})$ と, これらのデータ点を用いて最小二乗法より同定した直線近似関数を示す. また, 比較対象とする応力拡大係数を平均化半径 R に対して一定となる直線で示す. いずれのケースにおいても, 特性テンソルから推定した応力拡大係数は, $R \rightarrow 0$ において他の手法から導出した応力拡大係数に近づく様子が確認できる. Table 4 には, き裂位置 C1 ~ C6 において, $R=0.25\text{mm}$ における特性テンソル値から推定した応力拡大係数, 線形近似関数から予測した $R=0$ における特性テンソル値から推定した応力拡大係数, 比較対象となる応力拡大係数との誤差を示した. 有限な平均化半径 R から推定した応力拡大係数は, 最小の平均化半径 $R=0.25\text{mm}$ では, 他の手法と最大 5% 程度の誤差である. また, 線形近似関数を用いて予測した $R=0$ における応力拡大係数は, 最大 3% 程度の誤差である.

Fig. 13 Stress distribution around the crack after loading

Fig. 14 Estimated stress intensity factor under uniaxial loading at each radius and the linear approximate function. K_I^{G+EXT} and $K_I^{VCE+EXT}$ are the stress intensity factors estimated by green function and virtual crack extension method considering the external load and shown as constant solid line.

Table 4 SIFs under uniaxial loading estimated from characteristic tensor method and percentage error

Crack location	SIF for comparison ($N \cdot mm^{-\frac{3}{2}}$)		$\chi_{22}(R=0\text{ mm})$		$\bar{\chi}_{22}(R=2.5\text{ mm})$	
			K_I ($N \cdot mm^{-\frac{3}{2}}$)	Error(%)	K_I ($N \cdot mm^{-\frac{3}{2}}$)	Error(%)
C1	K_I^{G+EXT}	2055.0	2071.22	-0.79 %	2164.09	5.31 %
C2		2895.3	2962.76	-2.33 %	3014.57	4.12 %
C3		3021.7	3108.26	-2.86 %	3103.17	2.70 %
C4		2601.9	2637.23	-1.36 %	2657.75	2.15 %
C5	$K_I^{VCE+EXT}$	2364.0	2393.21	-1.23 %	2411.91	2.03 %
C6		2282.5	2295.78	-0.58 %	2319.38	1.62 %

前章の検証と同様、き裂先端の位置に依存して特異場を形成する応力分布が異なるため、平均化半径 R に対する応力拡大係数の予測値のプロファイルが異なる。一方、ここで示したように、荷重が載荷された場合も残留応力の勾配が大きく変動しない領域で特性テンソルを計算し、Fig. 12(a)～(f)に示すようにほぼ線形で推移するプロファイルを捉えることができれば、線形補間を用いて無限小領域で定義される特性テンソルを精度よく予測することができる。このように、必要な精度に応じて誤差を許容しながら簡便に応力拡大係数を予測することや、無限小領域の特性テンソル値を求めて予測精度を高めるといった選択をすることができる。

4. 結 言

本研究では、突き合わせ溶接を想定した残留応力場中のき裂に対して特性テンソル法を適用し、性質の異なる残留応力と外力の複合的な作用による特異場において応力拡大係数を予測した。予測に使用した応力場は有限要素法より計算し、2.5～15mmのき裂半長に対し0.5mm程度の粗いメッシュサイズを用いた。予測した応力拡大係数を解析解もしくは既存の同定手法と比較することで妥当性を評価した。得られた結論を以下に示す。

1) 特異要素を用いてき裂先端の特異性を再現することで、

残留応力場の応力拡大係数を5%以内の精度で推定することができる。

- 2) 最小二乗法などにより求めた補間関数を用いて無限小領域の特性テンソル成分を導出することにより、さらに高精度な特異場の評価が可能である。
- 3) 特性テンソル法を用いることで、残留応力場中のき裂進展予測に必要な特異場の評価を、計算コストを抑えた粗いメッシュで実施することができる。

参 考 文 献

- 1) R. John, K. V. Jata, and K. Sadananda: Residual stress effects on near-threshold fatigue crack growth in friction stir welds in aerospace alloys, *International Journal of fatigue*, 25.9-11 (2003), 939-948.
- 2) A. J. Allen M. T. Hutchings C. G. Windsor, C. Andreani: Neutron diffraction methods for the study of residual stress fields, *Advances in Physics*, 34-4 (1985), 445-473.
- 3) J. Lin N. Ma Y. Lei and H. Murakawa: Measurement of Residual Stress in Arc Welded Lap Joints by *cosa* X-ray Diffraction Method, *JMPT*, 243 (2017), 387-394.
- 4) Y. Ueda K. Fukuda K. Nakacho and S. Endo: A New Measuring Method of Residual Stresses with the Aid of Finite Element Method and Reliability of Estimated Values, *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 138 (1975), 499-507.
- 5) Y. Ueda N. Ma: Estimating and Measuring Methods of Residual Stresses Using Inherent Strain Distribution Described as Functions (Report 1), *Quarterly Journal of the Japan Welding Society*, 11-1 (1993), 189-195.
- 6) M. B. Prime: Measuring residual stress and the resulting stress intensity factor in compact tension specimens, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 22(1999), 195-204.
- 7) C. D. Donne G. Raimbeaux: Residual stress effects on fatigue crack propagation in friction stir welds, *ICF10, Honolulu* (2001).
- 8) T. Fett D. Munz: *Stress Intensity Factors and Weight Functions*, Computational Mechanics Publications (1997).
- 9) Y. Lei N. P. O'dowd and G. A. Webster: Fracture mechanics analysis of a crack in a residual stress field, *International Journal of Fracture*, 106-3 (2000), 195-216.
- 10) G. Servetti X. Zhang: Predicting fatigue crack growth rate in a welded butt joint: the role of effective R ratio in accounting for residual stress effect, *Engineering Fracture Mechanics*, 76-11 (2009), 1589-1602.
- 11) C. T. Sun Z. H. Jin: *Fracture Mechanics*, Academic Press (2012).
- 12) Y. Ueda H. Murakawa and N. Ma: *Welding deformation and residual stress prevention*, Elsevier (2012), 202-203.
- 13) T. L. Anderson: *Fracture mechanics: fundamentals and applications*, CRC press (2005).
- 14) H. Murakawa: Fatigue crack growth simulation using characteristic tensor, *Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference* (2018), 393-399.
- 15) K. Saito T. Hirashima N. Ma and H. Murakawa: Characteristic Tensor for Evaluation of Singular Stress Field Under Mixed-Mode Loadings, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 122-2 (2020), 415-432.
- 16) M. A. Hussain W. E. Lorensen and G. Pfliegel: The quarter-point quadratic isoparametric element as a singular element for crack problems, (1976).
- 17) R. Bao X. Zhang and N. A. Yahaya: Evaluating stress intensity factors due to weld residual stresses by the weight function and finite element methods, *Engineering Fracture Mechanics*, 77-13 (2010), 2550-2566.
- 18) F. Z. Li C. F. Shih and A. Needleman: A comparison of methods for calculating energy release rates, *Engineering fracture mechanics*, 21-2 (1985), 405-421.