論文および報告

溶融状態を含む熱伝導理論*

— その溶接への応用 —

I. 非定常な溶融現象

佐 藤 次 彦**

Heat Conduction Theory Including Melting State*

— Its Applications for Welding Engineering —

I. None Stationary Melting Phenomena

By T. Sato**

Abstract

Melting phenomenon is accompanied with phase change. Hence we introduce in ordinary theory of heat conduction latent of fusion, and obtain numerical solutions of one-dimensional non-linear differential equations under various conditions for such a theory. As results, it becomes clear that the effect of latent heat of fusion is relatively large, especially discrepancy of size of melting region by ordinary theory from by our theory is important, for example in non-stationary melting of Al it amounts to nearly 40% under some conditions.

Next we discuss problems of welding engineering according to informations obtained from our theory. In the second report we shall treat stationary melting phenomena.

1.1. はじめに

溶融を直接利用する溶接はもちろん、溶融をともなう現象はかなり多い。とくに溶接では溶融領域の大きさがそのまま溶接結果の大部分を支配することとなるので熱伝導論によって溶融問題を計算した例は数多い¹⁾。冶金学的な考慮を別にすれば、そこで問題になるのは次のような点であろう。

- a) ある与えられた境界条件のもとでどのような温度分布をもつか、したがってまたどれだけの部分が溶融するか。
- b) この溶融現象においてどれだけの熱量がはいって、そのうち何%が溶融のためにつかわれたか。(これを溶接のさいの熱効率と呼ぶ²⁾)。

かような問題を取扱うのにこれまでは従来の熱伝導によって温度分布曲線を求め、等温度曲線から溶温領域の大きさを定め¹⁾、つぎにこの領域に相当する融解熱を考えて熱効率を計算するという方法が行われてきた³⁾。

しかしながら溶融は固体から液体への相変化である。そこで熱効率を求めるときにあとで融解熱を加えるというやり方ではなくて溶融領域を見出だす計算に融解熱を考慮しなければならぬことは当然である。すなわち融解熱を考慮した熱伝導理論によらなければならない。

融解熱を考慮した熱伝導理論をつくり、この結果を従来の理論と比較し、溶接の問題へ応用して実験と対比していきというのがこの論文の目的である。

さきに進むまえに、やがてⅡの2・4節で述べるように従来の実験データの解析、たとえば Nippes, Savage, Suzuki, Chang⁴⁾ などの従来の熱伝導論による理論曲線に対し、実験曲線が上に凹の曲線となっていることは融解熱の役割を示すものであることを指摘しておきたい。

1.2. 融解熱の大きさ

融解熱を考慮にいれた熱伝導論によらねばならぬことは当然としても、融解熱の大きさがどの程度のものであるかが問題である。そこでいまハンド・ブック⁵⁾からのデータを Table 1・1 に示す。この表は常用の金属 5 種について示してある。ここで c は比熱、 ρ は密度でいずれも室温から溶融温度 θ_m までの平均の値をとってある。したがって $c\rho\theta_m$ はある金属を 0°C からその溶融温度 θ_m まで温

* 原稿受付 昭和34年12月25日 (昭和33年度溶接学会春期講演会および昭和33年度秋期講演会の発表をまとめたものである)

** 正員 大阪工業大学 Member, Osaka Institute of Technology.

Table. 1.1

	$c\rho\theta_m$ cal/cm ³	L cal/cm ³	$c\rho\theta_m + L$ cal/cm ³	$L/c\rho\theta_m$ ×100%
Fe	1786	512	2298	29
Al	383	255	638	67
Cu	892	453	1345	51
W	2107	849	2956	40
Ni	2553	659	3212	26

度をあげるに必要な 1cm³ あたりの熱量を、また L は各金属の 1cm³ あたりの融解の潜熱をあらわしている。この表からわかるように $L/c\rho\theta_m$ の値はかなり大きい。したがってこれまでのように溶融現象を取扱うさい従来の熱伝導論によって計算したのでは相当の誤差をとまなうことが予測される。われわれは次に融解熱を考慮に入れた熱伝導論をつくることを試みよう。

1.3. 融解熱を考慮した熱伝導論

われわれはこの節でわれわれがこの問題を取扱うさいの基本的立場—仮定について述べるとともに、どのようにして融解熱を熱伝導にとり入れていくかについて議論する。

本来溶融領域を含む加熱問題は液相と固相の 2 相（場合によっては気相を含む 3 相を考えねばならない）が存在するのであるからそれぞれの相のなかで熱移動を別々に考える必要があり、対流や輻射などについても考慮しなければならない。

しかしここではかような効果が無視できるような短い時間のあいだに加熱が行われるような場合について取扱う。したがっていわゆる熱伝導論的取扱いが液・固両相を通じて適用できるものとする。（ただし比熱その他の常数に両相の差をとり入れた熱伝導論的取扱いはできる。とくに比熱に対しては 1.4 節で述べる部分直線近似によってきわめて容易にとり入れられる）。

さて融解熱を熱伝導論にとり入れるのにわれわれは比熱—温度曲線において溶融温度附近で融解熱に相当する山があるとして取扱う。このやり方は物理的にもっとも自然である。（Fig. 1.1 参照）

Fig. 1.1

融解熱を熱伝導の微分方程式のなかにあたかも吸入点があるというような形でとり入れることも思いつかれるが、これは融解熱の次元の点で根本的な困難がある。なぜなら吸入点とすれば cal/sec の形の次元をもたなければ微分方程式のなかに導入できないが、われわれが現在得ている融解熱 L の単位は cal/g の形である。したがってこの方法で非定常問題を取扱うことはできないし、かつ物理的に不

自然である。

比熱曲線に融解熱に相当する山があるというわれわれの方法は数学的には比熱が温度の函数であるような熱伝導の微分方程式を解くということに帰着する。かような問題については Van Dusen, 川下研介⁶⁾, 沢田正雄⁷⁾, 沢田正好⁸⁾, 日高孝次⁹⁾, H. Kornfed¹⁰⁾, 小平吉男¹¹⁾などかなりの研究がある。われわれは 1.4 節において沢田^{7,8)}らの方法にならってわれわれの解析を進めていく。

また密度 ρ_0 および熱伝導率 K_0 は常数として取扱う。実験と比較する場合これは確かに問題となろうが、われわれはかような仮定のもとで融解熱を考慮した熱伝導理論による正しい温度分布曲線を求め、いろいろの点で従来の理論との比較を容易にすることを目的とした。（両常数が温度の函数であっても原則的には解ける。現在まですべての常数が温度の函数であるような問題の数値計算はみあたらないし、もしかような計算を行ったとしても融解熱の考慮による影響にくらべて普通は大分小さいであろうと考えられる）。

1.4. 非定常溶融問題の解法

われわれがこれから取扱うのは $x=0$ から $x=\infty$ まで広がっている半無限体の 1 次元非定常問題である。（1 次元で解ける問題なら 3 次元でも解ける）。この半無限体に $x=0$ でなんらかの形で熱を供給した場合そこで起こる溶融状態を取扱うのがいまからの問題であって、かような問題は溶接のみならず一般の溶融問題のもっとも典型的な形であろう。

熱の供給を境界条件として入れるさい、いろいろの形の境界条件が考えられるが、そのうちで $K_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} = \text{const.}$ （流入流熱量が一定）の型のものはわれわれの方法では解けない¹²⁾。時間を t としたとき、 $x=0$ で、温度 $\theta=f(t)$ および $\theta=\theta_0$ ($\theta_0 = \text{一定}$) の二つの場合についてわれわれは実際に解を求めよう。また初期条件は簡単に $t=0$ で、 $\theta=0$ としよう。

いま比熱 c を

$$c = c_0 h(\theta); \quad c_0 = \text{常数}$$

とおけば、 $h(\theta)$ は比熱の温度依存性をあらわす。また $K_0/c_0\rho_0 = \kappa_0$ とおけば、われわれの解くべき微分方程式は

$$h(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1)$$

で与えられる。ここで Van Dusen などにならって

$$\int h(\theta) d\theta = V \quad (2)$$

とおけば、(1) 式は

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \kappa_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{h(\theta)} \frac{\partial V}{\partial x} \right] \quad (3)$$

に変換される。なぜなら、 $\frac{\partial V}{\partial \theta} = h(\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = h(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \kappa_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{h(\theta)} \frac{\partial V}{\partial x} \right] &= \kappa_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{h(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \\ &= \kappa_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{h(\theta)} h(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = K_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \\ &= \kappa_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\end{aligned}$$

だからである。いま

$$\left. \begin{aligned}\eta &= \pm i k \beta x - i k \kappa_0 \gamma^2 t \\ (\pm i k \beta)^2 &= -i k \gamma^2\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

かつ、 $k=3$ 、あるいは 4

とおけば、(3) 式は

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{h(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] \quad (5)$$

となる¹³⁾。したがって

$$V = \frac{1}{h(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \eta} + C'$$

$C'=0$ にとれば

$$\frac{1}{h(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial \eta}$$

それゆえ

$$\frac{1}{h(\theta)} \frac{dV}{d\eta} = \eta + C''$$

いま

$$\theta = \exp \left[\int \frac{1}{h(\theta)} \frac{dV}{V} \right] \quad (6)$$

とおけば

$$\theta = A e^{\eta} = A e^{\pm i k \beta x - i k \kappa_0 \gamma^2 t} \quad (7)$$

で与えられる。(A は常数)

いま得た θ は (4) の関係によって

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (8)$$

を満足することが容易に示される¹⁴⁾。

また初期条件

$$t=0 \text{ で、} \theta=0$$

は

$$t=0 \text{ で、} \theta=0$$

に、境界条件

$$x=0 \text{ で、} \theta=f(t)$$

は

$$x=0 \text{ で、} \theta=G[f(t)]$$

に変換される。(境界条件 $x=0$ で、 $\theta=\theta_0$ (θ_0 —一定) の場合は、 $\theta=f(t)$ の特別の場合として与えられるからここでは特に取扱わず、あとで解だけ与える)。

ここで

$$G(\theta) = \theta = \exp F(\theta) \quad (9)$$

$$F(\theta) = \int \frac{1}{h(\theta)} \frac{dV}{V} = \int_1^\theta \frac{d\theta}{h(\theta) d\theta} \quad (10)$$

である。

結局

$$\left. \begin{aligned}h(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \kappa_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ t=0 \text{ で、} \theta &= 0 \\ x=0 \text{ で、} \theta &= f(t)\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

の解を求めることは

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \kappa_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ t=0 \text{ で、} \theta &= 0 \\ x=0 \text{ で、} \theta &= G[f(t)]\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

の解 θ をまず求め、つぎに θ を θ に変換することによって達せられる。(12) の解は

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\kappa_0 t}}^{\infty} G \left[f \left(t - \frac{x^2}{4\kappa_0 \mu^2} \right) \right] e^{-\mu^2} d\mu \quad (13)$$

で与えられる¹⁴⁾。

さてわれわれは融解熱を考慮した熱伝導論をつくるために、1・3 節で述べたように融解熱を比熱のなかにくり入れることにした。実際に計算をすすめるために $h(\theta)$ は Fig. 1.2 のような形をもつものと近似しよう。われわれは Fig. 1.2 の実線のように $h(\theta)$ が直線の部分から構成されていると仮定する。この工夫を“部分直線近似”と呼ぶことにする。

Fig. 1-2

われわれの問題では結局 $G(\theta)$ 、つまり (10) 式の $F(\theta)$ を処理せねばならぬが、この部分直線近似によって $h(\theta)$ の各直線部分に対応する $F(\theta)$ をそれぞれ解析的に表現できる。もし解析的に表現できないとすれば、実際の数値計算の手間は莫大となる。あとでわかるように $F(\theta)$ の各部の解析的表示を得ておけば、いろいろの金属に対して常数をかえてやるだけで容易に計算を進めうる。この部分直線近似は融解熱以外の比熱の温度依存性がどのようにあろうと同様に用いる。

実際にはわれわれは比熱は融解熱以外の温度依存性はないものとして取扱う。(あとの計算でわかるように融解熱による $h(\theta)$ の 3 角形の山の高さが例えば Al の場合 757 (底辺は 1°C) にもなり、1 にくらべてはるかに大きい。したがって融解熱を考慮した理論と従来のものとを比較しようとするわれわれの立場としてこれは当然許されよう)。

つぎに Fig. 1.2 で斜線をほどこした 2 等辺 3 角形の山が丁度融解熱に相当するようにとられている。すなわちこの 3 角形の面積に c_0 (比熱 $c=c_0 h(\theta)$ である) をかけたものが融解熱に等しい。いま一例を示そう。

Al の場合：融解熱は 94.6 cal/g

c_0 は $0.25 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$

したがって 3 三角形の面積は

$$94.6/0.25=378.4 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

でなければならない.

いま, 底辺 $f-d=1^\circ\text{C}$ にとれば

3 三角形の高さは

$$\frac{378.4}{1} \times 2 = 757$$

また斜辺の勾配の絶対値は

$$757/0.5=1514 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

もちろん e は溶融温度である.

ここで $f-d$ のえらび方, すなわち 3 三角形の底辺のとり方の任意性が気にかかるかもしれない. 実際の融解熱がどのような温度巾で吸収されるかどうかさだかではない. しかしながら実際の数値結果には $f-d$ の大きさを多少かえてやってもその影響は全く無視しうる. これは $F(\theta)$ が (10) のような積分形で与えられていることから容易にわかることである. われわれは便宜上 $f-d$ を 1°C にえらんだにすぎない.

さて $h(\theta)$ に対するかような近似のもとで, $h(\theta)$ の各部分 (A), (B), (C), (D) (Fig. 1.2 参照) に対応する $\int h(\theta) d\theta$ はそれぞれ Table 1.2 のように与えられる.

$h(\theta)$ に関する部分直線近似によって, $\int h(\theta) d\theta$ は各部分で θ の 2 次以下の式であらわされた. このとき $\int \frac{d\theta}{\int h(\theta) d\theta}$ はまたそれぞれの部分に対し解析的にあらわすことができる.

いま $0 < \theta_a < \theta_b$

$$\int_1^{\theta_b} \frac{d\theta}{\int h(\theta) d\theta} = \int_1^{\theta_a} \frac{d\theta}{\int h(\theta) d\theta} + \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{d\theta}{\int h(\theta) d\theta}$$

のときのように加算的であるから, $F(\theta)$ は四つの領域でそれぞれ次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \text{(A): } & [\ln \theta]_1^{\theta} \\ \text{(B): } & [\ln \theta]_1^{\theta} + \left[\frac{2}{\sqrt{q_1}} \tan^{-1} \frac{b\theta + (1-bd)}{\sqrt{q_1}} \right]_1^{\theta} \\ & q_1 = b^2 d^2 - (1-bd)^2 \\ \text{(C): } & [\ln \theta]_1^{\theta} + \left[\frac{2}{\sqrt{q_1}} \tan^{-1} \frac{b\theta + (1-bd)}{\sqrt{q_1}} \right]_1^{\theta} \\ & + \left[\frac{-2}{\sqrt{q_2}} \tanh^{-1} \frac{b\theta + (bf)}{\sqrt{q_2}} \right]_{\theta}^{\theta} \\ & q_2 = (1+bf)^2 + 2b^2 \left(\frac{f^2}{2} - 2fe + e^2 \right) \\ \text{(D): } & [\ln \theta]_1^{\theta} + \left[\frac{2}{\sqrt{q_1}} \tan^{-1} \frac{b\theta + (1-bd)}{\sqrt{q_1}} \right]_1^{\theta} \\ & + \left[\frac{-2}{\sqrt{q_2}} \tanh^{-1} \frac{b\theta + (1+bf)}{\sqrt{q_2}} \right]_{\theta}^{\theta} \\ & + [\ln \{ \theta + b(e-d)^2 \}]_f^{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Table 1.2

Temperature region	θ	$\int h(\theta) d\theta$
(A)	$0 \sim d$	θ
(B)	$d \sim e$	$\frac{b}{2} \theta^2 + (1-bd)\theta + \frac{bd^2}{2}$
(C)	$e \sim f$	$-\frac{b}{2} \theta^2 + (1+bf)\theta - b \left(\frac{f^2}{2} - 2fe + e^2 \right)$
(D)	$f \sim$	$\theta + b(e-d)^2$

(14) 式からたとえば Al の (D) 領域に対して

$$F(\theta) = \ln(\theta + 378.4) - 0.4528$$

のようになる. このような式を一つの金属に対して 1 組計算しておけば, 溶融状態を含む熱伝導の問題に対していつでも使える.

このようにして $F(\theta)$ が与えられれば, (9) 式によって θ と θ の関係が部分ごとに解析的にあらわされるから, これを使って原方程式の解を数値的に求めることができる. われわれの近似のもとでの θ と θ の関係を定性的に示せば, Fig. 1.3 のように $\theta=e$ の近傍 ($d \sim f$) で折れまがった直線となる.

Fig. 1-3

つぎの節でわれわれはこの節で得た結果を用いて数値計算を行い, いろいろの比較・吟味をするが, そのさい境界条件として (11) 式で $f(t) = \alpha t$ (α は常数) と $f(t) = \theta_0$ (θ_0 は常数) の二つの場合につき実際に計算を行った. かような境界条件の場合の (13) 式をここに示しておこう.

$f(t) = \alpha t$ のとき

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\kappa_0 t}}^{\infty} G \left(\alpha t - \frac{\alpha x^2}{4\kappa_0 \mu^2} \right) e^{-\mu^2 d\mu} \quad (15)$$

$f(t) = \theta_0$ のとき

$$\theta = G(\theta_0) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\kappa_0 t}} e^{-\mu^2 d\mu} \right) \quad (16)$$

(かくして求めた θ を θ に変換して最終的な解が得られる)

1.5. 計算結果とその吟味

われわれは (15), (16) 両式を Table 1.3⁽¹⁵⁾ に示した常

Table 1.3

	c_0 cal/g $^\circ\text{C}$	ρ_0 g/cm 3	κ_0 cm 2 /sec	p $^\circ\text{C}$	e $^\circ\text{C}$	f $^\circ\text{C}$	b $^\circ\text{C}$
Al	0.25	2.70	0.650	660	660.5	661	1514
Cu	0.11	8.96	0.950	1083	1083.5	1084	1840
Fe	0.16	7.87	0.058	1539	1539.5	1540	1626

数を用いて常用の代表的金属 Al, Cu, Fe について数値計算を行った。(融解熱から b を求める計算例はすでに示した)。

(16) 式については Al についてのみ計算を行った。これは (15) 式の計算結果から (16) 式の他の金属の場合の定量的結果が推論できるからである。

また (15) 式の t としては $t=1/60, 2/60, 10/60$ sec の値をとり、Al に対しては $at=1000, 1500, 2000^\circ\text{C}$ になるような a をそれぞれの t に対してとり、同様に Cu に対しては $at=1500, 2000^\circ\text{C}$ を、また Fe に対しては $at=2000, 2500^\circ\text{C}$ の場合を計算した。この at のえらび方はそれぞれの金属の溶融温度より高く、沸点より低い温度にとった。(沸点はそれぞれ Al= 2060°C ; Cu= 2600°C ; Fe= 2740°C で、溶融温度はそれぞれ Al= 660.5°C ; Cu= 1083.5°C ; Fe= 1539.5°C である)。あとでわかるように実際にフラッシュ・バット溶接や溶接棒の溶融のさい表面温度は沸点に近い温度になっている。

(16) 式の θ_0 としては $\theta_0=1000, 1500, 2000^\circ\text{C}$ で、 $t=1/60, 2/60, 10/60$ sec のそれぞれの場合につき計算を行った。

これらの計算の結果を Fig. 1.4, Fig. 1.5, Fig. 1.6, Fig. 1.7, Fig. 1.8, Fig. 1.9, Fig. 1.10, Fig. 1.11, Fig. 1.12, Fig. 1.13 に示す。

これらの図中で実線は融解熱を考慮したわれわれの曲線を、点線は従来の熱伝導論による曲線を比較のため示したものである。Fig. 1.11~Fig. 1.13 のなかの鎖線について

はあとで述べる。なお x の大きなほうの曲線の 1 部を图示の都合上省略したものもある。

これらの図からわかるように、従来の熱伝導論からの結果(点線)と融解熱を考慮したわれわれの理論からの結果(実線)との差はかなり大きい。ことに溶融温度近傍でいちじるしい。このことは 1・1 節で述べた問題に重要な影響をもつ。これらの図からも直接いろいろの定性的結論が

Fig. 1-5

Fig. 1-4

Fig. 1-6

得られるが、われわれは次に述べるような方法によってより定量的な形で結論をあらわすとともに、結果をいくつかの角度から吟味してみようと思う。

いまこれらの図中のある曲線について Fig. 1.14(a) に斜線をほどこした面積をプランメーターではかり、これに比熱をかけた熱量を①、つぎに溶融領域の大きさに融解熱をかけた熱量を② (Fig. 1.14(b)), また Fig. 1.14(c) に

斜線をほどこした面積をプランメーターではかり、これに比熱をかけた熱量を③とする。また従来の熱伝導論による曲線に対応するものを区別するために①', ②', ③' のようにダッシュをつけてあらわすことにする。

また Fig. 1.15 に示すように、われわれの理論からの溶

Fig. 1-7

Fig. 1-9

Fig. 1-8

Fig. 1-10

Fig. 1-11

Fig. 1-13

Fig. 1-12

Fig. 1-14

$$R = \frac{(2) + (3)}{(1) + (2)} \times 100\%$$

$$S = \frac{q}{p} \times 100\%$$

融領域を p 、従来の理論による溶融領域のわれわれの溶融領域からのずれを q とする。

いま

$$P = \frac{(1) + (2)}{(1) + (2)} \times 100\%$$

$$Q = \frac{(2') + (3')}{(1') + (2')} \times 100\%$$

とおけば、 P はわれわれの理論による流入熱量と従来の理論による流入熱量との比の百分率、 Q は従来の理論による曲線の熱効率の百分率、 R はわれわれの理論による曲線の熱効率の百分率、 S は従来の理論による溶融領域のわれわれの理論による溶融領域に対する、ずれの百分率を

Fig. 1-15

(Table 1.5 中の T についてはあとで述べる)。

Table 1.4

	at °C	t sec	P %	Q %	R %	S %
Al	1000	1/60	88	54	60	31
		2/60	83	53	51	28
		10/60	91	53	44	30
	1500	1/60	71	73	83	22
		2/60	73	74	69	17
		10/60	91	75	72	15
	2000	1/60	87	79	77	19
		2/60	89	79	77	15
		10/60	88	80	78	17
Cu	1500	1/60	92	47	49	28
		2/60	95	51	51	17
		10/60	92	56	48	25
	2000	1/60	90	65	59	23
		2/60	90	63	56	15
		10/60	91	65	60	18
Fe	2000	1/60	99	37	37	計算不能
		2/60	94	42	37	22
		10/60	97	33	31	12
	2500	1/60	92	53	49	16
		2/60	93	56	51	21
		10/60	81	46	49	16

Table 1.5

	θ_0 °C	t sec	P %	Q %	R %	S %	T %
Al	1000	1/60	86	60	52	36	15
		2/60	90	61	52	33	14
		10/60	93	60	50	37	16
	1500	1/60	79	80	74	26	12
		2/60	90	79	76	28	14
		10/60	85	78	73	27	13
	2000	1/60	87	86	80	24	13
		2/60	84	81	81	22	12
		10/60	85	85	80	25	14

示す。実際に Fig. 1.4~Fig. 1.13 中の曲線につき求めた P, Q, R, S の値を Table 1.4 および Table 1.5 に示す。ここで Table 1.4 は境界条件 $x=0$ で、 $\theta=at$ に対するもので (Fig. 1.4~Fig. 1.10), Table 1.5 は境界条件 $x=0$ で、 $\theta=\theta_0$ に対するものである。

これらの値はいずれも図から求めたものであるからある程度の誤差はまぬがれない。(Table 1.5 のほうの境界条件に対応する解 (16) 式のほうが数値計算ははるかに容易であり、 P, Q, R, S の値もより正確である)

Table 1.4 および Table 1.5 から得られるおもな結論を列挙しよう。

1) 従来の理論による溶融領域のわれわれの理論による溶融領域の“ずれ” S は大きく、いままでの理論によるものは相当の修正が必要であることがわかった。これはなによりもまず融解熱を考慮したわれわれの熱伝導論の意義を立証するものである。

2) “ずれ” S の大きさの順序は、Table 1.1 の $L/cp\theta_m$ の順になっている。これはわれわれの理論の構成からいえば当然の結論であるが、この知識によってここでは計算しなかった他の金属の場合の従来の理論による“ずれ” S をその金属の $L/cp\theta_m$ の値から推論できるという点で重要である。

3) Table 1.4 と Table 1.5 を通じてその金属の溶融温度に表面 $x=0$ における温度が近いほど“ずれ” S の値は大きい。(たとえば Al の場合であれば、 $t=1/60$ sec のものを比較したとき $at=1000^\circ\text{C}$ のほうが $t=1500^\circ\text{C}$ の S の値より大きい)。これを補足するために、境界条件 $\theta=\theta_0$ の場合を Al に例をとって Fig. 1.16 および Fig. 1.17 に示す。Fig. 1.16 でわかるように、表面温度 θ_0 を溶融温度より高く保った方が同一時間内の真の溶融領域 p や、従来の理論の p からのずれ q の大きさ自体は大きい。し

Fig. 1-16

Fig. 1-17

かしながら Fig. 1.17 でみるように q/p の百分率 S は表面温度 θ_0 が溶融温度に近いほど大きい。このことは境界条件 $\theta = at$ の場合も同様である。

4) 熱効率 Q と R とを比較したとき、われわれの理論による熱効率 R のほうが一般に小さい。これは当然である。

5) その他いろいろの結論があるが、いずれもこの理論の構成から予測されるものなので省略しよう。

ここで境界条件のことについてふりかえてみよう。われわれは境界条件として、 $\theta = at$ および $\theta = \theta_0$ の場合について実際の計算を行い、 $\kappa_0 \frac{d\theta}{dx} = \text{const.}$ の形のもはわれわれの方法では解けなかった。では実際の溶融問題の場合はどうかといえば、とてもかような簡単な形の境界条件ではあわせない。点溶接のようなものを除けば普通の場合は境界面の温度があがるにつれて境界から流入する熱量は減少する傾向をもつであろう。したがって $\theta = at$ や $\theta = \theta_0$ は実際の場合にくらべて流入熱量をはるかに多くとったことになる。しかも従来の理論では融解熱を考えていないから、より少い熱量で一定の（溶融温度より高い）表面温度にあげ得るのに反し、実際には（われわれの理論では）融解熱を必要とするから Table 1.4~5 の P の値とは逆により多く熱量がはいっている。（すなわち従来の理論による流入熱量は Fig. 1.14 の ①' だけであるのに対し、われわれの理論では ①+② である。Table 1.4 や Table 1.5 では流入熱量の比の百分率として $P = \frac{①+②}{①'+②} \times 100\%$ の値を示したが、これは従来の理論の場合に ②' だけの融解熱に相当する熱量をあとでつけ加えてある。したがって実際の計算時の流入熱量の比は $\frac{①+②}{①'}$ でこの値は常に 100% より相当大きい）。

以上の2点を考慮すれば、実際におこる境界条件のもとでは従来の計算による境界面の温度より実際は低い温度にしかあがらず、したがって溶融領域はより小さいことになる。すなわち従来の理論の結果は実際の場合にくらべて Table 1.4 や Table 1.5 に示したものよりもっと大きくずれていることになる。したがって実際の現象を考える場合、ここでの計算の結果を利用して類推しようとするならば、この計算の場合よりも実際には溶融領域はもっと小さく、したがって従来の理論はもっと大きく修正されねばならぬことを念頭におくべきである。

このほかに補足すべき重要な事柄を二、三つけ加えよう。

第1に、 $\alpha (^{\circ}\text{C}/\text{sec})$ を一定

Fig. 1-18

Fig. 1-19

にした場合の時間 t に対する溶融領域 p の変化を求めることができる。一例として Al につき、 $\alpha = 6 \times 10^4 ^{\circ}\text{C}/\text{sec}$ の場合を Fig. 1.18 に示す。同様に $t=0$ で、急に $x=0$ の面だけが $\theta = \theta_0$ になり、その後 $x=0$ の面をこの

Fig. 1-20

温度に保った場合の時間 t に対する溶融領域 p の変化を示す図の一例を Fig. 1.19 に示す。これは Al で、 $\theta_0 = 1000, 1500, 2000^{\circ}\text{C}$ のそれぞれについての曲線である。図からわかるように溶融速度は θ_0 の大きなほうが大きい。

第2に、Fig. 1.4~Fig. 1.13 において同じ条件の曲線について点線（従来の理論によるもの）と実線（われわれの理論によるもの）を比較したとき、点線の曲線にくらべて実線の曲線はより上に凹であるという幾何学的表現ができる。したがってある一定の溶融領域を得たいという問題を考えた場合、従来の理論で必要とする表面温度よりもっと表面温度をあげてやらねば所定の溶融領域は得られないことになる。この間の事情を Fig. 1.20 に示す。すなわち溶融領域を与えられた場合、 M 点をとる本当の曲線は従来の曲線よりも $x=0$ において高い θ の値をもつ。いま $\theta = \theta_0$ の境界条件の場合の従来の理論による曲線について同じ溶融領域をもつわれわれの曲線を計算して境界面 $x=0$

における温度 θ_{0t} を求めれば Table 1.6 のようになる。

すなわち θ_{0t} はもとの θ_0 に対し10数%~30数%高くなるという重要な結論が得られた。ここで同じ θ_0 に対応する θ_{0t} の値が t のいかにかわらずよく似た値となっている理由は、この場合の基礎式 (16) は $x/2\sqrt{\kappa_0 t}$ の値によってきまり、かつ Fig. 1.19 にみられるように溶融領域の大きさが大体 $\sqrt{t}$ に比例しているからである。(Fig. 1.20 の場合には $\sqrt{t}$ に比例していない)。

第3に、いままでわれわれは融解熱を考慮した熱伝導論をつくり、この理論の意義を実際の例によって従来の理論と比較することによって強調してきた。ここで次のような便法を思いつく。すなわち融解熱を比熱のなかに平均していれば、従来の理論によって計算するという簡便法をとった場合、正しい理論の結果とどの程度異なるであろうか。

融解熱を比熱のなかに平均するやり方の一例をあげよう。

[Al の場合で表面温度を 1000°C にあげるとき]

Al の融解熱は 94.6 cal/g であるから、これを 1000°C までに平均すれば、比熱に附加すべき部分として 0.0946 cal が得られる。Al の比熱 $c_0 = 0.25$ cal/g°C (Table 1.3 参照) であるから、この場合の比熱として

$$0.25 + 0.0946 = 0.3446 \text{ (cal/g°C) を得る。}$$

かような比熱を用いて計算した曲線が Fig. 1.11~Fig. 1.13 の鎖線であらわした曲線である。これらの図からわかるように、われわれの曲線(実線)にくらべて定性的にも相当異なった曲線である。また表面温度の高いほど従来の理論による曲線(点線)に近づくことがわかる。これは上述の融解熱の平均法からいって当然のことである。またこの場合の溶融領域に対応する S を T として Table 1.5 に示した。この T の値によれば、かような簡便法によって求めた溶融領域は正しい溶融領域に対してなお10数%大きくできている。曲線の形が定性的にも異なっている点も考慮すれば、かような簡便法は近似法としては採用できない。

1・6. 溶接への考慮

これまでにわれわれは融解熱を考慮した熱伝導論の必要性を述べたのち、比熱に山があるという形でそのような熱伝導論をつくり、いくつかの仮定のもとで部分直線近似な

Table 1.6

	θ_0 °C	t sec	θ_{0t} °C
Al	1000	1/60	1179
		2/60	1187
		10/60	1196
	1500	1/60	1977
		2/60	1982
		10/60	1971
	2000	1/60	2774
		2/60	2740
		10/60	2774

どを応用してこれらの仮定のもとでは与えられた境界条件に対して解を求め、これらの計算の結果から最初に述べた融解熱を考慮した熱伝導論の必要性を改めて立証するとともに、定量的および定性的な考察を行って多くの重要な結論を得た。

ここで得られた結論は溶融を直接利用する溶接—アーク溶接にせよ、酸素アセチレン溶接、または各種の抵抗溶接にしろ、その基礎的なことがらであって、そのままこれらの現象の理論的解析に必要である。溶接(冷間圧接などは含まない)は溶融を利用して接手をつくることであり、したがって冶金的な問題や特殊の問題を別にすればその溶融領域(溶込み)によってその接手の強度がきまるといっても過言ではない。したがって前節で特に強調した溶融領域のずれは溶接の問題に対して重要な影響をもつ。

IIにおいて抵抗溶接、とくにフラッシュ・バット溶接や溶接棒の溶融の問題についてくわしく述べ、実験ともまた比較するが、ここでは特に溶融領域に関係の深い問題の例を二、三あげて議論しよう。

まず点溶接の問題を考えよう。点溶接は Fig. 1.21 のように電極により板の間に通電して、まず板の境界面間の接触抵抗による発熱を火付け役として電気抵抗の温度係数による Joule 熱を利用して図に斜線部で示したような溶融領域(ナゲット)をつくり、これによって接手をつくる溶接法である。この場合には境界条件 $\theta = at$ に似た状態が板の境界面で起っていると考えてよからう。たとえば、ナゲットの板厚方向の長さの $\frac{1}{2}$ が、1枚の板厚の $\frac{1}{4}$ なければならぬというような強度上からの要請がある。この場合ナゲットの板厚方向の長さ(中央部)に対してはわれわれの1次元の解析が適用できよう。そこで従来の理論から計算した結果¹⁶⁾はすべてこの長さを大きく与えすぎることとなり、実際にはもっと境界面の温度をあげてやらねば所定のナゲットは得られない。すなわちもっと多くの電流を流してやらねばならない。理論的に求められるよりも実際の点溶接では多くの電流を必要とするが、この理由をナゲット既形成部の抵抗が大きいため、ナゲット既形成部以外をとる電流が相当あるためという考えもあるが¹⁷⁾、いまわれわれの述べたこともその一つの原因であろう。

Fig. 1-21

また Al 合金などの点溶接が他の金属にくらべてより大電流、短時間の通電が必要な理由は、Al 合金が他の金属にくらべて熱伝導率 κ_0 が大きいことに主としてよるが、そのほかに前節の結果からわかるように Al の場合融解熱を考慮した影響が最も大きいことにもよると考えられる。

Fig. 1-22

なお点溶接のさい電流が大きすぎると境界面が気化し，“ちり”と呼ばれる現象の起ることは，普通の条件のもとで境界面はその金属の沸点に相当近い温度にあることを示すものである。

つぎにアプセット・バット（突合せ）溶接について述べよう。これは Fig. 1.22 のように接合しようとする二つの部材を電極でつかんで，接合面にある程度の圧力をかけながら通電し，その後大きな圧力をかけてアプセットする溶接法である。このような場合の解析も行われているが¹⁸⁾，最初から圧力のかかった状態で溶融するのであるから溶融部は接合面外におしだされるのでわれわれの理論は溶融領域に対してはそのまま適用できない。しかしながらここで注意せねばならぬ一つの重要なことがある。それはあとでアプセットするためには接合部材のある範囲（強度上の要求からきまる）の降伏応力がある程度以下にさがっていないければならないが，これは当然温度分布が関係してくる。Fig. 1.4～Fig. 1.13 によれば，従来の理論による曲線にくらべてわれわれの曲線は全般的に下にあるわけであるから，実際の溶接では従来の理論による電流値，または通電時間より大きな値をとらねばならぬであろう。アプセットをとまうときにはいつもこの注意が必要で，われわれがあえてここでアプセット・バット溶接について述べたのはそのためである。この溶接法はよく似たフラッシュ・バット溶接法についてはⅡでくわしく述べる。

アーク溶接の溶融領域（溶込み）についての研究は相当あるが^{19,20)}，いずれも多くの測定のみつかしいパラメータを適当にとって溶込みの最大深さだけはあわすことも出来よう²¹⁾。しかしアーク圧力によって境界面のへこむ効果や，アークによる溶融粒子が溶融池のなかへある速度で飛込むから，結局熱源の中心が金属中にあるというような効果を考えていない。このような効果はいずれも溶込みを見かけ上増加する。かような効果を考えたうえで融解熱を考慮した熱伝導論によって取扱わねばならない。

酸素・アセチレン焰のようないわゆるガス溶接の溶込みについての研究²¹⁾はほとんどないが，この場合もガス圧力の影響を入れたうえでアーク溶接と同様の取扱いによらねばならない。

最後にこの研究についていろいろと有益な御指導と御討

論をしていただいた大阪大学工学部安藤弘平教授に深く感謝する。また数値計算について御苦勞を願った真崎才次，藤高宏，藤井克弘，相馬昭夫の諸君に厚く感謝する。

註 および 文 献

- 1) 最近の文献の一例として，
A.A. Wells : Heat Flow in Welding, W.J., No. 5, 1952
伊東祐光：点溶接における温度分布について，溶接学会誌，25巻，1号，昭和31年
安藤弘平，中村孝：点溶接における通電加熱冷却に関する熱時間常数について，溶接学会誌，26巻，9号，昭和32年
E.F. Nippes, W.F. Savage, H. Suzuki and W.H. Chang : Mathematical Analysis of the Temperature Distribution during Flash Welding, W.J., No. 6, 1955
内田彰：MIG 溶接心線における熱伝導の一考察，溶接学会誌，25巻，8号，昭和31年
小寺正暁：点溶接の熱伝導について，溶接学会誌，25巻，4号，昭和33年
応和俊雄：溶込みの形，溶接学会誌，25巻，4号，昭和31年
溶接変形へ溶込みの形が重要なことを指摘したものとして，
渡辺正紀，佐藤邦彦：溶接継手の溶込みと溶接条件との関係，溶接学会誌，24巻，12号，昭和30年；25巻，1号，昭和31年
佐藤次彦：移動熱源による平板の変形 1，溶接学会誌，27巻，4号，昭和33年
古典的ではあるが，有名なものとして
D. Rosenthal : Mathematical Theory of Heat Distribution during Welding and Cutting, W.J. No. 3, 1941
- 2) 溶接の熱効率について，ここでは Udin, Funk and Wulff : Welding for Engineers, John Wiley & Sons, Inc. 1954 の 4・8 節の定義によっている。
- 3) たとえば 2) の文献の 4・8 節および 4・9 節
- 4) 1) の Nippes らの文献の Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7 などから明らかである。
- 5) Metal Handbook, 1948 Edition and 1954 Supplement, p. 20, 21, 27 etc.
- 6) 川下研介：高温の熱伝導，機械学会論文集，10巻，39号
- 7) 沢田正雄：伝熱係数が時処位の函数としての熱伝導

- 問題, 機械学会論文集, 1巻, 1, 昭和10年
- 8) 沢田正好: 伝熱係数が時処位の函数としての熱伝導問題補遺, 機械学会論文集, 13巻, 43号, 昭和22年; 15巻, 50号, 昭和24年
- 9) K. Hidaka: A Contribution to Integration of the General Equation of Linear Heat Conduction, Gyophys., Mag., Vol. V, No. 4, 1932
- 10) H. Kornfeld: Zs. f. angew. Math. und Mech., Bd. 7, S. 366, 1927
- 11) Y. Kodaira: Periodic Peatinc and Cooling of a semi-infinite Solid having Conductivity, Specific Heat and Density varying with Temperature, Geophys. Mag., Vol. VII, No. 1, 1933
- 12) 比熱が温度の函数である場合, かような型の境界条件はあとで θ 函数に変換したとき矛盾をおこす。 $K_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} = \alpha(\theta - \theta_r)$; ($\theta_r = \text{const.}$, α は熱伝達係数) の型のものも同様である。
- 13) 8) の文献のうち, 13巻, 43号, 82頁参照
- 14) たとえば, 川下研介: 熱伝導論, 河出書房. この解は(7)の形の解を重畳して求めたものであるが, われわれの場合, 重畳原理は厳密には成立たない. しかしながら Neumann などの解と比較したとき近似的によく一致することが示される。
- 15) これらの数値はいずれも5)の文献によるもので, 広い温度範囲にわたって平均した値をとっている。
- 16) 1) の文献中, 小寺, 伊藤の文献を参照
- 17) 1) の文献中, 小寺の文献を参照
- 18) 2) の文献の p. 52
- 19) 1) の渡辺・佐藤の文献
- 20) 1) の応和の文献
- 21) 1) の佐藤の文献

溶接学会誌投稿規定

(昭和34年4月15日 改正)

- 原稿の種類 溶接工学または技術に関する
 - 論文および報告 (掲載論文に対する討論を含む)
 - 技術資料, 講義解説および翻訳
- 論文および報告の投稿者は原則として会員とする。
- 論文および報告はすべて投稿者の創意にもとづき, いまだ他の学協会誌に掲載されたことのないものに限る。
- 論文および報告は簡単明瞭を旨とし会誌6頁を標準とする。
- 文体は口語体とし, なるべく内閣制定の当用漢字, 現代仮名づかいによること, また仮名は平仮名, 数字はアラビア数字, 適当な邦語がない外国語は片仮名または原語で記すこと。
- 論文および報告にはかならず欧訳題目および欧文摘要 (タイプ書400語以内) を附すること。なお別に100語以内の英文摘要を附すること。
- 図, 写真, 表はなるべく少くし同一事項を図表両方にて表わすことをさけ, 次の要領に従うこと。
 - 挿図はなるべく会誌1/2面以内 (幅最大 140 mm) に縮少し得るよう, 文字および線の太さに注意し挿入の箇所をあらかじめ原稿に指定のこと。
 - 図はそのまま, 縮小しうるようなるべくトレーシングペーパー, オイルペーパー, トレーシングクロスまたは青罫方眼紙などに墨色で記入し図中文字を墨書すること。またインキ類あるいは彩色を施さないこと。
 - 図表および写真はかならず欧文としその内容を表示する簡単な欧文見出しをつけること。ただし翻訳資料に関しては和文とすること。
- 小数点は数字の中央, 3桁以上の数字は3桁ごとに, コマにて区切ること。(例: 12, 345, 678.9)
- 名数は次のごとく記し () 内のごとき書き方をさけること。

km (米), 78.9円 (七十八円九十銭)
1959年3月17日 (千九百五十九年三月十七日)
- 単位は特別の場合を除きメートル式により例えば下記のごとく記すこと。

キロメートル	…km	リットル	……………l
キログラム	…kg	平方キロメートル	…km ²
毎平方センチメートル	…kg/cm ²		
温度 (摂氏)	…°C	トン	……………t
- 脚註または引用の場合は右肩に小さく¹⁾のごとく記すこと。
- 引用文献は著者名, 題目, 雑誌名, 巻(年), 号, 頁の順に記す。
例: E.F. Nippes, "The Weld Heat-affected Zone", W.J., Vol. 38 (1959), No. 1, 1s-18s.
- 勤務先に欧文名を附記すること。
- 掲載原稿に対しては希望に応じて実費にて別刷を提供する。別刷を希望する場合は投稿の際その旨申込むこと。
- 原稿は編集の際に取捨修正することがあるからあらかじめ諒承せられたい。
- 原稿の送付は東京都千代田区神田佐久間町1~11「溶接学会編集委員会」宛のこと。