点加熱による矩形板の収縮の簡易計算方法(第1報)*

前田 豊生** 矢田 敏夫**

Approximate Evaluation of Shrinkage due to Spot Heating on a Rectangular Plate (Report No. 1)*

By Toyoo Maeda** and Toshio Yada**

Abstract

In the previous report, a method was proposed to exactly analyse shrinkage distortion due to spot heating on a rectangular plate. However, it was necessary to solve a set of infinite simultaneous equations for every aspect ratio of the plate and for every location of heated point. As this is rather inconvenient to perform, the authors sought for some methods for approximate analyses.

Analytical expression for the displacement due to a shrinkage source in an infinitely long straight zone should give good approximation when the aspect ratio of a rectangular plate exceeds a certain value. It was shown that the effect of the length diminishes quite rapidly. This leads to the conclusion that the shrinkages chiefly depend on the breadth of the plate, while the length has little effect on them.

It may be reasoned that the effect of the edges further away from heated point can be neglected if the heat is applied on a point in the vicinity of an edge or a corner of the plate. Then the principle of reflection may be taken to simplify the problem. In fact, the formulae have been substantially simplified.

The results obtained through the above analyses would contribute to the derivation of simple approximate formulae.

1. 緒 言

筆者らはさきに有限な大きさの板、とくに矩形板の点加熱による収縮を理論的に求め、その基本的な性質を明らかにしたり、これは任意の局部加熱によって生じる鋼板の収縮変形を考察するための基礎として役立つと考えられる。しかし数値計算を行なう際に、加熱点の位置が異なるごとに、また矩形板の縦横比が異なる度に、無限連立方程式の係数を求めてこの方程式を解くことが必要であった。そのためには電子計算機を利用する必要があるが実用上やや不便である。

この報告は理論解析の結果を実用に便利なものとするための近似計算方法を検討したものである。まず矩形板がある程度細長くなると長さの影響がなくなると考えられるので、無限に長い帯板の点加熱による収縮について解析した。また加熱点の一つの辺または隅に近い場合には、加熱点から遠い辺の影響は無視して差支ない。この場合には鏡像の原理が適用できるので計算が簡単になるはずである。以下に解析の結果を述べる。

2. 従来の解析結果の概要¹⁾

これまでの解析によってえられた結果の概要は次のとおりである。

板の上の一点を局部的に加熱すると、加熱点を含むある領域内で塑性変形が起り、冷却後その部分が収縮してまわりの領域に引張力を及ぼす。この状態は板の中に円孔があって、その周辺に垂直力が作用する。あるいは円孔の中心に“ちぢみの中心” $-\delta$ が生じていると考えることができる。

まず無限板の場合について、平面応力問題として解析する。板の上に複素座標 $z = x + iy$ をとると、 z 平面上の点 z_0 にちぢみの中心 $-\delta$ があるときの Goursat の

Fig. 1 Spot heating in an infinite plane

* 原稿受付 昭和38年12月24日(昭和39年度溶接学会春季全国大会において発表)

** 正員 石川島播磨重工業技術研究所 Member, Ishikawajima-Harima Heavy Industries Co., Ltd. Research Institute

複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ は次のように与えられる (Fig. 1).

$$\varphi(z)=0, \psi(z)=\delta \log (z-z_0) \cdots \cdots \cdots (1)$$

この場合の点 z の x, y 方向の変位をそれぞれ u, v とすると

$$\begin{aligned} u+iv &= \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \varphi(z) - \{z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)}\} \right] \\ &= -\frac{1}{2G} \overline{\psi'(z)} = -\frac{\delta}{2G} \frac{1}{z-z_0} = -\frac{\delta}{2G r'} e^{i\phi} \cdots (2) \end{aligned}$$

ただし $z-z_0=r'e^{i\phi}$

ここに G =剛性率, kg/mm^2 , ν =ポアソン比である.

(2) を書きなおすと

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\delta}{2Gb} \left(\frac{x-x_0}{b} - \frac{y_0}{b} \right) \left(\frac{x-x_0}{b} + \frac{y_0}{b} \right) \\ v &= -\frac{\delta}{2Gb} \left(\frac{x-x_0}{b} + \frac{y_0}{b} \right) \left(\frac{x-x_0}{b} - \frac{y_0}{b} \right) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (3)$$

がえられる. ここに $b(>0)$ は長さのディメンションをもつ任意の定数である.

矩形板の収縮を求めるには (1) の応力関数に適当な応力関数を付加して合成された応力関数が境界条件を満足するようにすればよい. それは適当な等角写像を行なうことによって可能である. いま平面上の原点を中心とし長さ $2a, 2b$ の辺をもつ矩形板上の点 z_0 にちぢみの中心 $-\delta$ があるとき, 収縮は次の式によって与えられる.

$$\left. \begin{aligned} U_P &= -\frac{\delta}{2Gb(1+\nu)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a'_{2n-1} \cos (2n-1)\theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} a'_{2n} \sin 2n\theta \right] \\ V_Q &= -\frac{\delta}{2Gb(1+\nu)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \sin n\phi \right] \end{aligned} \right\} \cdots (4)$$

ここに U_P : 相対する辺上の 2 点 P, P' の間に生じる x 方向の収縮, mm

V_Q : 相対する辺上の 2 点 Q, Q' の間に生じる

$$\left. \begin{aligned} \overline{a_1} + \lambda_1 a_1 &+ 3\lambda_3 a_3 + 5\lambda_5 a_5 + \cdots &= b\gamma \\ \overline{a_2} &+ 2\lambda_3 a_2 + 4\lambda_5 a_4 + 6\lambda_7 a_6 + \cdots &= b\gamma \zeta_0 \\ \overline{a_3} + \lambda_3 a_1 &+ 3\lambda_5 a_3 + 5\lambda_7 a_5 + \cdots &= b\gamma \zeta_0^2 \\ \overline{a_4} &+ 2\lambda_5 a_2 + 4\lambda_7 a_4 + 6\lambda_9 a_6 + \cdots &= b\gamma \zeta_0^3 \\ \cdots &&& \\ \cdots &&& \\ \overline{a_{2n-1}} + \lambda_{2n-1} a_1 &+ 3\lambda_{2n+1} a_3 + 5\lambda_{2n+3} a_5 + \cdots + (2m-1)\lambda_{2n+2m-3} a_{2m-1} + \cdots &= b\gamma \zeta_0^{2n-2} \\ \overline{a_{2n}} &+ 2\lambda_{2n+1} a_2 + 4\lambda_{2n+3} a_4 + 6\lambda_{2n+5} a_6 + \cdots + 2m\lambda_{2n+2m-1} a_{2m} + \cdots &= b\gamma \zeta_0^{2n-1} \\ \cdots &&& \\ \cdots &&& \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (6)$$

Fig. 2 Spot heating on a rectangular plate

y 方向の収縮, mm

(U_P, V_Q はいずれも正の値を収縮とする)

a_n : 加熱点の位置 z_0 と矩形板の縦横比 a/b によって定まる無次元数で連立方程式 (6) の根として与えられる. a_n, a'_n はそれぞれ a_n の実部および虚部である.

θ, ϕ : 点 P, Q の位置を与えるパラメータで, これらの点の座標と次の関係がある.

$$\left. \begin{aligned} P: a &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\theta, y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\theta \\ Q: x &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\phi, b = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\phi \end{aligned} \right\}$$

また C_m は矩形板の縦横比によって定まる定数で式 (5) によって与えられ, 長さのディメンションをもつ.

$$\left. \begin{aligned} C_{2m} &= 0 \\ C_{2m+1} &= \frac{2b P_m(\cos 2\alpha)}{K' 2m+1}, m=0, 1, 2, 3, \cdots \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (5)$$

ここに P_m は Legendre の多項式であり, また α は

$$k = \cos \alpha, \quad k' = \sin \alpha$$

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2 u^2)}}, \quad \frac{K}{K'} = \frac{b}{a}$$

かなり立つように定める.

(3) 式の a_n を定める方程式は (6) で与えられる.

ここに

$\lambda_i: \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \zeta^{-n} / \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \zeta^{n-1}$ を展開してえられる無限べき級数の ζ^{-i} の係数

$$r = 1 / (C_1 + 3C_3\zeta_0^2 + 5C_5\zeta_0^4 + 7C_7\zeta_0^6 + \dots)$$

$$= 1 / \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) C_{2m+1} \zeta_0^{2m}$$

ζ_0 : 加熱点の座標 $z_0 = x_0 + iy_0$ に関するパラメーターで

$$z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \zeta_0^n \text{ の関係がある.}$$

(6) の左辺の係数は矩形板の縦横比 a/b によって定まり、右辺の係数は a/b と加熱点の位置とによって定まる。

3. 帯板の点加熱による収縮

矩形板の縦横比がある程度大になると、無限に長い板（帯板）の概念をもちいて近似計算を行なうことが可能と考えられる。

有限な巾 a をもつ無限に長い帯板の応力問題を考えるために、直線ベリ的一方を y 軸すなわち $x=0$ にとり、他方のへりを $x=a$ とする (Fig. 3). Goursat の複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ はこの y 軸に平行な帯状領域内で 1 価正則であり、遠方では十分早く 0 になるとすれば、これらは第 2 種の Laplace 積分をもちいて次のようにあらわされる²⁾。

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} A(t) dt, \quad \psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} B(t) dt \quad (7)$$

ここに $A(t)$, $B(t)$ は実変数 t (変域 $-\infty < t < \infty$) の関数で一般に複素数値をとる。このときの応力は

$$\begin{aligned} \sigma_x + i\tau_{xy} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})} - \{z\overline{\varphi''(\bar{z})} + \overline{\psi''(z)}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} \{-t\overline{A(\bar{t})} - z\overline{tA(\bar{t})} - t^2\overline{B(\bar{t})}\} dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\bar{t}} \{-tA(t)\} dt. \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となる。

境界条件として $x=0$ および $x=a$ での応力が次のように与えられるとする。

Fig. 3 Spot heating in an infinitely long plate

$$\begin{aligned} [\sigma_x + i\tau_{xy}]_{x=0} &= \int_0^{\infty} \{a(t) \cos yt + b(t) \sin yt\} dt \\ [\sigma + i\tau_{xy}]_{x=a} &= \int_0^{\infty} \{c(t) \cos yt + d(t) \sin yt\} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

そうすると (8) と (9) から $A(t)$, $B(t)$ を決定しそれを (7) に入れて応力関数を求めることができる。その一方 $\varphi(z)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{1}{t\Delta(t)} \left\{ -(1-e^{2at}) \frac{a(t) + ib(t)}{2} \right. \\ &\quad \left. + 2at \frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2} \right. \\ &\quad \left. + (1-e^{2at}) e^{-at} \frac{c(t) + id(t)}{2} - 2at e^{at} \frac{\overline{c(t)} + i\overline{d(t)}}{2} \right\} dt \\ &\quad + \int_0^{\infty} e^{zt} \frac{1}{t\Delta(t)} \left\{ 2at \frac{\overline{a(t)} - i\overline{b(t)}}{2} + (1-e^{-2at}) \frac{a(t) - ib(t)}{2} \right. \\ &\quad \left. - 2at e^{-at} \frac{\overline{c(t)} - i\overline{d(t)}}{2} - (1-e^{-2at}) e^{at} \frac{c(t) - id(t)}{2} \right\} dt \end{aligned} \quad (10)$$

ここに

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= (1-e^{2at})(1-e^{-2at}) + 4a^2t^2 \\ &= -4(\sinh^2 at - a^2 t^2). \end{aligned}$$

である。

さて x 軸上の点 $P(l, 0)$ にちぢみの中心 $-\delta$ がある場合について上記を適用する。まず応力関数を次のようにあらわす。

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0(z) + \varphi_1(z) \\ \psi(z) &= \psi_0(z) + \psi_1(z) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$\varphi_0(z) = 0, \quad \psi_0(z) = \delta \log(z-l) \quad \dots\dots\dots (12)$$

は無限板上の点 $P(l, 0)$ にある $-\delta$ による応力関数に等しく (式 (1) 参照)

$$\varphi_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} A(t) dt, \quad \psi_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} B(t) dt \quad (13)$$

は境界条件を満足させるために付加される応力関数であるとする。

一方の境界 $x=0$ が自由であるという条件は $x=0$ で応力が 0 であることから

$$\begin{aligned} [\sigma_x + i\tau_{xy}]_{x=0} &= [\sigma_x + i\tau_{xy}]_{x=0}^0 + [\sigma_x \\ &\quad + i\tau_{xy}]_{x=0}^1 = 0 \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここに肩の添字 0, 1 はそれぞれ (12), (13) 式の応力関数による応力であることを意味する。

$$\sigma_x + i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})} - \{z\overline{\varphi''(\bar{z})} + \overline{\psi''(z)}\}.$$

であるから (12), (14) によって

$$\begin{aligned} [\sigma_x + i\tau_{xy}]_{x=0} &= -[\sigma_x + i\tau_{xy}]_{x=0}^0 = -\delta [1/(z-l)^2]_{x=0} \\ &= -\delta \frac{l^2 - y^2 - 2ily}{(y^2 + l^2)^2} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ゆえに

$$[\sigma_x]_{x=0}^1 = -\delta \frac{l^2 - y^2}{(y^2 + l^2)^2}, \quad [\tau_{xy}]_{x=0}^1 = \delta \frac{2ly}{(y^2 + l^2)^2}. \quad (16)$$

となる。Fourier 積分によって

Fig. 4 Displacements of a point which is located along the periphery of an infinitely long straight zone, due to spot heating at the centre of the zone

$$\left. \begin{aligned} \frac{l^2 - y^2}{(l^2 + y^2)^2} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos yt \, dt \int_0^\infty \frac{l^2 - \lambda^2}{(l^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda t \, d\lambda \\ &= \int_0^\infty t e^{-lt} \cos yt \, dt \\ \frac{2ly}{(l^2 + y^2)^2} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin yt \, dt \int_0^\infty \frac{2l\lambda}{(l^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda t \, d\lambda \\ &= \int_0^\infty t e^{-lt} \sin yt \, dt \end{aligned} \right\} (17)$$

がえられる (補遺 [1] 参照). (16), (17) によって応力関数 $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ を定めるための境界条件 (9) の第1式の右辺の各項が次のように求められる.

$$a(t) = -\delta t e^{-lt}, \quad b(t) = i\delta t e^{-lt} \dots \dots \dots (18)$$

もう一つの境界 $x=a$ についても同様の解析を行なった

$$= -\delta \int_0^\infty \frac{at \sinh(z-l)t - \frac{1}{2} \cosh(z+l)t + \frac{1}{2} \cosh(z-2a+l)t}{\sinh^2 at - a^2 t^2} dt \dots \dots \dots (20)$$

境界 $x=0$ の上の x, y 方向の変位をそれぞれ $u_{x=0}$, $v_{x=0}$ とすると

$$\left. \begin{aligned} u_{x=0} &= \frac{1}{2G(1+\nu)} \operatorname{Re} [\varphi(z)]_{x=0} \\ &= \frac{\delta}{2G(1+\nu)} \int_0^\infty \frac{at \sinh lt + \frac{1}{2} \cosh lt - \frac{1}{2} \cosh(2a-l)t}{\sinh^2 at - a^2 t^2} \cos yt \, dt \\ v_{x=0} &= \frac{1}{2G(1+\nu)} \operatorname{Im} [\varphi(z)]_{x=0} \\ &= \frac{\delta}{2G(1+\nu)} \int_0^\infty \frac{-at \cosh lt + \frac{1}{2} \sinh lt + \frac{1}{2} \sinh(2a-l)t}{\sinh^2 at - a^2 t^2} \sin yt \, dt \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

となる.

坐標を変換して $y = \pm b$ が自由ベリで, $-\delta$ が原点にある場合 (Fig. 4) の変位を求めるには, (21) 式において x と y , u と v を交換し, $l=b$, $a=2b$ を代入し, また $t=l/b$ によって積分変数を変換して

$$\left. \begin{aligned} v_{y=b} &= \frac{\delta}{2Gb(1+\nu)} \int_0^\infty \frac{2\lambda \sinh \lambda + \frac{1}{2} \cosh \lambda - \frac{1}{2} \cosh 3\lambda}{\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2} \cos\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda \\ u_{y=b} &= \frac{\delta}{2Gb(1+\nu)} \int_0^\infty \frac{-2\lambda \cosh \lambda + \frac{1}{2} \sinh \lambda + \frac{1}{2} \sinh 3\lambda}{\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2} \sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

がえられる。また (22) 式において $x \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_{y=b} = -\frac{\delta}{2Gb} \frac{1}{1+\nu} \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v_{y=b} = 0 \quad \dots\dots(23)$$

となることが証明できる（補遺[2]参照）。

(22), (23)式をもちいて数値計算を行ない図示すると Fig. 4 のようになる。この図によると $|x| > 2b$ のとき変位はほぼ (23) 式の値に収束している。したがって縦横比が 2:1 よりも細長い矩形板の収縮には、ほとんど長さの影響があらわれないと考えてよいことがわかる。とくに x 方向の変位は $|x| > b$ でほとんど変化しなくなっているの、縦収縮に対しては矩形板の形状の影響はほとんどないと考えてよい。

4. 鏡像による近似

加熱点が矩形板の縁または隅に近い場合には、鏡像の原理をもちい、加熱点に近い縁の影響を無視して収縮を計算しても、比較的良好な近似値がえられると考えられる。

(1) 応力関数の解析接続³⁾

弾性体が半平面 $y > 0$ を占める半無限板で近似できて、実数軸 $y=0$ が自由ベリであるとする (Fig. 5)。半平面上で正則、 x 軸上で連続な複素応力関数を $\varphi(z)$, $\psi(z)$ とすると、自由ベリの条件は

$$y=0 \quad \overline{\varphi(z)} + \{z\varphi'(z) + \psi'(z)\} = 0$$

補助関数として新たに

$$X(z) = z\varphi'(z) + \psi'(z) \quad \dots\dots(24)$$

を定義すると、 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ の正則点では $X(z)$ も正則であり、逆に $\varphi(z)$, $X(z)$ の正則点では $\psi(z)$ も正則である。これをもちい、また

$$y=0 \quad \text{の上で} \quad \bar{z}=z$$

であることを考え合わせると

$$y=0 \quad \overline{\varphi(z)} = -X(z)$$

がなり立つから、実数軸に関する半平面 $y > 0$ の鏡像 $y < 0$ 内で

$$\varphi(z) = -\overline{X(z)}, \quad X(z) = -\overline{\varphi(z)}. \quad \dots\dots(25)$$

として応力関数が解析接続される。

y 軸を自由ベリとする半平面 $x > 0$ (Fig. 6) の場合には、自由ベリの条件は

$$x=0 \quad \overline{\varphi(z)} + \{z\varphi'(z) + \psi'(z)\} = 0$$

Fig. 5 Half plane, $y > 0$

Fig. 6 Half plane, $x > 0$

補助関数として

$$Y(z) = -z\varphi'(z) + \psi'(z) \quad \dots\dots(26)$$

を定義する。

$$x=0 \quad \bar{z} = -z$$

であるから

$$x=0 \quad \text{の上で} \quad \overline{\varphi(z)} = -Y(z)$$

したがって半平面 $x > 0$ の虚数軸に関する鏡像 $x < 0$ 内で

$$\varphi(z) = -\overline{Y(-z)}, \quad Y(z) = -\overline{\varphi(-z)} \quad \dots\dots(27)$$

として応力関数が解析接続される。

(2) 加熱点が矩形板の一つの縁に近い場合の変位

矩形板の一つの自由ベリを x 軸にとる。加熱点 P_0 が x 軸の近くにあるとき、 x 軸に関する P_0 の鏡像を P_1 として (Fig. 7), x 軸上の任意の点の変位 $v_{y=0}$ を次のようにして求めることができる。

半平面 $y > 0$ 内の点 $z_0 = x_0 + iy_0$ にちぢみの中心 $-\delta$ があるときの応力関数の主要部を次のようにあらわす。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0(z) + \varphi_1(z) \\ \psi'(z) &= \psi'_0(z) + \psi'_1(z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(28)$$

ここに $\varphi_0(z)$, $\psi'_0(z)$ は実像 P_0 による応力関数の主要部で

$$\varphi_0(z) = 0, \quad \psi'_0(z) = \delta / (z - z_0) \quad \dots\dots(29)$$

である。また $\varphi_1(z)$, $\psi'_1(z)$ は P_0 の鏡像 P_1 による応力関数の主要部であるが、これは応力関数 (29) を半平面 $y > 0$ から $y < 0$ に解析接続することによって求めら

Fig. 7 Reflected image with respect to the x -axis

れる。この場合の (24) 式に相当する補助関数を $X_0(z)$ とすると (25), (29) によって

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= -\bar{X}_0(z) = -\{z\bar{\varphi}_0'(z) + \bar{\psi}_0'(z)\} \\ &= -\delta/(z-\bar{z}_0)\end{aligned}$$

また

$$X_1(z) = -\bar{\varphi}_0(z) = 0 = z\varphi_1'(z) + \psi_1'(z)$$

したがって

$$\psi_1'(z) = -z\varphi_1'(z) = -\delta z/(z-\bar{z}_0)^2.$$

がえられる。以上をまとめて

$$\varphi_1(z) = -\delta/(z-\bar{z}_0), \quad \psi_1'(z) = -\delta z/(z-\bar{z}_0)^2 \dots (30)$$

を得る。故に全応力関数の主要部は

$$\varphi(z) = -\frac{\delta}{z-\bar{z}_0}, \quad \psi'(z) = \delta \left\{ \frac{1}{z-\bar{z}_0} - \frac{z}{(z-\bar{z}_0)^2} \right\} \dots (31)$$

となる。

自由ベリ $y=0$ の上の点の変位は

$$[u+iv]_{y=0} = \frac{1}{2G(1+\nu)} [\varphi(z)]_{y=0}$$

であるから (31) を代入すると

$$\begin{aligned}u_{y=0} &= -\frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \left\{ \frac{x}{b} - \frac{x_0}{b} \right\}^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2 \dots (32) \\ v_{y=0} &= \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \left\{ \frac{x}{b} - \frac{x_0}{b} \right\}^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2\end{aligned}$$

がえられる。ここに $b(>0)$ は長さのディメンションをもつ任意の定数である。このようにして求めた値は無限板上の点 P_0 に $-\delta$ がある場合の x 軸上の点の変位 (3) 式で $y=0$ とおいたものの $4/(1+\nu)$ 倍に相当する。

(3) 加熱点が矩形板の隅に近い場合

矩形板の自由ベリを x, y 軸上にとる。加熱点 P_0 が原点に近い場合には、両軸に関する 4 個の鏡像点 P_1, P_2, P_3 および P_4 を考慮しなければならない。(Fig. 8)。ここに P_3, P_4 はそれぞれ P_1, P_2 の y および x 軸に関する鏡像であるとする。 x 軸のみが自由ベリの場合と

Fig. 8 Reflected images with respect to the x - and y -axes

同様に応力関数の主要部を次のようにあらわす。

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z) + \varphi_4(z) \\ \psi'(z) &= \psi_0'(z) + \psi_1'(z) + \psi_2'(z) + \psi_3'(z) + \psi_4'(z)\end{aligned} \quad (33)$$

右辺の添字 0, 1 をもつ項はそれぞれ (29), (30) 式で与えられているものと同じである。添字 2, 3, 4 をもつものはそれぞれ次のように求められる。

($P_2: -\bar{z}_0$) すなわち ($P_0: z_0$) の y 軸に関する鏡像による応力関数の主要部は

$$\begin{aligned}\varphi_2(z) &= -\bar{\varphi}_0(-z) = -[z\bar{\varphi}_0'(-z) + \bar{\psi}_0'(-z)] \\ &= \delta/(z+\bar{z}_0), \\ Y_2(z) &= -\bar{\varphi}_0(-z) = -z\varphi_2'(z) + \psi_2'(z) = 0, \\ \psi_2'(z) &= z\varphi_2'(z) = -\delta z/(z+\bar{z}_0)^2.\end{aligned} \quad (34)$$

($P_3: -z_0$) すなわち ($P_1: \bar{z}_0$) の y 軸に関する鏡像による応力関数の主要部は

$$\begin{aligned}\varphi_3(z) &= -\bar{\varphi}_1(-z) = -[z\bar{\varphi}_1'(-z) + \bar{\psi}_1'(-z)] \\ &= -\delta(z-\bar{z})/(z+z_0)^2, \\ Y_3(z) &= -\bar{\varphi}_1(-z) = -z\varphi_3'(z) + \psi_3'(z), \\ \psi_3'(z) &= \delta \left[\frac{-z\{(z+z_0)(1-dz/dz)-2(z-\bar{z})\}}{(z+z_0)^3} - \frac{1}{z+z_0} \right].\end{aligned} \quad (35)$$

($P_4: -z_0$) すなわち ($P_2: -\bar{z}_0$) の x 軸に関する鏡像による応力関数の主要部は

$$\begin{aligned}\varphi_4(z) &= -\bar{X}_2(z) = -\{z\bar{\varphi}_2'(z) + \bar{\psi}_2'(z)\} = \delta(z+\bar{z})/(z+z_0)^2, \\ X_4(z) &= -\varphi_2(z) = z\varphi_4'(z) + \psi_4'(z), \\ \psi_4'(z) &= \delta \left[\frac{-z\{(z+z_0)(1+dz/dz)-2(z+\bar{z})\}}{(z+z_0)^3} - \frac{1}{z+z_0} \right].\end{aligned} \quad (36)$$

変位を計算するには

$$u+iv = \frac{1}{2G(1+\nu)} \{ \varphi(z) - \{z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)}\} \}$$

に (33) および (29), (30), (34), (35), (36) を代入すればよい。特に一方の自由ベリである x 軸上の点の y 方向の変位は

$$\begin{aligned}[v]_{y=0} &= [v_0]_{y=0} + [v_1]_{y=0} + [v_2]_{y=0} + [v_3]_{y=0} \\ &+ [v_4]_{y=0} \dots (37)\end{aligned}$$

とあらわされ、

$$\begin{aligned}\left[\frac{v_0}{\delta} \right]_{y=0} &= \frac{y_0}{b} \\ \left[\frac{v_1}{\delta} \right]_{y=0} &= \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{y_0}{b} \left\{ \left(\frac{x}{b} - \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2 \right\}\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{v_2}{\delta} \right]_{y=0} &= \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2} \\ &\quad - \frac{4 \frac{x}{b} \frac{y_0}{b} \left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)}{\left\{ \left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2 \right\}^2} \\ \left[\frac{v_3}{\delta} \right]_{y=0} &= \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2} \\ \left[\frac{v_4}{\delta} \right]_{y=0} &= \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2} \\ &\quad - \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{4 \frac{x}{b} \frac{y_0}{b} \left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)}{\left\{ \left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2 \right\}^2} \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

であるから

$$\begin{aligned} [v]_{y=0} &= \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2} \\ &\quad + \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2} \\ &\quad + \frac{\delta}{2Gb} \left[\frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{1+\nu} \frac{4 \frac{x}{b} \frac{y_0}{b} \left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)}{\left\{ \left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} \right)^2 \right\}^2} \right] \dots (39) \end{aligned}$$

となる。(39)の右辺第1項は x 軸のみを自由ベリとする半平面上の点 P_0 に、また第2項は P_0 の y 軸に関する鏡像点 P_2 にそれぞれ $-\delta$ があるときの x 軸上の点の変位をあらわす式に等しい。そこで右辺第3項を無視することになると、加熱点が原点に近い場合の x 軸上の点の変位は、 x 軸を自由ベリとする半平面に関する計算値と、これを y 軸で折返した値との和 (Fig. 9) で近似で

Fig. 9 Displacement due to spot heating near a corner

きることになる。

5. 結 言

局部加熱によって有限な大きさの鋼板に生じる収縮変形を理論的に解析することは一般にはかなり困難である。著者らは比較的簡単な場合、すなわち矩形板の一点加熱によって生じる収縮を理論的に求めることは可能であることをさきに明らかにしたが、計算は相当に面倒であった。

この報告は簡便な略算式を導くための準備としてちぢみの中心が存在する場合の帯板の変位、および鏡像の原理の適用について解析し、矩形板の形状の影響と計算式の簡略化の可能性を検討したものである。えられた結果の概要は次のとおりである。

(1) 無限に長い帯板の上の一点にちぢみの中心がある場合の変位は解析的に表現することが可能である。数値計算の結果によると、自由辺上の点の変位は加熱点から遠ざかるにつれて急速に一定値に収束する。これは加熱点から遠い領域の応力が急速に減少することを意味し、矩形板の縦横比は点加熱による収縮にほとんど影響をもたないことを意味する。

(2) 加熱点が板の一つの自由辺に近い場合には鏡像の原理を応用して計算式を著しく簡略化することができる。この方法で求めた変位は無限板に関する計算式によってえられる値の $4/(1+\nu)$ 倍の値になることが示される。

(3) 加熱点が板の隅に近い場合にも鏡像の原理を利用して自由辺上の点の変位を求めることができる。この場合の一つの自由ベリの上の点の変位は、このへりに関して鏡像の原理を適用してえられる変位と、これを他の自由ベリで折り返したものと和で近似できる。すなわち近似的には半無限板の変位がもう一つの自由ベリが存在によって反射されると考えられる。

謝 辞

この研究を行なうにあたり終始御鞭撻下さった当技術研究所中村所長、秋田構造研究室長に深く感謝いたします。また計算および実験は構造研究室の谷山、中村、山岡の三君に負うところがきわめて大きい。心から感謝の意を表します。

文 献

- 1) T. Maeda, "Shrinkage due to spot heating on a finite-sized carbon steel plate" IIW-Document No. X-296-62 (1962), 1~13
- 2) 森口繁一, "2次元弾性論" 岩波講座現代応用数学 B. 7-a (1957), 56
- 3) 同上, 70

補 遺 [1]

$$(1) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 - l^2}{(\lambda^2 + l^2)^2} \cos t\lambda d\lambda = -te^{-lt} \quad \text{の証明}$$

左辺の積分を次のように書きかえる。

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 - l^2}{(\lambda^2 + l^2)^2} \cos t\lambda d\lambda \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + l^2} \cos t\lambda d\lambda - \int_0^{\infty} \frac{2l^2}{(\lambda^2 + l^2)^2} \cos t\lambda d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (a1)$$

(a1) の右辺第 1 項は複素積分の公式

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-a}, \quad a > 0.$$

から直ちに

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + l^2} \cos t\lambda d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\pi}{l} e^{-lt}. \quad (a2)$$

(a2) の被積分項は l に関して連続、微分可能であるから両辺を l で微分して

$$\int_0^{\infty} \frac{2l^2}{(\lambda^2 + l^2)^2} \cos t\lambda d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\pi}{l} (1+lt) e^{-lt}. \quad (a3)$$

がえられる。

(a2), (a3) を (a1) に代入すれば所要の関係がえられる。

$$(2) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2l\lambda}{(l^2 + \lambda^2)^2} \sin t\lambda d\lambda = te^{-lt} \quad \text{の証明}$$

(a3) の両辺を t で微分すればただちに所要の関係がえられる。

補 遺 [2]

帯板の収縮に関する定積分(22)の収束性を検討する。まず記号を簡単にするため積分を次のように書きなおす。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} \frac{2\lambda \sinh \lambda + \frac{1}{2} \cosh \lambda - \frac{1}{2} \cosh 3\lambda}{\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2} \cos\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} L(\lambda) \cos\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda \\ I_2 &= \int_0^{\infty} \frac{-2\lambda \cosh \lambda + \frac{1}{2} \sinh \lambda + \frac{1}{2} \sinh 3\lambda}{\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2} \sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} M(\lambda) \sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda. \end{aligned} \quad \dots(a4)$$

1) x が有限の場合

$\lambda=0$ のとき (a4) の $L(\lambda)$, $M(\lambda)$ の分母、分子はいずれも 0 になる。これらを λ のべき級数に展開すると

$$L(\lambda) = -\frac{\frac{4}{3}\lambda^4 + \frac{22}{45}\lambda^6 + \frac{619}{6720}\lambda^8 + \dots}{\frac{16}{3}\lambda^4 + \frac{128}{45}\lambda^6 + \frac{256}{315}\lambda^8 + \dots}$$

$$= -\frac{\frac{1}{4} \frac{1 + \frac{11}{30}\lambda^2 + \frac{619}{8960}\lambda^4 + \dots}{1 + \frac{8}{15}\lambda^2 + \frac{16}{105}\lambda^4 + \dots}}$$

$$\therefore \lambda \rightarrow 0 \text{ のとき } L(\lambda) \cos\left(\frac{x}{b}\lambda\right) \rightarrow -\frac{1}{4} \quad (a5)$$

また

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= -\frac{\frac{4}{3}\lambda^3 + \frac{14}{15}\lambda^5 + \frac{31}{144}\lambda^7 + \dots}{\frac{16}{3}\lambda^4 + \frac{128}{45}\lambda^6 + \frac{256}{315}\lambda^8 + \dots} \\ &= -\frac{\frac{1}{4\lambda} \frac{1 + \frac{7}{10}\lambda^2 + \frac{31}{192}\lambda^4 + \dots}{1 + \frac{8}{15}\lambda^2 + \frac{16}{105}\lambda^4 + \dots}} \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda \rightarrow 0 \text{ のとき } M(\lambda) \sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right) \rightarrow -\frac{\sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right)}{4\lambda} \rightarrow -\frac{x}{4b} \dots (a6)$$

ゆえに $\lambda \rightarrow 0$ のとき I_1, I_2 の被積分項は有限である。

$$\text{次に } \lambda \rightarrow \infty \text{ のときは } \cosh \lambda \rightarrow \frac{1}{2} e^\lambda, \sinh \lambda \rightarrow \frac{1}{2} e^\lambda$$

であるから

$$\lambda \rightarrow \infty \text{ のとき } L(\lambda) \rightarrow -e^{-\lambda}, M(\lambda) \rightarrow -e^{-\lambda} \dots (a7)$$

となる。したがって正数 p, q ($q > p$) を十分大にとれば任意の $\delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \int_p^q |L(\lambda)| d\lambda &< \int_p^q (e^{-\lambda} + \epsilon_1) d\lambda = -e^{-q} + e^{-p} + \epsilon_1(q-p) \\ &< -\epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1(q-p) < \delta. \end{aligned} \quad (a8)$$

とすることができる。

さて $L(\lambda)$ は常に負であることを考慮すると

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_0^{\infty} L(\lambda) \cos\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda \right| \leq \int_0^{\infty} |L(\lambda) \cos\left(\frac{x}{b}\lambda\right)| d\lambda \\ &< \int_0^{\infty} |L(\lambda)| d\lambda \end{aligned} \quad (a9)$$

のように書くことができる。(a8)によって積分 $\int_0^{\infty} |L(\lambda)| d\lambda$ は収束する。したがって (a9) によって積分 I_1 が収束することが証明された。 I_2 の収束性も同様に証明できる。

2) $x \rightarrow \infty$ の場合

2-1) まず I_1 について $x \rightarrow \infty$ の場合を検討する。 I_1 を書きなおして

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} L(\lambda) \cos\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda = \int_0^{\infty} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{2p}} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{(4n+2)\pi}{2p}}^{\frac{(4n+3)\pi}{2p}} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda. \end{aligned}$$

とおく。 $-L(\lambda)$ は有限の正の値をとり、かつ単調減少であるから、正数 M を適当にとり $p > M$ とすれば任意の正数 $\epsilon_1 > 0$ に対し、区間 $\left[\frac{(4n-1)\pi}{2p}, \frac{(4n+1)\pi}{2p}\right]$ において

$$0 < -L(\lambda) + L\left(\frac{(4n+1)\pi}{2p}\right) < \varepsilon_1$$

とすることができる。したがって

$$\begin{aligned} 0 &< -\int_{\frac{(4n-1)\pi}{2p}}^{\frac{(4n+1)\pi}{2p}} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda \\ &+ \int_{\frac{(4n-1)\pi}{2p}}^{\frac{(4n+1)\pi}{2p}} L((4n+1)\pi/2p) \cos p\lambda d\lambda \\ &< \varepsilon_1 \int_{\frac{(4n-1)\pi}{2p}}^{\frac{(4n+1)\pi}{2p}} \cos p\lambda d\lambda \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} 0 &< -\int_{\frac{(4n-1)\pi}{2p}}^{\frac{(4n+1)\pi}{2p}} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda \\ &< \frac{2}{p} \left\{ -L\left(\frac{(4n+1)\pi}{2p}\right) + \varepsilon_1 \right\} \dots\dots\dots(a10) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} 0 &< -\int_{\frac{(4n-1)\pi}{2p}}^{\frac{(4n+3)\pi}{2p}} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda \\ &< \frac{2}{p} \left\{ L\left(\frac{(4n+1)\pi}{2p}\right) + \varepsilon_2 \right\} \dots\dots\dots(a11) \end{aligned}$$

となることが証明できる。(a10) と (a11) を加えると

$$0 < -\int_{\frac{(4n-1)\pi}{2p}}^{\frac{(4n+3)\pi}{2p}} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda < \frac{2}{p} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} 0 &< -\int_{\frac{3\pi}{2p}}^{\infty} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{(4n-1)\pi}{2p}}^{\frac{(4n+3)\pi}{2p}} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{p} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (a12)$$

がえられる。いま $p \rightarrow \infty$ かつ $\frac{n}{p} = O(1)$ とすれば

$$0 < -\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\frac{3\pi}{2p}}^{\infty} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda < h, \quad h = O(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

となる。

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{3\pi}{2p}} L(\lambda) \cos p\lambda d\lambda = 0$$

となることは容易に示されるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} L(\lambda) \cos\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} I_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(a13)$$

となることがわかる。

2-2) I_2 においては $\lambda \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ のとき

$$M(\lambda) \sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right) \rightarrow -\frac{x}{4b} \rightarrow -\infty$$

となる。そこで

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{21} + I_{22} \\ &= \int_0^p M(\lambda) \sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda + \int_p^{\infty} M(\lambda) \sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda \end{aligned} \quad (a14)$$

とおくと, I_1 の場合と同様にして

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_{22} = 0 \quad \dots\dots\dots(a15)$$

がえられる。

次に $\delta > 0$ を適当にとれば $0 < p < \delta$ のとき

$$\left| I_{21} - \left(-\frac{1}{4} \int_0^p \frac{\sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right)}{\lambda} d\lambda \right) \right| < \varepsilon$$

$\frac{x}{b}\lambda = t$ とおくと

$$\int_0^p \frac{\sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right)}{\lambda} d\lambda = \int_0^{\frac{x}{b}p} \frac{\sin t}{t} dt$$

ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_{21} = -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{8} \quad \dots\dots\dots(a16)$$

(a14), (a15), (a16) によって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_2 = -\frac{\pi}{8} \quad \dots\dots\dots(a17)$$

がえられる。