点加熱による矩形板の収縮の簡易計算方法

(第2報)*

前田 豊生** 矢田 敏夫**

Approximate Evaluation of Shrinkage due to Spot Heating
on a Rectangular Plate (Report No. 2)*

By Toyoo Maeda** and Toshio Yada**

Abstract

In the previous reports, an analytical method was proposed to study shrinkage distortion due to spot heating on a rectangular plate. First, a method for exact analysis was presented. Then several methods of approximate analyses were sought for.

In this report, approximate formulae were deduced by combining the results from the rigorous and the approximate analyses with those of numerical calculations. These formulae are simple and self-explanatory, therefore very convenient to apply in practice. They also lead to a clear understanding of characteristic features of shrinkage distortion in rectangular plates.

For example, the formulae indicate that the shrinkages chiefly depend on the breadth of the plate, while they are little affected by the length. It is also shown that if heat is applied on a point far away from the plate edges, the length of the plate reduces approximately by $2\pi\delta/2bE$, where $-\delta$, $2b$ and E designate the magnitude of shrinkage source, the breadth and Young's modulus of the plate, respectively. The quantity $2\delta/2bE$ is the fundamental value which appears in all the exact or approximate expressions.

Calculated values from the approximate formulae satisfactorily agreed with experimental ones.

The results obtained through the present investigation are expected to provide a basis for the analysis of shrinkages in any locally heated plates.

1. 緒 言

筆者らはさきに矩形板の点加熱による収縮を理論的に求める方法について報告し、また計算を容易にするため帯板の変位について解析して矩形板の長さの影響を調べ、また鏡像の原理を応用して計算式の簡略化の可能性を検討した¹⁾。

この報告はこれらの解析結果を利用して、実用に便利な略算式を導くことを試みたものである。

2. 理 論 式

既報の解析によってえられた理論式の主要なものを以下に列記する。

1) 無限板の場合 (Fig. 1)

無限板上の点 $z_0 = x_0 + iy_0$ にちぢみの中心 $-\delta$ がある場合の点 $z = x + iy$ の変位は次の式であらわされる。

Fig. 1 Spot heating in an infinite plane

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\delta}{2Gb} \frac{\frac{x}{b} - \frac{x_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} - \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{y_0}{b}\right)^2} \\ v &= -\frac{\delta}{2Gb} \frac{\frac{y}{b} - \frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} - \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{y_0}{b}\right)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし $b(>0)$ は長さのディメンションをもつ任意の定数である。

2) 矩形板の場合 (Fig. 2)

両辺の長さがそれぞれ $2a$, $2b$ の矩形板 $ABCD$ 上の点 $z_0 = x_0 + iy_0$ にちぢみの中心 $-\delta$ がある場合の、辺

* 原稿受付 昭和38年12月24日 (昭和39年度溶接学会春季全国大会において発表)

** 正員 石川島播磨重工業KK技術研究所 Member, Ishikawajima-Harima Heavy Industries Co., Ltd. Research Institute

Fig. 2 Spot heating on a rectangular plate

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 上の点 P , Q のそれぞれ x , y 方向の変位を u_P , v_Q とすると

$$\left. \begin{aligned} u_P &= \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos n\theta - a_n' \sin n\theta) \\ v_Q &= \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \sin n\phi + a_n' \cos n\phi) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに θ , ϕ はそれぞれ P , Q の座標に関するパラメータであり, 係数 a_n , a_n' は矩形板の縦横比 a/b および加熱点の位置の関数で, これらによって定まる無限元一次連立方程式を解くことによってえられる無次元の実数である。

3) 帯板の場合 (Fig. 3)

巾が $2b$ の無限に長い帯板の中心線上に x 軸をとる。原点にちぢみの中心 $-\delta$ があるとき, 一つの自由辺 $y=b$ 上の点の変位は次の式であらわされる。

Fig. 3 Spot heating in an infinitely long plate

$$\left. \begin{aligned} u_{y=b} &= \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \int_0^{\infty} \frac{-4\lambda \sinh \lambda + \cosh \lambda + \cosh 3\lambda}{2 \sinh^2 2\lambda - 8\lambda^2} \sin\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda \\ v_{y=b} &= \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \int_0^{\infty} \frac{4\lambda \cosh \lambda + \sinh \lambda - \sinh 3\lambda}{2 \sinh^2 2\lambda - 8\lambda^2} \cos\left(\frac{x}{b}\lambda\right) d\lambda \end{aligned} \right\} \quad \dots (3)$$

無限に遠い点 ($x \rightarrow \infty$) の変位は次の値に収束する。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_{y=b} = -\frac{\delta}{2Gb} \frac{1}{1+\nu} \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v_{y=b} = 0 \quad \dots (4)$$

4) 鏡像原理の応用

4-a) 加熱点が一つの辺に近いとき (Fig. 4)

ちぢみの中心 $-\delta$ が x 軸を自由べりとする半平面 $y > 0$ の自由べりに近いとき, 鏡像原理を適用して x 軸上の点の変位を求めると次の式がえられる。

$$v_{y=0} = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} - \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} \quad \dots (5)$$

ここに $b(>0)$ は長さのディメンションをもつ任意の定数である。

Fig. 4 Reflected image with respect to the x -axis

4-b) 加熱点が板の隅に近いとき (Fig. 5)

x , y 両軸を自由べりにとる。 $-\delta$ が原点附近にあるとき, 4個の鏡像 P_1 , P_2 , P_3 , P_4 を考慮して x 軸上の点の y 方向の変位を求めると次の近似式がえられる。

Fig. 5 Reflected images with respect to the x - and y -axes

$$v_{y=0} = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \left\{ \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} - \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} + \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} \right\} \quad \dots (6)$$

ここに $b(>0)$ は長さのディメンションをもつ任意の定数である。(6)式でえられる値は x 軸のみが自由べりで

Fig. 6 Reflected image of P_0 with respect to the y -axis

P_0 に $-\delta$ があるときの変位 (5) と, P_0 の y 軸に関する鏡像 P_2 (Fig. 6) に $-\delta$ があるときの変位を加え合わせたものに等しい。あるいは (5) 式でえられる値と, それを y 軸でおりかえたものとの和に等しい

Fig. 7. Displacement due to spot heating near a corner

(Fig. 7) といってもよい。

3. 略 算 式

(1) 加熱点が矩形板の辺から遠いときの収縮

加熱点が矩形板のいずれの辺からも遠い場合には、鏡像原理を適用すると誤差が大きくなるので採用できない。帯板に関する解析結果によれば矩形板の長さの影響はきわめて小さいから、帯板の式（加熱点が原点にあるときは（3）式）をもちいて計算すれば、精度のよい近似値がえられると考えられる。この計算は数値積分によって容易に実行できるが、実用の便を考慮してさらに式を簡略化することを試みた。

もっとも簡単な計算式は無限板に関する式（1）であるからこれによってえられる値と、厳密式（2）によってえられる値とを比較してみよう。

1.1) 横収縮

$a/b=1$ および 2 の矩形板の y 軸上の点を加熱したときの、 y 方向の変位 v_0 と加熱点の位置との関係を（2）式をもちいて厳密に計算しプロットすると Fig. 8 のようになる。図からわかるように、 a/b の二つの値に対して v_0 の値はほとんど同じ曲線（Fig. 8 の実線）の上に乗っている。帯板の場合の変位に対する板の長さの影響がきわめて小さかったことと考え合わせると、 $b \leq a$ な

Fig. 8 Transverse displacement v_0 due to heating a point located along the y -axis of a rectangular plate

る矩形板の横方向の変位 v_0 は板の巾 $2b$ によって定まり、長さ $2a$ にはほとんど影響されないことがわかる。

次におなじ v_0 の値を無限板について求めるには、（1）式において $x=x_0=0$, $y=b$ とおいて

$$v_0 = -\frac{\delta}{2Gb} \frac{1}{1-\frac{y_0}{b}} \quad \dots\dots\dots(7)$$

がえられる。これをおなじ図の上にプロットすると点線のようにになる。

今 v_0 の矩形板および無限板に関する値をそれぞれ $[v_0]_0$ および $[v_0]_\infty$ であらわして、両者の比をとると Fig. 9 の実線のようにになる。これはおなじ図上の点線で示される直線 $\frac{2}{1+\nu}(1+\frac{y_0}{b})$ で近似しても大きな誤差はないであろう。すなわち

Fig. 9 Ratio of transverse displacements in rectangular and infinite plates, due to heating on a point located along the y -axis

$$[v_0]_0/[v_0]_\infty = \frac{2}{1+\nu} \left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \quad \dots\dots\dots(8)$$

変位を求める点が y 軸上になくても、 y 軸からあまり離れていないときには、矩形板と無限板の変位の比は（8）式で近似しても差支ないであろう。このときの無限板の変位 $v_{y=b}$ を v_b とかき、（1）式に $x_0=0$, $y=b$ を代入して

$$v_b = -\frac{\delta}{2Gb} \frac{1-\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(1-\frac{y_0}{b}\right)^2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

となる。

以上を総合すると、巾 $2b$ の矩形板の中央部付近の点を加熱したときに生じる横収縮は、（9）式で計算される無限板の変位に（8）式の係数を乗じて、次のような近似式をもちいて計算できると考えられる。

$$V = [-v_b + v_{-b}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta}{2Gb} \frac{1 - \frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{y_0}{b}\right)^2} \times \frac{2}{1+\nu} \left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \\
&+ \frac{\delta}{2Gb} \frac{1 + \frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)^2} \times \frac{2}{1+\nu} \left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \quad \dots(10) \\
&= \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{x}{b}\right)^2 + 1 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 \right\} \right] \\
&\quad \left/ \left[\left\{ \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{y_0}{b}\right)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)^2 \right\} \right] \right.
\end{aligned}$$

とくに $x=0, y_0=0$ の場合には

$$V_{x=0, y_0=0} = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \quad \dots(11)$$

となる。これは加熱点を通る線上で測った横収縮 (すなわち巾の減少の最大値) の近似値である。

1.2) 縦収縮

まず加熱点が x 軸上にある場合について検討する。 $a/b=1$ および 2 の矩形板において、板の短辺から加熱点までの距離を x 軸上で測った値を d とし、この軸上での縦収縮 U_0 を (2) 式をもちいて厳密に計算しプロットすると Fig. 10 のようになる。 U_0 の値は $d/b \geq 4/\pi$ になるとほとんど一定になることがわかる。(わずかの誤差を許容すれば $d/b \geq 1$ ならば U_0 はほとんど一定としてよい。ここで $d/b \geq 4/\pi$ とした理由については後述する。) 帯板に関する解析によってえられた (4) 式から、 U_0 の収束値は $\frac{\delta}{2Gb} \frac{\pi}{1+\nu}$ であることがみちびかれる。すなわち

$$U_0 \doteq \frac{\delta}{2Gb} \frac{\pi}{1+\nu}, \quad \frac{d}{b} \geq \frac{4}{\pi} \quad \dots(12)$$

Fig. 10 Longitudinal shrinkage vs, distance between a plate edge and a heated point located along the x -axis

なお縦収縮の板巾に関する平均値 $\bar{U}$ は、おなじ図から加熱点の位置にかかわらず

$$\bar{U} \doteq \frac{\delta}{2Gb} \frac{\pi}{1+\nu} \quad \dots(13)$$

となることがわかる。

次に加熱点が x 軸上でない場合を検討する。この場合には板に面内曲り変形が生じると考えられ、理論値および実験値をプロットした Fig. 20 (後出) にもそのことが示されている。今簡単な仮定の下に加熱点が $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$ にあるときに生じる曲り量 θ を計算すると次の式がえられる (補遺参照)。

Fig. 11 Longitudinal shrinkage vs, location of heated point along the y -axis of a rectangular plate, where $a:b=2:1$

$$\theta \doteq \frac{\delta}{2Gb^2} \frac{3\pi}{2(1+\nu)} \frac{y_0}{b} \quad \dots(14)$$

(2) 式をもちいてこのときの U_0 を計算し、その値から (14) 式で計算される曲り変形によって生じる変位を差引くと、 U_0 は Fig. 11 のようにほとんど一定になる。したがって加熱点が x 軸上でないときの縦収縮は、実質的には (12) 式で与えられる値にほぼ等しいことがわかる。見掛けの縦収縮、すなわち相対する2点間の直距離の測定値の加熱前後の変化を求めるには、(14) 式の曲り変形によって生じる変位を考慮しなければならない。

(2) 加熱点の一つの辺に近いときの収縮

加熱点が矩形板の一つの辺に近いときには、他の辺の影響を無視して鏡像の原理を適用することができる。このときの収縮は (他の辺の影響を無視しているから) 変位の式 (5) をそのままもちいれればよい。Fig. 4 の場合の横収縮は

$$V = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x-x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} \quad \dots(15)$$

となる。縦収縮もおなじ形の式で計算すればよい。

なお (15) 式に対応する値を無限板上で求めるには (1) 式で $y=0$ において

$$V_{\infty} = \frac{\delta}{2Gb} \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x-x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2}$$

となり、(15) 式の値は V_{∞} の $4/(1+\nu)$ 倍になっている。すなわち自由ペリの存在は収縮に対して $4/(1+\nu)$ 倍の寄与をすることになる。

加熱点が x 軸上にある場合の縦収縮 U_0 (Fig. 10) に対してもおなじ式が適用できる。この場合には (15) 式で $x=x_0=y=0$, $y_0=d$ において

$$U_0 = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \frac{1}{d/b} = \frac{\delta}{2Gd} \frac{4}{1+\nu}, \quad \frac{d}{b} < \frac{4}{\pi} \quad \dots\dots(16)$$

がえられる。(16) 式の U_0 の値は加熱点の短辺からの距離 d の逆数に比例し双曲線になる。 d/b が小さいときの Fig. 10 の曲線の名もそのことを示している。(16) 式が $d/b < 4/\pi$ に対して成立つとしたのは、この式の U_0 の値が $d \rightarrow \infty$ のときの U_0 の収束値 (12) と $d/b = 4/\pi$ のときに一致するからである。この場合にも U_0 を無限板上の変位の式 (1) から求めてみると

$$U_0 = \frac{\delta}{2Gb} \frac{1}{d/b} = \frac{\delta}{2Gd} \quad \dots\dots(17)$$

となり (16) 式の値は (17) 式の値の $4/(1+\nu)$ 倍となっている。(17) 式の意味は、無限板上の点の変位が加熱点からの距離に反比例することに外ならない。

(3) 加熱点が隅に近いときの収縮

加熱点が矩形板の隅に近いときには、二つの自由辺を x, y 軸にとり、鏡像の原理を適用して x 軸上の点の変位を近似的に求めた (5) 式をそのままちいれればよい。すなわち

$$V = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \left\{ \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} - \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} + \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} \right\} \quad \dots\dots(18)$$

で近似できる。

(4) 略算式のまとめ

以上の略算式をまとめると次のようになる。

4-a) 加熱点が矩形板のいずれの辺からも遠いとき

自由辺 $y = \pm b$ の上ではかった横収縮

$$V = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{x}{b}\right)^2 + 1 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 \right\} \right] / \left[\left\{ \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{y_0}{b}\right)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)^2 \right\} \right] \quad \dots\dots(19)$$

とくに $x=0, y_0=0$ のとき

$$V_{x=0} = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \quad \dots\dots(20)$$

自由辺 $x = \pm a$ の上ではかった縦収縮

$$U_0 = \frac{\delta}{2Gb} \frac{\pi}{1+\nu}, \quad \theta = \frac{\delta}{2Gb^2} \frac{3\pi}{2(1+\nu)} \frac{y_0}{b} \quad \dots\dots(21)$$

を組合わせて計算できる。

4-b) 加熱点が一つの辺に近いとき

自由辺を、 $y=0$ として

$$V = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} - \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} \quad \dots\dots(22)$$

4-c) 加熱点が板の隅に近いとき

$x=0, y=0$ を自由辺として

$$V = \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} \left\{ \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} - \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} + \frac{\frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x}{b} + \frac{x_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} \right\} \quad \dots\dots(23)$$

4. 収縮の基本値と物理的意味

矩形板の巾の中心線上の一点を加熱冷却したときに生じる収縮は、任意の領域を局部加熱したときに生じる収縮変形の基本値と考えることができる²⁾。

巾 $2b$ の矩形板において、加熱点が板の縁から $4b/\pi$ (若干誤差が大きくなることを許容すれば b すなわち板の半巾) 以上離れているときには、(20), (21) によって

$$\left. \begin{aligned} \text{板巾の最大収縮} &= \frac{\delta}{2Gb} \frac{4}{1+\nu} = \frac{8\delta}{2bE} \\ \text{長さの減少} &= \frac{\delta}{2Gb} \frac{\pi}{1+\nu} = \frac{2\pi\delta}{2bE} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(24)$$

で近似できることがわかる (Fig. 12)

Fig. 12 Fundamental value of shrinkages due to spot heating on a rectangular plate

$$\frac{\delta}{2Gb} \frac{1}{1+\nu} = \frac{2\delta}{2bE} \quad \text{はこれまでに導いた厳密式および近}$$

似式のすべてにあらわれる量で、次のような物理的意味をもっている。

「矩形板の点加熱による収縮は、加熱によって生じた収縮力 $-\delta$ に比例し、板巾 $2b$ と板の弾性係数 E に反比例する」

点加熱によって生じる収縮力 $-\delta$ の値を適当な方法で求めておけば、(24) のような簡単な式で矩形板の収縮を概算することができる。

5. 理論値と実験値の比較

炉中 $900 \pm 25^\circ\text{C}$ で完全応力除去を行なった厚さ 2.3mm

の炭素鋼板を 200×200 mm の正方形および 200×400 mm の矩形に切断し, その上の一点を酸素アセチレン焰で加熱し, 冷却後精度 $1/1000$ mm のダイヤルゲージをもちいて収縮を測定した. 測定の要領を Fig. 13 に示す. 点加熱によって試験片は Fig. 14 に示すようにわずかに曲る. しかしその量はきわめて小さく, 図の $\widehat{AB}$ は近似的に円弧とみなすことができるので, 次式によって測定値を補正した.

Fig. 13 Method of shrinkage measurement

Fig. 14 Bending of specimen

$$\widehat{AB} - \overline{AB} = \frac{4}{3} a \left(\frac{h}{a} \right)^2 \dots \dots \dots (28)$$

試験片の加熱冷却は二通りの条件によった. その要領は次のとおりである.

1) 加熱冷却条件 H-1

試験片上に 20 mm ϕ の孔をあけた厚さ 6 mm の鋼板を重ね, この孔を通して上から加熱した. 加熱点の裏面には熱電対をとりつけ, 温度が 600°C に達したとき

だちに試験片を冷水中に投入した. なお次の条件により加熱開始後約 8 秒で所定の温度が得られるように焰の強さを調節した.

火 口: #16 火口高さ: 25 mm

酸素圧力: 3 kg/cm 2 アセチレン圧力: 0.5 kg/cm 2

2) 加熱冷却条件 H-2

線状加熱に利用されるリングシャワー付酸素アセチレンバーナで加熱冷却した. 当板はもちいないで, 加熱開始後 8 秒で加熱点の裏側の温度が $600 \pm 15^\circ\text{C}$ になるよう焰を調節し, 8 秒経過後ただちに焰を試験片から遠ざけた. 条件の大略は次のとおりで, 加熱後の酸化皮膜の状態から加熱円の直径は約 20 mm と判断された.

火 口: #16 火口高さ: 15 mm

酸素圧力: 3 kg/cm 2 アセチレン圧力: 0.5 kg/cm 2

冷却水量: 2.1 l/min

実験によって計測された収縮を Fig. 15~20 に○および●でプロットした. 次に厚さ 2.3 mm の軟鋼板を上記の条件で点加熱, 冷却することによって生じる収縮力 $-\delta$ を $-7,300$ kg とし, 式 (19)~(23) をもちいて収縮の近似値を求めた. 図中の実線が近似計算値である.

Photo. 1 Lüders' line pattern appearing on a polished thin steel plate surface after spot heating

Fig. 15 Comparison of theoretical and experimental values

Fig. 16 Comparison of theoretical and experimental values

Fig. 17 Comparison of theoretical and experimental values

Fig. 18 Comparison of theoretical and experimental values

Fig. 19 Comparison of theoretical and experimental values

Fig. 20 Comparison of theoretical and experimental values

また参考のために(2)式で求めた厳密計算値を点線で記入した。これらの図を見ると、近似計算値、厳密値および実験値の三者はよく一致しており、略算式で実用上十分であると考えられる。

収縮力 $-\delta$ は無限板内で法線応力 σ_y をうける内径 $2b$ の円孔に関する式³⁾

$$\delta = -\sigma_y b^2 \quad (25)$$

から求めた。H-1, H-2 の条件で点加熱をした軟鋼板の研磨面にあらわれるリューダース線模様は直径約 35 mm の円の範囲に及んでいた (Photo. 1)。また軟鋼板の降伏点 σ_y は約 24 kg/mm^2 程度である。式 (25) において $2b = 35 \text{ mm}$, $\sigma_y = 24 \text{ kg/mm}^2$ とすると $\delta \approx -7,300 \text{ kg}$ となる。

6. 結 言

局部加熱によって有限な大きさの鋼板に生じる収縮量を理論的に解析することは一般にはかなり困難である。著者らはさきに比較的簡単な場合すなわち、矩形板の一点加熱によって生じる収縮を理論的に求めることが可能であることを明らかにし、また近似計算を行なうに役立つと考えられる二三の解析を行なった。

この報告はこれらの結果にもとづいて実用上便利な略算式をみちびいたものである。えられた式の形は簡単であるとともに、その物理的な意味が一見して理解されるものであった。

この研究の結果を要約すると次のようになる。

(1) 矩形板の一点加熱による収縮は簡単な略算式をもちいて推定することができる。

(2) 加熱点が矩形板の縁からある程度 (板の半巾以上) はなれているときは、板の縦横比の影響はほとんどなくなり、巾の減少の最大値は $8\delta/2bE$, 長さの減少は $2\pi\delta/2bE$ で概算できる。ここに δ は点加熱によって生ずる収縮力 (kg), $2b$ は板巾 (mm), E は板の弾性係数 (kg/mm^2) である。すなわち矩形板の点加熱による収縮は板巾によってはほぼ定まってしまう。

(3) 収縮の厳密計算値および略算値のすべてを通じてあらわれる $2\delta/2bE$ は収縮に関する基本量であって、その物理的な意味が明りようであり、実用上も便利であろう。

なお本研究によってえられた上述の諸結果は、さらに複雑な場合すなわち任意形状の領域を局部加熱した場合に生じる収縮変形を考察する場合の有力な基礎的知識として活用することができる。

謝 辞

この研究を行なうにあたり終始御鞭撻下さった当技術研究所中村所長, 秋田構造研究室長, および計算ならび

に実験の遂行に多大の労をわずらわした構造研究室の谷山, 中村, 山岡の三君に心から感謝の意を表します。

文 献

- 1) 前田豊生, 矢田敏夫, “点加熱による矩形板の収縮変形”, 第1報, 溶接学会誌 Vol.33 (1964) No. 4, 42~50
- 2) T. Maeda, “Shrinkage Distortion due to Local Heating on Arbitrarily Distributed Regions” IIW-Document No. X-297-62 (1962), 1~18
- 3) 森口繁一, “2次元弾性論” 岩波講座現代応用数学 B.7-a (1957), 47

補 遺 帯板の点加熱による曲り変形

帯板の中立軸外の点を加熱すると面内の曲り変形を生じる。いま Fig. 21 の原点に $-\delta$ をおいたとき, $y=b_1$, $y=b_2$ に生じる応力が $b_1 \neq b_2$ のときつり合わないで, それが原因となって $y=b_1$, $y=b_2$ を二つの縁とする無限に長い梁に曲げモーメントを生じて曲り変形が起ると考えることができよう。

無限板上の原点に $-\delta$ があるときの応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \text{Re} \frac{\delta}{z^2} = \delta \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_y &= -\sigma_x = -\delta \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \tau_{xy} &= I_m \frac{\delta}{z^2} = \delta \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (a1)$$

したがって

$y=b_1$ においては

$$\sigma_{yb_1} = -\delta \frac{x^2 - b_1^2}{(x^2 + b_1^2)^2}, \quad \tau_{xyb_1} = \delta \frac{2b_1x}{(x^2 + b_1^2)^2}$$

$y=b_2$ においては

$$\sigma_{yb_2} = -\delta \frac{x^2 - b_2^2}{(x^2 + b_2^2)^2}, \quad \tau_{xyb_2} = \delta \frac{2b_2x}{(x^2 + b_2^2)^2}$$

の応力を生じる。これらの応力の不平衡によって生じる荷重は

$$\left. \begin{aligned} Py &= \sigma_{yb_1} - \sigma_{yb_2} = \delta \left[\frac{b_1^2 - x^2}{(x^2 + b_1^2)^2} - \frac{b_2^2 - x^2}{(x^2 + b_2^2)^2} \right] \\ dM &= T \cdot 2b = 2b \cdot \frac{1}{2} (\tau_{xyb_1} - \tau_{xyb_2}) \\ &= \delta b \left[\frac{b_1}{(x^2 + b_1^2)^2} - \frac{b_2}{(x^2 + b_2^2)^2} \right] 2x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (a2)$$

ここに $2b = b_1 + b_2$

Fig. 21 Stresses due to spot heating in an infinite plane

いま P_y, dM によって生じる曲げモーメントをそれぞれ M_P, M_T とし, また $x=0$ における曲げモーメントを M_0 とすると, 全曲げモーメント M は

$$M = M_P + M_T + M_0 \dots\dots\dots (a3)$$

となり, また梁のたわみを w とすると

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^2 w}{dx^2} &= M_P + M_T + M_0 \\ EI \frac{dw}{dx} &= \left\{ M_P dx + \left\{ M_T dx + M_0 x + C \right\} \right\} \dots\dots\dots (a4) \end{aligned} \right\}$$

と書くことができるから, (a4) に (a3) を代入して梁の傾斜 dw/dx , すなわち曲り角度を求めることができる。

(a2) から

$$\begin{aligned} M_P &= - \int_0^x P(x_1) \cdot (x - x_1) dx_1 \\ &= -\delta \left[\int_0^x \frac{b_1^2 - x_1^2}{(x_1^2 + b_1^2)^2} (x - x_1) dx_1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \frac{b_2^2 - x_2^2}{(x_2^2 + b_2^2)^2} (x - x_1) dx_1 \right] \\ &= -\frac{\delta}{2} \left[\log \left\{ 1 + \left(\frac{x}{b_1} \right)^2 \right\} - \log \left\{ 1 + \left(\frac{x}{b_2} \right)^2 \right\} \right] \\ M_T &= \int_0^x dM_T = 2\delta b \left[\int_0^x \frac{xb_1}{(x^2 + b_1^2)^2} dx - \int_0^x \frac{xb_2}{(x^2 + b_2^2)^2} dx \right] \\ &= \delta b \left[-\frac{b_1}{x^2 + b_1^2} + \frac{b_2}{x^2 + b_2^2} + \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right] \end{aligned}$$

したがってまた

$$\left. \begin{aligned} \left\{ M_P dx = -\frac{\delta}{2} \left[\log \left\{ 1 + \left(\frac{x}{b_1} \right)^2 \right\} dx \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \log \left\{ 1 + \left(\frac{x}{b_2} \right)^2 \right\} dx \right] \right. \\ \left. = -\frac{\delta}{2} \left[x \log \left\{ 1 + \left(\frac{x}{b_1} \right)^2 \right\} - x \log \left\{ 1 + \left(\frac{x}{b_2} \right)^2 \right\} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2b_1 \tan^{-1} \left(\frac{x}{b_1} \right) - 2b_2 \tan^{-1} \left(\frac{x}{b_2} \right) \right] \right\} \\ \left\{ M_T dx = \delta b \left\{ -\frac{b_1}{x^2 + b_1^2} + \frac{b_2}{x^2 + b_2^2} \right\} dx \right. \\ \left. = \delta b \left[-\tan^{-1} \left(\frac{x}{b_1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x}{b_2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

これらを (a4) に代入すると

$$\begin{aligned} EI \frac{dw}{dx} &= -\frac{\delta b}{2} \left[x \left\{ \log \frac{1 + \left(\frac{x}{b_1} \right)^2}{1 + \left(\frac{x}{b_2} \right)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{b_1}{b} \tan^{-1} \frac{x}{b_1} - 2 \frac{b_2}{b} \tan^{-1} \frac{x}{b_2} \right] \\ &\quad + \delta b \left[-\tan^{-1} \left(\frac{x}{b_1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x}{b_2} \right) \right] \\ &\quad + \delta b [M_0 x + C_1] \dots\dots\dots (a5) \end{aligned}$$

(a5) において, $x=0$ で $dw/dx=0$ でなければならないから $C_1=0$ となる。また $x \rightarrow \infty$ で dw/dx は有限な値でなければならないから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} EI \frac{dw}{dx} = \delta \left[-\frac{1}{2} x \log \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^2 + \frac{\pi}{2} (b_2 - b_1) + M_0 x \right]$$

したがって

$$M_0 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^2 = \log \frac{b_2}{b_1}$$

でなければならない。結局 (a5) は

$$EI \frac{dw}{dx} = \delta \frac{\pi}{2} (b_2 - b_1)$$

となる。ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dw}{dx} = \delta \frac{\pi}{2} (b_2 - b_1) = \frac{\delta}{2Gb^2} \frac{3\pi}{2(1+\nu)} \frac{b_2 - b_1}{2b} \quad \dots\dots\dots(a6)$$

Fig. 22 Bending of a beam due to spot heating

Fig. 22 の場合には $y_0 = (b_2 - b_1)/2$ であるから、梁の曲り角度を θ とすると

$$\theta = \frac{\delta}{2Gb^2} \frac{3\pi}{2(1+\nu)} \frac{y_0}{b} \quad \dots\dots\dots(a7)$$

となる。Fig. 23 はこのようにして求められる θ の計算値と実験値とを比較したものである。

Fig. 23 Bending distortion of a long plate due to spot heating

『施工法一般』

—溶接施工(I)—

工学博士 大谷 碧 共著
工学博士 吉田 俊夫

日刊工業新聞社発行

定価 1,200円

溶接施工法というものは表面的に示された形では、ごく単純なものであっても、実際には学理的に難解な事象の対策として打ちだされた結果であることが多い。したがって溶接施工の一般を真にその因果的關係から出発して眺めようとすれば、その背後のぼう大な資料に手をつけねばならぬことになり、製造工場の現業部門の技術者にとってこれは大へんな忙事となりかねない。

本書は以上の点を考慮して編集されたもので、その内容は溶接技術の基礎、応用の両面にわたる最近の知識をすべて網羅したものといつてよい。この種のものは従来もしばしば考えられたものであろうが、基礎と

応用の両部門をどこで1線を描くかということとはなかなか困難であつて結局従来のこの種のものはいつれかいっぽうに偏せざるを得なかった。

第1部の基礎部門では残留応力、歪のみならず溶接ワレならびに、構造物の低荷重破壊に対する著者の長年の研鑽が光っており、また第2部の応力部門では第1部の基礎的知識に対応する施策に加えるに溶接工場の管理の簡易百科辞典的 data が収録され、この道の10年選手も一統に値する好冊子となっている。以上著者らの努力もさることながらこの両部門をたくみに結び合わされた編集者の企画にも敬意を表する。

(寺井 清)