移動熱源による熱伝導の特性に関する覚え書*

佐 藤 邦 彦**

A Note On Heat Conduction By Moving Heat Source*

By Kunihiro Satoh**

Abstract

The present report discusses on heat conduction in an infinite body in which a point heat source of intensity q (cal/sec) moves at a constant speed v along x -axis as shown in Fig. 1. The problem has been well known since Rosenthal¹⁾ reported a mathematical analysis in 1941. However, analysis in the present report shows that temperature at a point during cooling by a moving heat source is approximately the same as temperature when using an instantaneous line or plane heat source.

For the three-dimensional quasi-stationary heat flow of an infinite body the temperature θ during cooling at a point P in Fig. 1 is approximately given by eq. (1) or the temperature θ_L under heating by an instantaneous line heat source of intensity q/v (cal/cm) along x -axis, in which c is specific heat, ρ is density, k is heat diffusivity and t is the time after the point heat source comes to the point O_1 in Fig. 1.

For the two-dimensional quasi-stationary heat flow of an infinite plate of thickness h the temperature θ during cooling at a point P is approximately given by eq. (2) or the temperature θ_P under heating by an instantaneous plane heat source of intensity q/vh (cal/cm²) on x - z plane.

1. 概 要

本論文は板厚 h (cm) なる無限平板の中央面上を強さ q (cal/sec) の点熱源が移動する場合の熱伝導の特性について考察したものである。この種の移動熱源による熱伝導問題は、たとえば溶接熱応力や溶接部の冷却速度の問題などに関連して、溶接工学上重要であるから、既に1930~1940年代に多くの人々によって研究されており、熱源を「点」と仮定する限り今さら採り上げる必要もないように思われる。それをあえて本論文を書いたのは、移動熱源による温度分布および冷却曲線が、 $h \rightarrow \infty$ および $h \rightarrow 0$ の場合には次に述べるように熱源の移動を考え

なくても瞬間熱源による熱伝導から簡単に推定ができることを指摘するためである。

いま Fig. 1 に示すように板の中央面内に x, y 軸を、板厚方向に z 軸をとる。熱源は x 軸上をその負方向に等速度 v (cm/sec) で移動し準定常状態にあるものとする。 x 軸からの距離 $r(=\sqrt{y^2+z^2})$ なる任意の点 P の温度上昇 $\theta(r, t)$ を考える。熱源の先端が P 点に最も接近した瞬間(すなわち熱源が図の O_1 点にきた瞬間)を時間の原点($t=0$)にとると、 $t>0$ (ただし $t=0$ の付近を除く)における温度上昇は2節以下で述べるように近似的には次のようになる。すなわち、 $h \rightarrow \infty$ の場合には温度上昇 $\theta(r, t)$ は $t=0$ の瞬間に x 軸の全長に沿って単位長さ当り q/v (cal/cm) なる線熱源が与えられた場合の温度上昇 θ_L にほぼ等しい。

$$\theta(r, t) \doteq \theta_L = \frac{q}{c\rho v} \cdot \frac{e^{-r^2/4kt}}{4\pi kt} \quad (1)$$

また $h \rightarrow 0$ の場合には、温度上昇 $\theta(y, t)$ は $t=0$ の瞬間に x - z 面の全面に単位面積当り q/vh (cal/cm²) なる平面熱源が与えられた場合の温度上昇 θ_P にほぼ等しい。

$$\theta(y, t) \doteq \theta_P = \frac{q}{c\rho v h} \cdot \frac{e^{-y^2/4kt}}{\sqrt{4\pi kt}} \quad (2)$$

ただし、 c : 比熱 (cal/g·°C), ρ : 密度 (g/cm³), k : 熱拡散率 (cm²/sec) である。Fig. 1 に示すように移動熱

Fig. 1

* 原稿受付 昭和41年9月26日

** 正 員 大阪大学工学部 Member, Welding Engineering, Osaka University

源の先端を原点とする移動座標をとると、 $\overline{OO_1} = x = vt$ であるから式 (1) は

$$\theta(r, x) \doteq \theta_L = \frac{q}{c\rho} \cdot \frac{e^{-vr^2/4kx}}{4\pi kx} \quad (3)$$

また式 (2) は

$$\theta(y, x) \doteq \theta_p = \frac{q}{c\rho h} \cdot \frac{e^{-vy^2/4kx}}{\sqrt{4\pi kvx}} \quad (4)$$

と書き換えられる。後に述べるように式 (3), (4) は $x=0$ の付近を除くと板の全範囲にわたって適用できるので、熱応力や収縮の問題に対して有用である。

以上が本論文の主要な結論であるが、次にその理由と式 (1), (2) あるいは式 (3), (4) の適用範囲について考察する。

2. 三次元熱流 ($h \rightarrow \infty$) の場合

Fig. 1 において板厚 $h \rightarrow \infty$ の場合には、温度分布の正しい解は Rosenthal¹⁾ によって次のように求められている。

$$\theta(r, x) = \frac{q}{c\rho} \cdot \frac{e^{(v/2k)(x - \sqrt{x^2 + r^2})}}{4\pi k\sqrt{x^2 + r^2}} \quad (5)$$

ここで $r=0, x>0$ の場合には $\theta(0, x) = \frac{q}{c\rho} \cdot \frac{1}{4\pi kx}$ となり、式 (3) において $r=0$ とおいたものと完全に一致する。すなわち x 軸上の冷却中の温度は瞬間線熱源による θ_L と等しく、熱源がその点を通過した後の時間に逆比例することがわかる。

$r \neq 0$ の場合には $\theta(r, x)$ と θ_L とは厳密には一致しない。いま式 (5) と式 (3) とから θ/θ_L を求め、これが x と r の値によってどのように変化するかを検討する。次の無次元数

$$\left. \begin{aligned} X &\equiv \frac{vx}{2k}, & Y &\equiv \frac{vy}{2k}, & Z &\equiv \frac{vz}{2k} \\ R &\equiv \sqrt{Y^2 + Z^2} \\ u &\equiv \frac{R}{X} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を使用すると、 $X>0$ の場合には

$$\frac{\theta}{\theta_L} = \frac{e^{(X/2)(\sqrt{1+u^2}-1)^2}}{\sqrt{1+u^2}} \quad (\equiv \alpha \text{ とおく}) \quad (7)$$

$u^2 \ll 1$ で X が大きくない場合には $\alpha \approx 1$ であって、Fig. 1 に示す x 軸を軸とし原点 O を頂点とする頂角 $\theta = \tan^{-1}u$ (ただし $\theta \ll 1$) なる円錐の内部の原点に近い点の温度上昇は瞬間線熱源による θ_L にほぼ等しいことがわかる。

次に X の大きい場合をもふくめて、 X が一定の場合 α が u によってどのように変化するかを検討してみる。

① $u=0$ のとき $\alpha=1$

② 式 (7) より

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{ue^{(X/2)(\sqrt{1+u^2}-1)^2}}{1+u^2} \cdot \{X\sqrt{1+u^2}-1\} - \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

であるから

$$u=0 \text{ のとき } \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0$$

$$u \ll 1 \text{ のとき } \frac{\partial \alpha}{\partial u} \doteq -u < 0$$

したがって、 $u=0$ の付近では α と u の関係は上方に凸の放物線となる。

$$\textcircled{3} \quad u \gg 1 \text{ のとき } \alpha = \frac{e^{X^2/2}}{u}$$

$$\therefore u \rightarrow \infty \text{ のとき } \alpha \rightarrow \infty$$

以上の特性から、 X が一定の場合の α と u の関係を模式的に示すと Fig. 2 のようになる。すなわち、 X が一定で u の小さい範囲では $\alpha < 1$ であるが、 $u \rightarrow \infty$ になると $\alpha \rightarrow \infty$ となり、 u のある値で α は極小となる。 α が極小になる u の値 (u_m) は X の大きいほど小さい。また α の極小値は常に 1 より小さくて、 X の大きいほど大となって 1 に近づく。

Fig. 2 α versus u relation

以上のような特性から、式 (7) を用いて R - X 平面上に $\alpha = \text{一定}$ なる点を結ぶ等高線を描くことができる。Fig. 3 は $\alpha = 1.1, 1.01, 1.0, 0.99, 0.9$ なる等高線を両対数グラフで示したものである。両対数グラフであらわしているため、その形を概念的につかみ難いけれども、これらの等高線はいずれも原点 $R=X=0$ を通り、 $\alpha \geq 1$ の場合には $R^2 = aX$ (ただし a は定数) であらわされる放物線に近いものになり、 $\alpha < 1$ の場合にはたとえば図の曲線 $ABCD, A'B'C'D$ のような原点を通る閉曲線となる。この閉曲線のうち $AB, A'B'$ の部分は $R/X = \text{一定}$ なる直線である。

Fig. 3 において一点鎖線で示した曲線 PQR は $X = \text{一定}$ の断面で α が極小となる点を結んだものであって、これは式 (7) において $\partial \alpha / \partial u = 0$ とおくことにより次のように求められる。

$$\begin{aligned} X(1+u^2) &= X\sqrt{1+u^2} + 1 \\ \text{or } X^2 + R^2 &= X(1 + \sqrt{X^2 + R^2}) \end{aligned} \quad (8)$$

Fig. 3 Contour lines of correction factor α in three-dimensional quasi-stationary heat flow

式(8)は移動熱源における最高到達温度の特性曲線(式(5)において $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ または $\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$ を満足する曲線)とまったく一致している。(Adams の論文²⁾参照)すなわち移動熱源の特性曲線上では $(\alpha)_X = \text{一定}$ は極小となるのである。なお式(8)において $R \ll X$ の場合には

$$\sqrt{1+u^2} = 1 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{8} + \dots \approx 1 + \frac{u^2}{2} \quad (9)$$

として、式(8)は

$$X^2 + R^2 = X \left\{ 1 + X \left(1 + \frac{R^2}{2X^2} \right) \right\} \quad (10)$$

となり、曲線 PQR は原点付近を除いて大体放物線となる*。一方、 $R = \text{一定}$ で X が変化した場合にも α の値は原点付近を除けば曲線 PQR 上で極小となるのが次のようにして証明される。このことが成立するためには曲線 PQR 上で

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\theta}{\theta_L} \right) = \frac{1}{\theta_L^2} \left(\theta_L \frac{\partial \theta}{\partial X} - \theta \frac{\partial \theta_L}{\partial X} \right) = 0$$

でなくてはならない。しかるに、曲線 PQR 上では上述のように $\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$ 、また式(10)が成立する曲線 PQR 上の点では、式(3)から $\frac{\partial \theta_L}{\partial X} = 0$ となるのが簡単な計算によってわかるから、原点付近を除けば $(\alpha)_R = \text{一定}$ も曲線 PQR 上で極小になるのである。したがって原点付近を除けば移動熱源の特性曲線は等高線の谷の線と一致する。

以上の結果を総合すると、移動熱源による任意の点の

* 式(9)において、たとえば $u = 0.6$ とすると $\frac{u^4}{8} = \frac{81}{5000} = 0.016$ 、したがって $u \leq 0.6$ の場合(あるいは Fig. 1 の $\theta \leq 30^\circ$ の場合)には式(8)の代わりに式(10)を用いてもその誤差はおよそ2%以下である。

温度—時間曲線およびこれを式(1)のような瞬間線熱源で近似した場合の温度—時間曲線は Fig. 4 のようになる。式(1)の近似式を用いると最高到達温度は真の値よりも高くなり、最高温度に達するまでの時間は真の値よりも小さくなり、最高温度からある一定温度までの冷却時間は真の値よりも長くなる。しかし、Fig. 3 からわかるように、ABCEF 線の右下の領域については、式(5)の代わりに式(1)(あるいは式(3))を用いてもその誤差は $\pm 10\%$ 以下である。

Fig. 4

上に述べたように α 等高線の谷の線が移動点熱源による準定常状態の特性曲線と一致するから、任意の点の冷却中の温度については、Fig. 3 の曲線 PQR の右下の領域を考えればよい。このような領域では、 α 等高線は次に述べるように簡単な形で与えられる。式(7)において $u \ll 1$ でその4次以上の項が無視できる場合であると、式(9)を式(7)に代入して

$$\alpha = \frac{2eX^{u^4/8}}{2+u^2}$$

したがって X が小さい範囲では $eX^{u^4/8} \approx 1$ として、 α 等高線は

$$u = \frac{R}{X} = \sqrt{2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} \quad (11)$$

と与えられる。式(11)は $u \leq 0.6$ でかつ $\frac{Xu^4}{8} \leq 0.01$ の範囲で近似的に成立する。このような範囲では α 等高線は原点を通る直線になり、たとえば $\alpha = 0.99$ および 0.90 の場合には式(11)から

$$\left. \begin{aligned} \alpha = 0.99; \quad \frac{R}{X} = 0.1420 \quad \text{or} \quad \theta = 8^\circ \\ \alpha = 0.90; \quad \frac{R}{X} = 0.470 \quad \text{or} \quad \theta = 25^\circ \end{aligned} \right\}$$

と計算される。(Fig. 3 の直線 AB および A'B')

Fig. 3 を利用すると、移動点熱源による任意の点の冷却中の温度を式(5)の代わりに式(1)あるいは式(3)を用いて計算した場合の補正係数を知ることができる。たとえば $R=0.2$ の点では

$$\left. \begin{aligned} X \geq \frac{0.2}{0.472} = 0.42 \quad \text{or} \quad \frac{v^2 t}{2k} \geq 0.42 \quad \text{のとき} \quad \alpha \geq 0.90 \\ X \geq \frac{0.2}{0.1420} = 1.4 \quad \text{or} \quad \frac{v^2 t}{2k} \geq 1.4 \quad \text{のとき} \quad \alpha \geq 0.99 \end{aligned} \right\}$$

具体例として、鋼の場合を考え、 $k=0.1 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $v=0.2 \text{ cm/sec}$ とすると、 $r=0.2 \text{ cm}$ の点では、

$$\left. \begin{aligned} t \geq 2 \text{ sec} \quad \text{のとき} \quad \alpha \geq 0.90 \\ t \geq 7 \text{ sec} \quad \text{のとき} \quad \alpha \geq 0.99 \end{aligned} \right\}$$

となり、熱源が考えている点に最も接近した後およそ 7 sec 以上経過すれば、補正係数はほぼ 1 に等しくなる。

3. 二次元熱流 ($h \rightarrow 0$) の場合

Fig. 1 において板厚 $h \rightarrow 0$ の場合には、温度分布の正しい解は次のように与えられる¹⁾。

$$\theta(y, x) = \frac{q}{c\rho h} \cdot \frac{1}{4\pi k} e^{v^2 x/2k} K_0\left(\frac{v}{2k} \sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad (12)$$

ただし、 $K_0(s)$: ベッセル関数

ベッセル関数 $K_0(s)$ の漸近展開式

$$K_0(s) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-s} \left(1 - \frac{1}{8s} + \frac{9}{128s^2} - \dots\right)$$

を用いると、原点から離れた点では式(12)の代わりに

$$\theta(y, x) = \frac{q}{c\rho h} \cdot \frac{e^{v^2(x-\sqrt{x^2+y^2})/2k}}{\sqrt{4\pi k v} \sqrt{x^2+y^2}} \quad (13)$$

としてもよい。 $\frac{v}{2k} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{X^2+Y^2} \geq 2$ の範囲では式(12)の代わりに式(13)を用いてもその誤差は数%以下である。ここではこのような範囲の点について考察する。

前節で述べた三次元熱流の場合から類推すると、二次元熱流の場合の温度上昇 $\theta(y, x)$ は瞬間平面熱源による温度上昇 θ_p によって近似できると推定される。これを確かめるため、式(13)と式(4)とから θ/θ_p を求め、これが x と y の値によってどのように変化するかを検討する。式(6)の無次元数を用いると、 $X > 0$ の場合には

$$\frac{\theta}{\theta_p} = \frac{e^{(X/2)(\sqrt{1+u^2}-1)^2}}{\sqrt{1+u^2}} \quad (\equiv \alpha \text{ とおく}) \quad (14)$$

という式(7)と類似の形のものになる。(ただし、ここでは $u \equiv Y/X$)。この類似性から α 等高線を $Y-X$ 平面上に描くことができる。

Fig. 3 と同様な両対数グラフによってこの等高線を描くと Fig. 5 のようになる。ただし式(14)は $\sqrt{X^2+Y^2} \leq 2$ の範囲では成立しないので、図では原点を中心とす

Fig. 5 Contour lines of correction factor α in two-dimensional quasi-stationary heat flow

る半径 2 なる円形領域を影線で区別してある。図中の一点鎖線（これは原点を通る放物線 $Y^2=X$ である*。）は α 等高線の谷の線であって、移動熱源による最高到達温度の特性曲線と一致する。（詳細は三次元熱流の場合と同様であるから説明は省略）

Fig. 5 から、図の曲線 EF の右下の領域では式 (13) の代わりに式 (2)（あるいは式 (4)）を用いてもその誤差はおおよそ $\pm 10\%$ 以下であることがわかる。

4. 等温度曲線

Fig. 3（または Fig. 5）において曲線 EF より上方の領域では、 α の値は 1.1 以上であって、 R （または Y ）の大きいほどその値は大になるけれども、 R （または Y ）の大きいところでは温度上昇自体が非常に小さいので誤差の絶対値は小さなものに過ぎないであろう。次に述べる等温度曲線によってこれを確かめてみる。

いま三次元熱流 ($h \rightarrow \infty$) の温度上昇を $\theta(R, X)$ とすると、等温度曲線の微分方程式は

$$\frac{dR}{dX} = - \frac{\frac{\partial \theta(R, X)}{\partial X}}{\frac{\partial \theta(R, X)}{\partial R}}$$

これに式 (5) を代入して計算すると

$$R \frac{dR}{dX} + X = \frac{X^2 + R^2}{\sqrt{X^2 + R^2} + 1}$$

この微分方程式の一般解は

$$\sqrt{X^2 + R^2} + \log \sqrt{X^2 + R^2} = X + C$$

ただし C ：積分定数

等温度曲線が X の正軸と交わる点を $X = X_0 > 0$ として積分定数 C を決定すると、等温度曲線群は X_0 を流動変数として

$$\sqrt{X^2 + R^2} + \log \sqrt{X^2 + R^2} = X + \log X_0 \quad (15)$$

と与えられる。式 (15) において $R \ll X$ の場合には

$$\sqrt{X^2 + R^2} \approx X \left(1 + \frac{R^2}{2X^2} \right)$$

$$\log \sqrt{X^2 + R^2} = \log X + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{R^2}{X^2} \right) \approx \log X + \frac{R^2}{2X^2}$$

であるから、等温度曲線群は

$$R^2 = \frac{2X^2}{X+1} \log \frac{X_0}{X} \quad (16)$$

と書ける。特に $R \ll X$ かつ $X \gg 1$ の場合には

$$R^2 = 2X \log \frac{X_0}{X} \quad (17)$$

となって、これは式 (3) による等温度曲線群と一致す

* この曲線は正しくは

$$X^2 + Y^2 = X \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + Y^2} \right)$$

である。しかし、 $Y \ll X$ の場合には $\sqrt{X^2 + Y^2} \approx X \left(1 + \frac{Y^2}{2X^2} \right)$ として $Y^2 = X$ で近似される。

る。（付録参照）

二次元熱流 ($h \rightarrow 0$) の場合の等温度曲線群を同様の方法で求めると

$$\sqrt{X^2 + Y^2} + \frac{1}{2} \log \sqrt{X^2 + Y^2} = X + \frac{1}{2} \log X_0 \quad (18)$$

$$Y \ll X \text{ の場合: } Y^2 = \frac{2X^2}{2X+1} \log \frac{X_0}{X} \quad (19)$$

$$Y \ll X \text{ かつ } X \gg 1 \text{ の場合: } Y^2 = X \log \frac{X_0}{X} \quad (20)$$

となる。この式 (20) は式 (4) による等温度曲線群と一致する。（付録参照）

これらの式を用いて等温度曲線を計算し、これを両対数グラフに示すと Fig. 6（三次元熱流）および Fig. 7（二次元熱流）の実線のようになる。図中の点線は式

Fig. 6 Isotherms for three-dimensional quasi-stationary heat flow

Fig. 7 Isotherms for two-dimensional quasi-stationary heat flow

(17) および式 (20) による計算結果（それぞれ瞬間線熱源および瞬間平面熱源による等温度曲線）である。なお図には Fig. 3 および Fig. 5 に示した α 等高線の一部が一点鎖線で記入してある。

Fig. 6, 7 において、 X_0 = 一定なる等温度曲線上の温度上昇を求めるには、式 (5) および式 (13) において

$r=y=0, x=x_0>0$ とおけばよい。これから

三次元熱流の場合：

$$\theta = \frac{q}{c\rho} \cdot \frac{1}{4\pi k x_0} = \frac{q}{c\rho} \cdot \frac{v}{8\pi k^2} \cdot \frac{1}{X_0} \quad (21)$$

二次元熱流の場合：

$$\theta = \frac{q}{c\rho h} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi k v x_0}} = \frac{q}{c\rho h} \cdot \frac{1}{\sqrt{8\pi k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{X_0}} \quad (22)$$

いま鋼のアーク溶接の場合を想定し、一例として $q/v = 3,000 \text{ cal/cm}$, $v = 0.25 \text{ cm/sec}$, $c = 0.128 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$, $\rho = 7.8 \text{ g/cm}^3$, $k = 0.146 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $h = 1 \text{ cm}$ の場合について計算すると

$$\text{三次元熱流の場合：} \theta = \frac{350}{X_0} \quad ^\circ\text{C}$$

$$\text{二次元熱流の場合：} \theta = \frac{1000}{\sqrt{X_0}} \quad ^\circ\text{C}$$

となる。すると Fig. 6 においてたとえば $X_0 = 500$ というのは $\theta = \frac{350}{500} = 0.7^\circ\text{C}$ 等温度曲線に相当し、Fig. 7 において $X_0 = 1000$ というのは $\theta = \frac{1000}{\sqrt{1000}} \approx 30^\circ\text{C}$ 等温度曲線に相当している。これらの数値と Fig. 6, 7 に示した等温線とをあわせ考えると前節で述べた式 (1), (2) (あるいは式 (3), (4)) の適用範囲をさらに Fig. 8 のように拡大することができる。すなわち、三次

(a) Three-dimensional heat flow

(b) Two-dimensional heat flow

Fig. 8

元熱流の場合には $X \geq 4.4$, 二次元熱流の場合には $X \geq 2$ の範囲で、全領域にわたって式 (1) (2) (または式 (3) (4)) を適用しても実用上差支えないであろう。

5. 結 論

無限平板の中央面上を点熱源が移動し、準定常状態にあるときの温度上昇は、板厚 $h \rightarrow \infty$ の場合には瞬間線熱源による温度上昇すなわち式 (1) (または式 (3)) によって近似される。また $h \rightarrow 0$ の場合には瞬間平面熱源による温度上昇すなわち式 (2) (または式 (4)) によって近似される。これらの適用範囲は Fig. 8 の通りである。

付 録

瞬間線熱源 (式 (3)) による等温度曲線：

式 (3) より

$$\theta_L = \frac{q}{c\rho} \cdot \frac{v}{8\pi k^2} \cdot \frac{e^{-R^2/X^2}}{X}$$

等温度曲線の微分方程式

$$\frac{dR}{dX} = - \left(\frac{\partial \theta_L}{\partial X} \right) / \left(\frac{\partial \theta_L}{\partial R} \right) = - \frac{1}{R} + \frac{R}{2X}$$

これより

$$\frac{d}{dX} \left(\frac{R^2}{X} \right) = - \frac{2}{X}$$

$$\therefore \frac{R^2}{X} = -2 \log X + C$$

$R=0$ において $X=X_0>0$ とすると $C=2 \log X_0$ となり、等温度曲線群は

$$R^2 = 2X \log \frac{X_0}{X}$$

と与えられる。

瞬間平面熱源 (式 (4)) による等温度曲線：

式 (4) より

$$\theta_p = \frac{q}{c\rho h} \cdot \frac{1}{\sqrt{8\pi k^2}} \cdot \frac{e^{-Y^2/2X}}{\sqrt{X}}$$

これから等温度曲線の微分方程式は

$$\frac{dY}{dX} = - \frac{1}{2Y} + \frac{Y}{2X}$$

これを積分すると

$$\frac{Y^2}{X} = -\log X + C$$

$Y=0$ において $X=X_0>0$ とすると $C=\log X_0$

$$\therefore Y^2 = X \log \frac{X_0}{X}$$

と与えられる。

参 考 文 献

- 1) D. Rosenthal ; Mathematical Theory of Heat Distribution During Welding and Cutting, W.J., 20 (1941) No. 5 pp. 220-234
- 2) C.M. Adams ; Cooling Rates and Peak Temperatures in Fusion Welding, W.J., 37 (1958) No. 5 pp. 210s-115s