◀ 資料 ▶

<講 義>

静止熱源による一次元の熱伝導*

(フーリエ級数による取扱い)

安 藤 弘 平**

Heat Conduction due to Stationary Heat Source*

(Treaties using Fourier's Series)

by Kohei Ando**

I 序 説

筆者は本年1月号の本誌に「静止熱源による平板中の熱伝導について基本的事項を「講義」として記述した¹⁾。そのとき一次元の場合については無限板について述べるとともに、有限幅の板についてはフーリエ級数によって取扱うことが便利であることについてもある程度述べたが、その具体的取扱についてはページ数の関係であまり立入って誌すことはしなかった。

本稿はその短を補ったもので、静止熱源による一次元の熱伝導を主としてフーリエ級数によって解いている。もっとも簡単な場合としては Fig. 1(a) のように熱が板の端面 AA ($x=0$) に投与され、これが x 方向に伝導して x に沿う温度分布が Fig. 1(b) のようになる場合であるが、本稿では Fig. 2 のように熱が $x=0 \sim x_0$ の領域に投与される場合も取扱っている。

本稿の目的とする所は最終的にはアーク溶接における母板の熱歪を究明するための温度分布についての知見を得る点にあるが、その第一歩として静止熱源による一

第2図 $x=0 \sim x_0$ の加熱

次元の熱伝導を取扱ったのである。

まず初めに熱が $t=0$ の瞬間に瞬間的に投与された場合をⅢ節に述べ、そこでは主としてフーリエ級数の取扱いに関して記述している。Ⅳ節では熱が $t=0 \sim t$ の期間にわたって持続投与された場合について論考している。Ⅲ、Ⅳ節では板の表面からの熱放散を無視しているが、Ⅴ節にこれを考慮した場合を誌している。実際の溶接母板では表面からの熱放散は無視し得ない場合が多いようである。

熱の供給を停止した後の温度変化は容易に計算できるので、ページ数の関係で省いている。

実は筆者は本稿の平板の場合ではなく、円柱体の場合の熱伝導について他の協力者と連名で本誌に寄稿している。本稿と同時にこの11月号に掲載されるはずであるが、本稿は一次元の場合で、sine, cosine などフーリエ級数による取扱である。円柱体の場合は二次元で、ベッセル函数による取扱である。函数の差はあるが、基本的には似たものである。

II 本稿の記述の範囲

一仮定条件—記述順序—主なる記号—

1. 本稿は熱が x 方向にのみ伝導する場合を取扱って

第1図 端面 AA の加熱

* 原稿受付 昭和45年7月9日

** 正 員 大阪大学工学部 Member, Faculty of Engineering, Osaka University

いる。板の表面からの熱放散の影響は後に V 節にふれ、初めの III, IV 節では熱放散を無視して考察を進めている。

2. x 方向の板幅は a とし、熱は Fig. 1(a) のように $x=0$ なる端面に集中的に与えられる場合と、 $x=0 \sim x_0$ なる部分に等荷に与えられる場合とを考察している。

3. $x=a$ なる端面では 熱絶縁されている場合 ($h=0$) および水冷などの手段によって温度上昇が零に保たれている場合 ($h=\infty$) について検討している。

$x=a$ なる端面が水冷されていて、端面の温度上昇に応じて熱が冷却水へ放散される場合 ($h=$ 一定) には触れていない。放散係数 h が $h=0, \infty$ なる両極端の場合のみを取扱っている。

4. $x=0 \sim a$ の全区間は一定媒質で、熱伝導定数は一定としている。(つまり鋼板と銅電極が接しているような場合の熱伝導にはふれていない。)

5. 熱が $t=0$ の時刻に瞬間的に投与された場合と $t=0 \sim t$ の期間にわたって持続的に投与された場合とについて検討している。

この後者の場合の温度は 前者の場合の解が既知ならば その時間積分として容易に求められる。それ故に本稿ではまず初めに III 節に前者の場合 すなわち $t=0$ の時刻に熱が瞬間的に投与された場合を述べている。

6. 本稿の III, IV 節は別稿の円柱体の場合の熱伝導の記述に対応している。

使用記号 使用した記号の主なるものは次の通り。

T, T' : 温度上昇。 T' は板表面からの熱損失を考えた場合 ($t=0$ では $T=0$ と仮定している。)

T_{0f}, T_{0f}' : $x=0$ 点の $t=\infty$ における温度上昇。ただし $h=\infty$ の場合、 T_{0f}' は表面の熱放散を考えた場合

T_m : フーリエ級数の m 次の温度調波の振幅

m : フーリエ級数の次数。(3.19)~(3.20) 式。

A_m : 瞬間投与熱源の場合の第 m 次振幅。無次元量。(3.15) 式, (3.23), (3.25) 式

B_m : 持続投与の場合の第 m 次振幅。無次元量。(4.16)~(4.21) 式参照。

h : $h=0$ は $x=a$ なる端面が熱絶縁されている場合、 $h=\infty$ は $x=a$ 点の $T=0$ に保たれている場合。(3.3)~(3.5) 式

t : 時間

τ_1 : 時間定数。基本波に対するもの。熱放散のない場合。(3.9) 式参照。

τ_m, τ_m' : 時間定数 (3.13), (5.12) 式参照。

τ_{rad} : 表面からの熱放散に関する時間定数 (5.4) 式。

f : $f=\tau_1/\tau_{rad}$ (5.13) 式。

R_0 : $R_0=x_0/a$ 。熱源の幅の比率 (3.21) 式。

q : 持続発熱の場合の発熱密度 cal/cm³·sec

q_0 : 熱が Fig. 1 AA 端面に集中した場合の発熱密度 ($q_0=qx_0$)。cal/cm²·sec。(4.13) 式。

r : (5.17), (5.19) 式。

III 瞬間投与の熱源の場合

(a) 温度の基本方程式、初期条件、境界条件

熱が x 方向にのみ伝導する場合を考えると、任意の点 x の時刻 t における温度 T は 熱伝導の基本式として次の関係を満足していなければならぬ。(平板の表面からの熱放散は後に考えるとして、ここではしばらくこれを無視して考える。)(持続的発熱のない場合)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

ただし k は熱伝達率、 $k=K/ea$ 。

ここでは $t=0$ の瞬間に熱が Fig. 2 のハッチの部分に瞬間的に与えられた場合 その後の温度変化を考えるわけで、上式を解くための初期条件は

$$\left. \begin{array}{l} t=0 : x=0 \sim x_0 \text{ では } T=T_0 \\ x=x_0 \sim a \text{ では } T=0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

である。

時間が経過すると、熱は $x=a$ 点にも伝導してくる。もしこの $x=a$ 点が冷却水に接していると、その点の温度上昇 T に比例して熱が冷却水へ放散される。したがって $x=a$ なる点の境界条件として、一般に

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} = hT \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

が成立する。本稿では $h=0, \infty$ の両極端の場合のみを考察し、 h が任意の一定値の場合は考えていない。

$h=0$ は上式からわかるように $x=a$ 点の温度傾斜が零で、 $x=a$ 面が熱絶縁されている場合を意味し、 $h=\infty$ は、 $T=0$ を意味している。これはなんらかの手段によって $x=a$ 面を完全に冷却してその温度を零に保った場合を指している。すなわち

$$h=\infty : T|_{x=a}=0 \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

$$h=0 : \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a}=0 \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

実際の溶接板については $h=\infty$ よりも $h=0$ の条件にはるかに近いが、ここでは抵抗溶接における水冷電極のことも考え、その極端な場合として $h=\infty$ の場合をも考える。

(b) 温度の方程式の特解

今かりに $t=0$ における x に沿う温度分布が Fig. 3 (a) の実線のように、これが cosine 波として

$$T = T_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right) \quad (x = -a \sim +a) \cdots (3.6)$$

であったとし、さらにもし $x = \pm a$ 点の温度は 水冷
その他のなんらかの方法で 常に

$$T = 0 \quad \cdots (3.7)$$

に保たれているものとすれば、その後 時間が経過した
ときの温度は次式で与えられる。

$$T = T_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot e^{-(k\pi^2/4a^2) \cdot t} \quad \cdots (3.8)$$

なんとなれば、上式は $t=0$ においては (3.6) 式と
なり初期条件を満足し、任意の時刻 t において基本式
(3.1) 式の関係の満足し、かつ境界条件 (3.4) 式を満
足しているから正解である。

さて上式の指数項に注目し、

$$\frac{4a^2}{k\pi^2} = \tau_1 \quad \cdots (3.9)$$

とおくと、(3.8) 式は次のようにかける。

$$T = T_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot e^{-t/\tau_1} \quad \cdots (3.10)$$

(3.9) 式の τ_1 は時間の次元を有し、熱時間定数と呼
ばれている。Fig. 3 (a) の点線は $t = \tau_1$ なる時刻にお
ける温度で、すべての点の温度は $t=0$ に比べて $e^{-1} =$
0.367 倍となり、cosine 波はくずれていない。

第3図 $t=0$ の温度が正弦波分布をしている場合

今もし $t=0$ における温度分布が Fig. 3 (a) ではな
く (b) の実線 (曲線③) のようであると、

$$T = T_m \cdot \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) \quad \cdots (3.11)$$

であるとする、その後の温度は次式で与えられる。

$$T = T_m \cdot \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-t/\tau_m} \quad \cdots (3.12)$$

$$\tau_m = \frac{4a^2}{m^2 \cdot k\pi^2} = \frac{1}{m^2} \cdot \tau_1 \quad \cdots (3.13)$$

Fig. 3 (b) の点線はかりに $m=3$ として

$$t = \tau_1 = 9\tau_3$$

の時刻における温度分布を示すもので、(3.12) 式の指
数項は

$$e^{-9} = 0.00012 \quad \cdots (3.14)$$

となり、 $t=0$ の状態 (実線) に比べて極めて小さな値
となる。

Fig. 3 (c) の実線は (a), (b) の実線①, ③の和を示
しているが、今 $t=0$ においてこのような温度分布であ
り、かつ $x = \pm a$ において $T=0$ なる条件が充たされ
ておれば、 $t = \tau_1$ の時点では点線のようになり、第3高
調波は減衰していて ほとんど全く基本波のみの分布と
なる。

このように高調波が基本波に比べて速かに減衰するの
は これを熱伝導論的にいえば次のように理解できる。
すなわち今 $t=0$ において (d) 図のような温度分布が
あるとし、 P_0, Q_0 点間の温度差を考えるに、この温度差
は時間が経過すれば 当然 熱伝導によって解消し、温
度は平均化する。かりに温度差は一定として距離 $\overline{P_0Q_0}$
が異なる場合を考えると、 P_0, Q_0 間の伝導熱は公式

$$K \cdot \frac{dT}{dx}$$

からわかるように、 $\overline{P_0Q_0}$ が短いと、それに比例して増
大する。しかるに $\overline{P_0Q_0}$ 間の保有熱量は容積 $\overline{P_0Q_0}$ に比
例しており、 $\overline{P_0Q_0}$ が短いと保有熱量それ自体が小さい。
したがって P_0, Q_0 間の温度差は $\overline{P_0Q_0}$ が短いと その
距離の2乗に比例して速かに解消し平均化するのであ
る*。

さて一般に $t=0$ における x に沿う温度分布

$$T = T_0 \cdot f(x)$$

が与えられていると、この $f(x)$ は後掲 (3.16) 式のよ
うにフーリエ級数として表示できる。したがって $t \geq 0$
における温度は次の形となる。

$$T = T_0 \cdot \left[A_0 + \sum A_m \cdot \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-t/\tau_m} \right] \quad (3.15)$$

(c) 矩形波分布曲線をフーリエ級数で表示すること

Fig. 4 の太実線で示した矩形波は これを細線で示
した正弦波群の和としてフーリエ級数で示すことができ

第4図 矩形波分布のフーリエ級数による表示

* これは数学的には (3.1) 式にみるように2階微分を意味している。

第 5 図 Fig. 4 の X_0X_1 区間の詳細

る。Fig. 5 は Fig. 4 の

$$x=0 \sim a$$

の領域を拡大して詳しく示したもので、横軸は x の代りに x/a なる比で示しており、縦軸は Fig. 4 の矩形波の高さを 1 とし、その高さの比で示している。

次に Fig. 6 のような矩形波もやはりフーリエ級数で示し得る。Fig. 7 は $(x_0/a)=1/2$ の場合に $x=0 \sim a$ 部分を拡大して示したものである。

第 6 図 矩形波分布のフーリエ級数による表示

第 7 図 Fig. 6 の X_0X_1 区間の詳細

これらフーリエ級数は 数学で教えているように次のように求めることができる。すなわち今 Fig. 6 において X_0 点 ($x=0$ 点) を心中として X_2X_2 区間を考え、この区間の矩形波を $f(x)$ とし、区間の長さを $2a \times 2$ とすると、

$$f(x) = A_0 + A_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + A_2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) + \dots (3.16)$$

ただし

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2a} \int_{-2a}^{2a} f(x) \cdot dx \dots\dots\dots (3.17)$$

$$A_m = \frac{1}{2a} \int_{-2a}^{2a} f(x) \cdot \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) \cdot dx \dots\dots\dots (3.18)$$

(c-1) 境界条件と m 値 上式において m はもとより正の整数であるが、 $x=a$ 点の境界条件 $h=\infty, 0$ に応じて m は

$$h=\infty : m=\text{奇数} \quad m=1, 3, 5 \dots\dots\dots (3.19)$$

$$h=0 : m=\text{偶数} \quad m=2, 4, 6 \dots\dots\dots (3.20)$$

となる。何となれば $m=\text{奇数}$ ならば (3.15) 式の cosine は $x=a$ において 0 となり、 $T=0$ なる境界条件を満足する。また $m=\text{偶数}$ ならば、cosine は $x=a$ において最大となり、cosine を x について微分した sine は零となり、 $\partial T / \partial x = 0$ なる境界条件を満足する。(3.5) 式参照*。

* 上述のように $h=0$ の場合は $m=2, 4, \dots$ となるから $n=m/2$ とおくと、 $n=\text{整数}=1, 2, 3 \dots$ となり、cosine の項は

$$\cos\left(m \frac{\pi x}{2a}\right) = \cos\left(n \frac{\pi x}{a}\right) \quad n=1, 2, 3$$

なる形にかけらる。

今 温度分布として Fig. 8 のようなもの すなわち X_1 ($x=a$) 点を中心として左右対称なものを仮想すると、 $x=a$ 点では左方 X_0 附近の温度による伝導熱と、右方 X_2 附近からの伝導熱とが相等しくなり、左右相殺されて $x=a$ では熱の移動はなく、(3.5) 式が満足される。 X_2 附近の温度分布は X_0 附近のそれに対して「正」の映像として動作しており、フーリエ級数としては X_0X_1 間を 180° (基本波) として取扱ってよい。

第 8 図 $x=a$ 点で熱絶縁されている場合の考え方

これに反して Fig. 6 では X_2 附近の温度分布は X_0 附近のそれに対して負の映像として働いており、 X_0X_2 を 180° (基本波) としなければならぬ。

ここでは $h=0, h=\infty$ の両者を考えて行くので、 $X_0X_2=2a$ 区間を 180° (基本波) とし、 $h=0$ の場合には $m=2, 4, 6$ として取扱うこととする。

Fig. 9 は その初期分布は Fig. 7 とまったく同じであるが、 $x=a$ なる境界条件を $h=0$ とした場合を示している。図の⑩なる水平線は (3.15) 式の A_0 を示している。

第9図 Fig. 8 の X_0X_1 区間の詳細

(c-2) フーリエ級数の各項の振幅

(3.15) 式にみるフーリエ級数の各項の振幅 A_m は (3.18) 式によって計算できる。今 熱の発生領域 x_0 (Fig. 2 参照) と板幅 a との比を

$$R_0 = x_0/a \quad \dots\dots\dots(3.21)$$

として示し、 $x=0 \sim x_0$ では等斉な温度分布 (矩形波) であり、 $x=x_0 \sim a$ では熱の発生はないものとする、(3.18) 式の $f(x)$ は

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \sim x_0 : f(x)=1 \\ x=x_0 \sim a : f(x)=0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.22)$$

において、 A_m は (3.18) 式によって次のようになる。

$$A_m = \frac{1}{m} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(m \frac{\pi}{2} \cdot R_0\right) \dots\dots\dots(3.23)$$

また (3.17) 式の A_0 は $h=\infty$, $h=0$ に応じて、それぞれ Fig. 6, Fig. 8 を考え

$$\left. \begin{array}{l} h=\infty : A_0=0 \\ h=0 : A_0=R_0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.24)$$

Fig. 10 は (3.23) 式の A_m を図解するもので、図の正弦波内に示した縦線分の長さは (3.23) 式の $\sin(m\pi R_0/2)$ を示しており、 A_m はこの線分の長さ $(4/m\pi)$ を乗じたものとなる。

後掲第1表には $R_0=0.3$ の場合について A_m その他の値を示している。

Fig. 11 は $h=0$ で $R_0=1/4$ の場合の波形を示している。

第11図 $R_0=1/4$, $h=0$ の場合

(d) 温度の時間的变化

Fig. 12 は $t=0$ における温度分布が $R_0=1/2$ なる矩形波 (Fig. 7, 9) の場合の その後の温度変化を示し

第10図 フーリエ級数の振幅 A_m の大きさの説明図

第12図 $t=0$ における分布が図のような矩形波 ($R_0=1/2$) の場合の $t=0.01\tau_1$, $0.1\tau_1$ における温度分布

ている。(a) は $h=\infty$ の場合で、フーリエ級数は $m=1, 3, 5\cdots$ であるが、すでに Fig. 3 について述べたように、 $t=\tau_1$ では基本波 ($m=1$) は初めの値の $e^{-1}=0.368$ 倍となるに対して第3高調波 ($m=3$) は $e^{-9}=0.0001$ 倍となり、温度分布曲線はほとんど全く正弦波となっている。このときの $x=0$ 点の値は 0.333

(b) 図は $h=0$ の場合で、 $m=0, 2, 4\cdots$ であるが、 $m=2$ 調波は $t=\tau_1$ の時刻では初めの値の $e^{-4}=0.018$ 倍となり、 $m=4, 6$ などの調波はもちろん極めて小さくなっており、ほとんど A_0 に近くなっている。

図には $t=0.01\tau_1$ の場合も示されているが、分布曲線は初めの $t=0$ のときの矩形波からあまり変っていない。熱ははまだほとんど $x=a$ には伝わっておらず、したがって $x=a$ 点の条件の差 ($h=\infty, 0$) は効かず、分布曲線の形は $h=\infty, 0$ においてほとんど全く同じである。

$t=0.1\tau_1$ では 図に見るように $h=\infty, 0$ なる境界条件の差は $x=a$ 附近では現われている。案外(?)に早く両者の差が現れてくる。

(e) 熱が $x=0$ なる端面に集中的に与えられる場合
前項までに述べる所は $t=0$ における温度分布が Fig. 7, 9, 11 のような矩形波分布の場合であるが、今 Fig. 2 のハッチ幅 x_0 が $x_0 \rightarrow 0$ ($R_0 \rightarrow 0$) の場合を考えてみる。しからば (3.23) 式の A_m は

$$A_m = \frac{1}{m} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(m \cdot \frac{\pi x_0}{2a}\right) \rightarrow \frac{1}{m} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot m \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x_0}{a} = 2x_0/a \quad (3.25)$$

$t=0$ におけるハッチ部分の保有熱量を Q_0 (板厚 1 cm についての値) とすると、その部分の温度 T_0 は

$$T_0 = Q_0 / cax_0$$

それ故に温度のうちの第 m 項の振幅は

$$T_m = T_0 A_m = \frac{Q_0}{cax_0} \cdot \frac{2x_0}{a} = 2 \frac{Q_0}{c a^2} = 2T_{av0} \cdots (3.26)$$

ただしここに T_{av0} は熱量 Q_0 が板全体に与えられた場合の平均温度。

上のように振幅 T_m が m に無関係に一定となるので、温度は次のように与えられる。

$$h=\infty \quad T = 2T_{av0} \cdot \sum \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-t/\tau_m} \quad m=1, 3, 5 \cdots (3.27)$$

$$h=0 \quad T = 2T_{av0} \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-t/\tau_m} \right] \quad m=2, 4, 6 \cdots (3.28)$$

Fig. 13 は $t=0$ における温度分布をフーリエ級数で示したものである。この温度は 実際には $x=0$ 点において $T=\infty$ で、他の点では $T=0$ であることはいうまでもない。

第13図 熱が $x=0$ 端面に集中された場合のフーリエ級数による表示

IV 持続発熱の場合の温度上昇

前節に述べる所は $t=0$ の瞬間に熱を瞬間的に投与した場合についてであるが、 $t=0 \sim t$ の期間にわたって一定割合で熱 (cal/sec) を投与した場合の温度は 前節の結果から容易に計算できる。この過渡的溫度上昇について述べるに先だて、記述の便宜上まず時間がじゅう分長く経過した準定常状態の溫度上昇について一言する。

(a) 準定常状態の溫度上昇

(a-1) $h=\infty$ の場合 一定熱量 q cal/cm²·sec が $0 \sim t$ にわたって $x=0 \sim x_0$ 区間に投与されるとき、 $x=a$ の端面温度が $T=0$ に保持されているとき、 $t=\infty$ としての準定常状態の溫度上昇は

$$x=x_0 \sim a : T_f = \frac{qx_0}{K}(a-x) \cdots (4.1)$$

$$x=0 \sim x_0 : T_f = \frac{qx_0^2}{2K} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) + \frac{qx_0}{K}(a-x_0) \cdots (4.2)$$

となる*。 $x=0$ 点の温度を T_{0f} とかくと、上式から

$$T_{0f} = \frac{qx_0a}{K} \left(1 - \frac{1}{2}R_0\right) \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

(a-2) $h=0$ の場合 この場合には $x=a$ 端面が熱絶縁されているので、 $0 \sim x_0$ 区間の発熱のために板全体の温度は時間とともにドンドン上昇する（板表面からの熱放散は無視）。 $0 \sim x_0$ 区間の発熱は qx_0 であるので、板全体の温度上昇速度は

$$\text{温度上昇速度} = \frac{qx_0}{c\sigma a} \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

今 $x=a$ 点の温度を基準として、これに対する他の点の温度上昇を ΔT で示すと、

$$x=x_0 \sim a \quad \Delta T_f = \frac{qx_0a}{2K} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

$$x=0 \sim x_0 \quad \Delta T_f = \frac{qx_0a}{2K} \left(1 - \frac{x_0}{a}\right) \left(1 - \frac{x^2}{ax_0}\right) \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

となる**。 $x=0$ の ΔT_f を ΔT_{0f} として示すと、

$$\Delta T_{0f} = \frac{qx_0a}{2K} \cdot \left(1 - \frac{x_0}{a}\right) \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

これを (4.3) 式の T_{0f} と比較すると

$$\frac{\Delta T_{0f}}{T_{0f}} = \frac{1-R_0}{2-R_0} \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

(a-3) $R_0 \rightarrow 0$ ($x_0 \rightarrow 0$) の場合（発熱が $x=0$ 端面に集中した場合）今 $0 \sim x_0$ 区間の発熱量 qx_0 を

$$q_0 = qx_0 \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

なる記号で示すと、上に求めた結果は $x_0 \rightarrow 0$ のとき

$$h=\infty \quad T_f = T_{0f} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad T_{0f} = \frac{q_0a}{K} \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

* 上式が正しいことは 上式を x について微分してみるとただちに理解できる。すなわち

$$(4.1) \text{ 式: } -\frac{dT_f}{dx} = \frac{qx_0}{K} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

$$(4.2) \text{ 式: } -\frac{dT_f}{dx} = \frac{qx}{K} \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

(4.4) 式の qx_0 は $0 \sim x_0$ 区間の発生熱で、 $x=x_0 \sim a$ 区間ではこの熱が $x=a$ の方へ伝導するから (4.4) 式が成立する。また (4.1) 式は $x=a$ にて $T=0$ であり、境界条件を満足している。したがって正解である。(4.5) 式についても同様。

** 上式を x について微分してみると

$$(4.7) \text{ 式: } -\frac{d\Delta T_f}{dx} = \frac{qx_0}{K} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

$$(4.8) \text{ 式: } -\frac{d\Delta T_f}{dx} = \frac{qx}{K} \left(1 - \frac{x_0}{a}\right) \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

(4.11) 式は全発生熱 qx_0 の $(1-x/a)$ 分が x 点を通して x 以遠へ伝導されるとして成立し、(4.12) 式は x 点までの発生熱 qx の (x_0/a) 分はその部分の温度上昇のために消費せられ、(4.6) 式参照、その残余 $(1-x_0/a)$ が x 点以遠へ伝導されるところとして理解できる。(4.7)、(4.8) 式は上の基本関係式を満足し、かつ境界条件を満足しているから正解である。

$$h=0 \quad \Delta T_f = \Delta T_{0f} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \quad \Delta T_{0f} = \frac{1}{2} T_{0f} \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

となる。 $h=\infty$ については後掲 Fig. 14(a) の $t=\infty$ の曲線、 $h=0$ については曲線②参照。

(b) 温度上昇の理論式 $t=0$ における温度上昇は零であるとし、 $q \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{sec}$ なる熱量が $t=0 \sim t$ 期間にわたって $x=0 \sim x_0$ 区間に発生したときの時刻 t における温度上昇は 前節に求めた瞬間投与の温度の式を $0 \sim t$ について時間積分することによって次のように求められる。

$$\frac{T}{T_{0f}} = B_0 \frac{t}{\tau_1} + \sum B_m \cdot \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) (1 - e^{-t/\tau_m}) \quad \dots\dots\dots (4.16)$$

ただし T_{0f} は $h=\infty$ の場合の $x=0$ 点の $t=\infty$ の温度上昇であり、(4.3) 式、 B_0 、 B_m は次の通りである*。

$$B_0 = 0 \quad (h=\infty) \\ = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1-R_0/2} \quad (h=0) \quad \dots\dots\dots (4.17)$$

$$B_m = \frac{16}{\pi^3} \cdot \frac{1}{m^3} \cdot \frac{\sin\left(m \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R_0\right)}{R_0(1-R_0/2)} \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

第1表には $R_0=0.3$ の場合の A_m 、 B_m を示してい

* 今 $t=0 \sim t$ の間の任意の時刻 τ と $\tau+d\tau$ との間に $qd\tau$ なる発熱が Fig. 2 のハッチ部分にあったとすると、その瞬間には その部分は

$$dT_0 = qd\tau/c\sigma \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

だけ温度上昇する。これは $x=0 \sim x_0$ の区間の矩形波分布であるから、それより $(t-\tau)$ だけ時間が経過した瞬間 $\tau+(t-\tau)=t$ の時刻には、任意の点 x の温度は (3.15) 式の T_0 の代りに上の dT_0 を、 t の代りに $(t-\tau)$ を代入したものとなる。

今 この式の第 m 項を考えると

$$dT_m = dT_0 \cdot A_m \cdot \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-(t-\tau)/\tau_m}$$

したがって上式を $\tau=0 \sim t$ について積分すると

$$T_m = \int_0^t dT_m = \int_0^t \frac{q}{c\sigma} \cdot A_m \cdot \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) e^{-(t-\tau)/\tau_m} \cdot d\tau \\ = \frac{q}{c\sigma} \cdot A_m \cdot \tau_m \cdot \cos\left(m \cdot \frac{\pi x}{2a}\right) (1 - e^{-t/\tau_m}) \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

上式と (4.3) 式の T_{0f} との比をとると、(4.16) 式の B_m は

$$B_m = \frac{q}{c\sigma} \cdot A_m \cdot \tau_m \cdot \left\{ \frac{qx_0a}{K} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}R_0\right) \right\} \quad \dots\dots\dots (4.21)$$

上式の A_m 、 τ_m に (3.23)、(3.13) の関係を代入すると、上式は (4.18) 式となる。

次に (4.17) 式の B_0 についてであるが、(4.16) 式の第1項は (3.15) 式の A_0 についての積分と T_{0f} との比で、

$$\frac{q}{c\sigma} \cdot \frac{A_0 \cdot t}{T_{0f}} \quad \dots\dots\dots (4.22)$$

である。矩形波についての A_0 は $A_0=R_0$ なることに留意し、 T_{0f} として (4.3) 式を代入すると、 B_0 として (4.17) 式を得る、

第 1 表 $R_0=0.3$ の場合の A_m, B_m の値

m	$h=\infty$		$h=0$	
	A_m	B_m	A_m	B_m
0			.300	.477
1	.578	.919		
2			.514	.204
3	.419	.074		
4			.302	.030
5	.180	.011		
6			.066	.003
7	-.028	-.001		
8			-.081	-.002
9	-.126	-.002		
10			-.127	-.002

る. B_m は (4.18) 式に見るように m^3 に反比例し, 高次のものは A_m よりもはるかに急速に減少してゆく. したがって温度上昇の概算法としては (4.16) 式の初めの 1~2 項のみをとればよいことになる.

第 2 表には $R_0=1, 0.5, 0.3, 0$ の場合の B_0, B_m 値を示している.

 第 2 表 二三の R_0 に対する $B_m (m=0\sim7)$ の値

R_0	1	.5	.3	0	1	.5	.3	0
m	$h=\infty$				$h=0$			
0					.811	.540	.477	.405
1	1.032	.973	.919	.811				
2					0	.170	.204	.203
3	-.038	.036	.074	.090				
4					0	0	.030	.051
5	+.008	-.008	.011	.032				
6					0	-.006	.003	.023
7	-.003	-.003	-.001	.017				

(c) 温度上昇の変化過程

Fig. 14(a)~(d) は $R_0=x_0/a$ の二三の値 ($R_0=0, 0.3, 0.5, 1.0$) に対する温度分布を 時間をパラメータとして示したものである. 実線は $h=\infty$ の場合, 点線は $h=0$ の場合を示している. 縦軸の温度上昇 T は T_{0f} の比で示しているが, この T_{0f} はすでに述べたように $h=\infty$ の場合の $x=0$ 点の定常温度上昇である. (この T_{0f} は R_0 によってその絶対値が異なることは

第 14 図 持続熱源の場合の温度分布

(4.3) 式に見る通りであり、図にはそれぞれの場合の T_{0f} を基準にして T/T_{0f} を示している.)

まず簡明な $R_0=0$ の場合すなわち熱が $x=0$ 端面に集中的に加えられる場合 (Fig. 14(a)) について述べる.

(c-1) $R_0=0$ の場合 (Fig. 14(a))

Fig. 14(a) の実線は $h=\infty$ の場合で、 $t=\infty$ では図に見るように x に沿う温度分布は直線的となる. (4.14) 式. (4.16) 式を $h=\infty$, $R_0=0$ の場合についてかくと

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_{0f}} = & \frac{8}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cdot (1-e^{-t/\tau_1}) \right. \\ & + \frac{1}{9} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot (1-e^{-t/\tau_3}) \\ & \left. + \frac{1}{25} \cos\left(\frac{5\pi x}{2a}\right) \cdot (1-e^{-t/\tau_5}) + \dots \right] \dots (4.23) \end{aligned}$$

となる. $t=\tau_1$ の時刻を考えると、上式第2項 ($m=3$) の τ_3 は (3.13) 式により $\tau_3=\tau_1/9$ であり、指数項は $e^{-t/\tau_3}=e^{-9}=0.0001$

であり、実用上0である. したがって過渡項としては第1項のみが残り、

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_{0f}} = & \frac{8}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \frac{1}{9} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{25} \cos\left(\frac{5\pi x}{2a}\right) + \dots \right] - \frac{8}{\pi^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-t/\tau_1} \\ & \dots (4.24) \end{aligned}$$

上式の初めの項は定常温度分布であり、(4.14) 式に等しい. すなわち上式を書改めると、 $t>\tau_1$ では

$$\frac{T}{T_{0f}} = \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{8}{\pi^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-t/\tau_1} \dots (4.25)$$

上に述べる所からわかるように Fig. 14(a) の実線の $t=\tau_1$ 曲線と $t=\infty$ 曲線 (直線) との差は上式の第2項で与えられ、この差の x に沿う分布は cosine となっている.

$t=0.5\tau_1$ の時刻においても $m \geq 3$ の過渡項はやはりほとんど零になっており、 $t=\infty$ の直線との差はほぼ cosine の形になっている.

$t=0.1\tau_1$ の曲線は (4.24) 式によって論考することは困難で、後に (e) 項に述べる. この時期では $x=0$ に投与された熱はいまだ $x=a$ 点にはほとんど到達していない.

次に $h=0$ の場合 (点線) についてであるが、 $t=0.1\tau_1$ の時刻では 熱はいまだ $x=a$ には達していないので、 $x=a$ 点の境界条件の差 ($h=0, \infty$) は効かず、温度分布は $h=\infty$ の場合 (実線) と実用上差がない. ただ $t=0.5\tau_1$ になると、図に見るように多少の差が生じてくる.

(4.16) 式を $R_0=0$, $h=0$ の場合についてかくと*

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_{0f}} = & \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{t}{\tau_1} + \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi x}{2a}\right) (1-e^{-t/\tau_2}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} \cos\left(\frac{4\pi x}{2a}\right) (1-e^{-t/\tau_4}) + \dots \right] \dots (4.26) \end{aligned}$$

今 $t=\tau_1$ の時刻を考えると、上式の τ_2 は $\tau_2=\tau_1/4$ であるので、その指数項はほとんど0である. それ故に上式の第2項以下は

$$\text{第2項以下} = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi x}{2a}\right) + \frac{1}{16} \cos\left(\frac{4\pi x}{2a}\right) + \dots \right]$$

となり、温度は第1項のみによって上昇する.

一方 (4.7) 式において $x \rightarrow 0$ ($R_0 \rightarrow 0$) の場合の温度 ΔT は

$$\frac{\Delta T}{T_{0f}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \dots (4.27)$$

となるが、これをフーリエ級数に展開すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 = & \frac{1}{6} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=2, 4, 6, \dots} \frac{1}{m^2} \cos\left(m \frac{\pi x}{2a}\right) \\ & (m=2, 4, 6, \dots) \end{aligned}$$

上式の $x=0$ 点の値は $1/6$ であるから、上式から

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{m=2, 4, 6, \dots} \frac{1}{m^2} \cos\left(m \frac{\pi x}{2a}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \dots (4.28)$$

したがって $t=\tau_1$ の時刻における $x=0$ 点の温度は

$$\frac{T}{T_{0f}} = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\tau_1}{\tau_1} + \frac{1}{3} = 0.738 \dots (4.29)$$

となる. Fig. 14(a) 参照.

次に Fig. 14(a) の曲線②は $x=0$ の温度を T_{0f} として (4.26) 式を描いたもので、その時刻 t は (4.28) 式から

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{t}{\tau_1} = & 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=2, 4, 6, \dots} \frac{1}{m^2} \cos\left(m \frac{\pi x}{2a}\right) = 1 - \frac{1}{3} \\ \therefore \frac{t}{\tau_1} = & \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1.64 \dots (4.30) \end{aligned}$$

(c-2) $R_0=1$ の場合 (Fig. 14(d) 参照)

これは $x=0 \sim a$ の全域に発熱のある場合であるが、まず $h=\infty$ の場合を考える.

$h=\infty$ の場合** この場合の T_{0f} は (4.3) 式から $T_{0f}=qa^2/2K$ (4.31)

となり、この値は全発熱量が $x=0$ 点に集中した場合の T_{0f} の $1/2$ である. 定常状態の温度分布は (4.2) 式から

$$\frac{T}{T_{0f}} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \dots (4.32)$$

* $R_0 \rightarrow 0$ となると、 $\sin\left(m \frac{\pi}{2} R_0\right) \rightarrow m \frac{\pi}{2} R_0$

(4.18) 式において上の関係を利用すると、(4.16) 式は (4.26) 式となる.

** この場合の温度分布、温度変化についてはすでに文献(2)(点溶接における板中の温度変化)に論考してある.

となり、分布曲線はパラボラ形となる。Fig. 14(d) の $t=\infty$ の曲線。

過渡現象的の温度変化は (4.16), (4.18) 式において $R_0=1$ において ($m=1, 3, 5 \dots$)

$$\frac{T}{T_{0f}} = \frac{32}{\pi^3} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cdot (1 - e^{-t/\tau_1}) - \frac{1}{27} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot (1 - e^{-t/\tau_3}) + \dots \right] \dots (4.33)$$

となる。 $m=3$ 項はその振幅が基本波 ($m=1$) に比べて $(1/27)$ 倍となり、小さいので、 x に沿う温度分布は大体 cosine 波形となる。(つまり Fig. 14(d) の $t=\infty$ なるパラボラ曲線はすでに大体 cosine に近い)

さて Fig. 14(d) において $t=0.1\tau_1$ の曲線を見ると、 $x=(0\sim 0.5)a$ の部分では大体水平線で、 $h=0$ の場合の点線に一致している。これは熱が $x=0\sim a$ の全域に発生し、ただ $x=a$ 点からのみ伝導し去るが、 $t=0.1\tau_1$ の時刻では $x=(0\sim 0.5)a$ の発熱は $x=a$ の方へ伝導する暇がなく、これがため等質な温度上昇となるのである。

$h=0$ の場合 この場合は $x=a$ 点が熱絶縁されているので、 $x=0\sim a$ の発生熱はそのまま発生点の温度上昇に費やされる。つまり (4.8) 式の ΔT は零で、(4.18) 式の B_m も零で (Fig. 10(b) の $R_0=1$ の場合参照)、温度分布曲線は図の点線のような水平線となる。温度は時間とともに上昇し、その上昇速度は $q/c\sigma$ であるから、 $t=\tau_1$ の時刻では温度は

$$(q/c\sigma) \cdot \tau_1$$

となる。これを T_{0f} と比べると

$$\frac{q \cdot \tau_1}{c\sigma} = \frac{q}{c\sigma} \cdot \frac{4a^2}{k\pi^2} = \frac{8}{\pi^2} \frac{qa^2}{2K} \dots (4.34)$$

となる。図の $t=\tau_1$ の点線の高さは上式に見るように $8/\pi^2=0.810$ である。

(c-3) $R_0=0.5, 0.3$ の場合 (Fig. 14 (b), (c))

これらの場合は上に述べた $R_0=0$ の場合と $R_0=1$ の場合の中間となる。曲線の傾向は定性的にはよくならずき得る所である。

(d) 持続加熱の場合の温度上昇速度

$x=0\sim x_0$ の領域に q なる発熱を持続的に投与する場合の温度上昇は (4.16) 式で与えられる。したがって温度上昇速度は (4.16) 式を t について微分した形で与えられる。しかるに (4.16) 式は (3.15) 式を積分して得たものであるから、上昇速度は (3.15) 式に比例することになる。

既掲 Fig. 12 は $x_0/a=0.5$ の場合の二三の時刻

($t/\tau_1=0, 0.01, 0.1, 1$) における温度分布を示しているが、この曲線の高さは上に述べる所からわかるように $x=0\sim x_0$ の領域に一定発熱 q が持続して与えられたときの温度上昇速度を示していることになる。

(e) 映像法による計算

前項までは板幅 a なる平板の一次元熱伝導をフーリエ級数によって取扱うことについてであるが、本稿に論じた $h=0, h=\infty$ のような簡明な場合はフーリエ級数によらず、 $a\rightarrow\infty$ とした無限板の場合の熱伝導の公式を用い、いわゆる映像法によって求めることもできる。これは時間があまり経過していない状態に——Fig. 14 において $t=0.1\tau_1$ のような曲線——を求める場合に便利である。

今簡単のため発熱が Fig. 1 の AA なる端面に集中的に与えられる場合 ($x_0\rightarrow 0, qx_0\rightarrow q_0$) について述べるに、無限板の場合の温度の公式は次式で与えられる。

$$T = \frac{q_0}{K} x \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-\beta^2}}{\beta} - \{1 - \Phi(\beta)\} \right] \dots (4.35)$$

ただし

$$\beta = \sqrt{x^2/4kt} \dots (4.36)$$

したがって、これを板幅が a なる有限板の場合の $x=0$ 点の最終温度上昇 T_{0f} (4.14) 式と比較すると、

$$\frac{T}{T_{0f}} = \frac{x}{a} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-\beta^2}}{\beta} - \{1 - \Phi(\beta)\} \right] \dots (4.37)$$

上式の β は (4.36) 式のとおりであるが、今

$$t/\tau_1 = g \dots (4.38)$$

とおき、 $x=a$ 点の β を β_a とおくと、

$$\beta_a^2 = \frac{a^2}{4kt} = \frac{a^2}{4kg\tau_1} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\pi^2}{16} \dots (4.39)$$

他の任意の x 点についての β は

$$\beta^2 = \beta_a^2 \cdot \frac{x^2}{a^2} \dots (4.40)$$

Fig. 15 の実線は $g=1$ ($t=\tau_1$) の時刻における温度

第15図 板幅が無限大の場合の温度分布

分布を計算したものである*。点線は映像法のためのもの。後述。

Fig. 17 は 板幅が a なる場合の温度を映像法によって求めるための説明図である。ここでは端面 AA に q_0 なる投熱がある場合を考えており、(a) 図において端面 BB に対して AA の映像の点 A'A' に $+q_0$ ($h=0$ の場合) あるいは $-q_0$ ($h=\infty$) なる映像熱源を仮想する。

(b) 図は端面 AA にのみ発熱 q_0 がある場合の無限板におけるある時刻 t における温度分布であるとす*

(c) 図は $h=\infty$ の場合で、曲線①は (b) 図の曲線①部分、②' は (b) 図の曲線②部分を逆転したもので、③' はその続きである。②' が反対符号になっているのは (a) 図の映像として $-q_0$ を考えているからであるが、③' も反対符号なのは 端面 AA では一定発熱 q_0 のみがあって、A'A' にある $-q_0$ (映像) による熱は AA には全反射されるからである。

* Fig. 15 のような曲線は 誤差函数表によって数値を計算する必要上、種々なる時間 $t(\beta)$ についての曲線を描くことは手数を要して面倒である。しかしこれは次のように一つの曲線が描かれれば、他は容易に描くことができる。すなわち Fig. 16 において

第16図 ある時刻 t における分布曲線が既知ならば、他の時刻における分布曲線②は作図によって求められる。

曲線①をある時刻 (ここでは $t=\tau_1$) における温度分布曲線であるとすると、他の時刻における分布曲線②は次のようにして求められる。今 P 点を曲線①上の点であるとすると、P 点と原点 O と直線で結び、OP 上に Q 点をとって、かりに OQ を OP の $1/2$ とすると、Q 点は $t=\tau_1/4$ における温度分布曲線上の点を与える。何となれば、Q と P との x 座標は 1 : 2 の関係にあるので、時間の関係は 1 : 4 の関係におけば、(4.36) 式の β は両者において等しくなり、温度は (4.37) 式に見るように (x/a) に比例し、1 : 2 の関係にある。これは上の作図による P, Q の関係を満足している。かくして曲線①から曲線②が求められる。

第17図 映像法による温度の計算説明図

(d) 図は $h=0$ の場合で、熱は BB で全反射され、反射された熱は AA においても (c) の場合と同様反射される。(c), (d) 図において太実線が合成温度である。

無限板について $t=\tau_1$ 時刻についての温度は Fig. 15 のようであり、 $x=0, a, 2a$ の温度は次のようになる。

x/a	0	1	2	3
T/T_{0f}	.718	.127	.009	0

それ故に $h=\infty$ の場合の $x=0$ 点の温度は

$$0.718 - 0.009 - 0.009 = 0.700 \dots \dots (4.41)$$

また $h=0$ の場合の $x=0, x=a$ の温度は

$$\left. \begin{array}{l} x=a \quad 0.127 + 0.127 = 0.254 \\ x=0 \quad 0.718 + 0.009 \times 2 = 0.735 \end{array} \right\} \dots \dots (4.42)$$

V 熱放散を考えた場合

前節までに述べる所は 板表面からの熱放散を無視している。板表面からの熱放散を考慮に入れると、当然温度上昇は低く計算される。抵抗溶接の場合は別としてアーク溶接の母板の温度上昇の問題に対しては 板表面からの熱損失は後に明かとなるように無視し得ない重大な影響を与える。

(a) 温度の基本式 一熱を瞬間的に投与した場合一

板の温度上昇があまり大したものではない場合には 表面からの熱放散は温度上昇 (外界との温度差) T に比例すると考えてよく、温度に関する基本方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - bT \dots \dots (5.1)$$

なる形にかけ³⁾。上式の解として、今

$$T = e^{-bt} \cdot \phi(x, t) \quad \dots\dots\dots(5.2)$$

といて、これを (5.1) 式に代入してみると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(5.3)$$

を得る。これは熱放散のない場合の基本式 (3.1) 式と同じ形である。したがって熱放散のある場合の温度はない場合の温度の解——Ⅲ節に求めたもの——に e^{-bt} を乗ずればよいこととなる³⁾。

(b) 熱の放散係数——熱放散の時間定数

(5.2) 式に見るように b は (1/sec) の次元を有している。今この逆数を考え、

$$1/b = \tau_{\text{rad}} \quad \dots\dots\dots(5.4)$$

とかくと、(5.2) 式の指数項は

$$e^{-bt} = e^{-t/\tau_{\text{rad}}} \quad \dots\dots\dots(5.5)$$

とかける。 τ_{rad} は熱放散に関する時間定数である。

さてこの $b (=1/\tau_{\text{rad}})$ の値についてであるが、板表面からの放散能を $\alpha \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot ^\circ\text{C}$ とし、熱放散は板の表裏両面に生ずるものとし、 d を板厚とすると、

$$b = \frac{\alpha}{c\sigma} \cdot \frac{2}{d} \quad \dots\dots\dots(5.6)$$

とかける。今

$$\alpha = 10^{-3} \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot ^\circ\text{C} \quad \dots\dots\dots(5.7)$$

とし*、 $c\sigma = 1 \text{ cal/cm}^3 \cdot ^\circ\text{C}$ 、 $d = 2 \text{ cm}$ とすると

$$\tau_{\text{rad}} = \frac{1}{b} = \frac{c\sigma}{\alpha} \cdot \frac{d}{2} \quad \dots\dots\dots(5.8)$$

$$= \frac{1}{10^{-3}} \cdot \frac{2}{2} = 10^3 \text{ (sec)} \quad \dots\dots\dots(5.9)$$

となる。今この τ_{rad} を板中の熱伝導に関する時定数と比較するに、 τ_m のうち τ_1 は (3.9) 式に見るように

$$\tau_1 = \frac{4a^2}{\pi^2 k}$$

である。今母板寸法として $a = 10 \text{ cm}$ とし、 $k = 0.1 \text{ cm}^2/\text{sec}$ とすると

$$\tau_1 = 4 \times 100 \div (\pi^2 \times 0.1) \approx 400 \text{ (sec)} \quad \dots\dots\dots(5.10)$$

となる。これは (5.7) の τ_{rad} と似た値である。 τ_{rad} は板厚 d によって比例的に変化し、薄板では小さな値となり、 τ_1 よりも小さな値となることが容易に起り得ることは大いに注目に値する。

(c) 熱を瞬間的に投与した場合の温度

熱を $t=0$ の時刻に瞬間的に投与した場合に、表面からの熱損失がない場合の温度は (3.15) 式で与えられるから、熱損失がある場合の温度上昇 T' は (5.2) 式によって次の形にかけ³⁾。(熱損失を考えた場合の温度上

昇を T' として記し、前節までに求めた T と区別して示す)

$$\begin{aligned} T' &= T_0 \cdot e^{-t/\tau_{\text{rad}}} \cdot \left[A_0 + \sum A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-t/\tau_m} \right] \\ &= T_0 \left[A_0 \cdot e^{-t/\tau_{\text{rad}}} + \sum A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-t/\tau_m'} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5.11)$$

ただし

$$\tau_m' = \frac{\tau_m \cdot \tau_{\text{rad}}}{\tau_m + \tau_{\text{rad}}} \quad \dots\dots\dots(5.12)$$

今

$$\tau_1/\tau_{\text{rad}} = f \quad \dots\dots\dots(5.13)$$

とおくと、上の τ_m' は (3.13) 式によって次のようになる。

$$\tau_m' = \tau_1 / (m^2 + f) \quad \dots\dots\dots(5.14)$$

すでに (b) 項に述べたように板寸法のいかんによっては τ_{rad} は τ_1 に近い値あるいはさらに小さな値 (b が大) となり、熱放散がある場合は温度は急速に低下することとなる。次に述べる持続熱源の場合参照。

(d) 持続熱源の場合——その 1——定常温度上昇

板表面からの熱放散を無視すると、 $h=0$ の場合には温度は時間とともにドンドン上昇するが、熱放散を考えると $h=0$ でも無限には上昇しない。

Fig. 18 の $t=\infty$ なる曲線は (5.13) 式の f を $f=1$ として定常温度上昇の分布を後に示す理論式から計算したもので、(a) は $R_0=0$ すなわち熱が Fig. 1 の AA 端面にのみ発生した場合、(b) は $R_0=1$ すなわち熱が $x=0 \sim a$ の全面に等斉に発生持続した場合を示している。ここでは紙数の関係もあり、これら $R_0=0, 1$ の場合に限定して考えることとし、まず $t=\infty$ なる定常温度上昇について述べる。

$R_0=0$ の場合 (熱を $x=0$ 端面に集中投与)

$x=0$ 端面に q_0 なる熱が $t=0 \sim t$ にわたって投与される場合の定常温度上昇は次のようになる*。

$h=\infty$ の場合：

$$T_f' = \frac{q_0}{rK} \cdot \frac{1}{e^{2\gamma a} + 1} (e^{\gamma(2a-x)} - e^{\gamma x}) \quad \dots\dots\dots(5.15)$$

$h=0$ の場合：

$$T_f' = \frac{q_0}{rK} \cdot \frac{1}{e^{2\gamma a} - 1} (e^{\gamma(2a-x)} + e^{\gamma x}) \quad \dots\dots\dots(5.16)$$

ただし

* この場合には基本式は (5.1) 式の左辺を零としたものに等しく (何となれば、 x に沿う発熱は零 $q=0$ 。後掲 (5.27) 式参照)、(5.15)、(5.16) 式はこれを満足している。 $x=a$ 点の境界条件は (3.4)、(3.5) 式であり、 $x=0$ 点の条件は

$$-K \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 \quad \dots\dots\dots(5.18)$$

であるが、これらを満足しているから正解である。

* (5.7) 式の α は黒体からの熱輻射よりも一般に大となる。対流によるもので³⁾、風があればさらに大となる。

(a) $R_0=0$ の場合 (b) $R_0=1$ の場合第18図 表面からの熱放散を考慮した場合の温度分布 ($\tau_{\text{rad}}=\tau_1$ と仮定している。)

$$r = \sqrt{b/k} \quad \dots\dots\dots (5.17)$$

さて (5.17) 式の r の値は (5.4), (5.13), (3.9) 式を代入すると

$$r = \sqrt{f} \cdot \pi/2a \quad \dots\dots\dots (5.19)$$

$$\therefore 2ar = \sqrt{f} \cdot \pi \quad \dots\dots\dots (5.20)$$

したがって今 $f=1$ として $x=0$ 点の T'_f の値 T'_{of} を計算し、これを表面からの熱放散のない場合の T_{of} (4.3) 式と比較してみると、 $h=\infty$ の場合には

$$\frac{T'_{of}}{T_{of}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{e^\pi - 1}{e^\pi + 1} = 0.583 \quad \dots\dots\dots (5.21)$$

となり、 x に沿う温度分布は

$$\frac{T'_f}{T_{of}} = 0.583 \cdot \frac{e^{\pi(1-x/2a)} - e^{\pi x/2a}}{e^\pi - 1} \quad \dots\dots\dots (5.22)$$

となる。Fig. 18(a) の $t=\infty$ の曲線 (実線) はこれを示している*。

次に $h=0$ の場合には T'_{of} は $f=1$ とすると

$$\frac{T'_{of}}{T_{of}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} = 0.695 \quad \dots\dots\dots (5.23)$$

となり、 x に沿う温度分布は

$$\frac{T'_f}{T_{of}} = 0.695 \cdot \frac{e^{\pi(1-x/2a)} + e^{\pi x/2a}}{e^\pi + 1} \quad \dots\dots\dots (5.24)$$

となる。Fig. 18(a) 参照。

$R_0=1$ の場合 (熱が $x=0 \sim a$ の全面に発生)

この場合の定常解は次のようになる**。

* この曲線の $x=0$ における傾斜は (5.18) 式にて規定されており、表面からの熱放散がない場合の曲線 (Fig. 14(a)) の $t=\infty$ の曲線のそれに等しい。 x が増すに従って表面からの熱放散のために板中を右方へ伝導する熱流が減少し、曲線の傾斜が低下する。

** この場合の基本式は

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - bT + \frac{q}{c\sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.27)$$

である。(5.25), (5.26) 式はこの基本式を満足し、かつ $x=0$, $x=a$ の境界条件を満足しているから正解である。

$$h=\infty: T'_f = \frac{q}{K} \cdot \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{e^{\gamma a} + e^{-\gamma a}} \right) \quad \dots\dots\dots (5.25)$$

$$h=0: T'_f = \frac{q}{K} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{q}{c\sigma} \cdot \frac{1}{b} \quad \dots\dots\dots (5.26)$$

上式によって $x=0$ 点の温度 T'_{of} を求めると、 $f=1$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} h=\infty \quad T'_{of} &= 0.487 T_{of} \\ h=0 \quad T'_{of} &= \frac{8}{\pi^2} T_{of} = 0.810 T_{of} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.28)$$

となる。Fig. 18(b) 参照。

(e) 持続熱源の場合——その2——過渡的变化

板表面からの熱放散がない場合の温度は (4.16) 式で与えられるが、熱放散がある場合の温度は (4.16) 式に e^{-bt} を乗じたものではない。熱損失がある場合の瞬間投与の場合の式—(5.11) 式を $t=0 \sim t$ について積分したものが答で、(5.11) 式において T_0 を $q/c\sigma$ とおいて積分すると

$$\begin{aligned} T' &= \frac{q}{c\sigma} \left[A_0 (1 - e^{-t/\tau_{\text{rad}}}) \right. \\ &\quad \left. + \sum A_m \cdot \tau_m' \cos \left(m \frac{\pi x}{2a} \right) \cdot (1 - e^{-t/\tau_m'}) \right] \quad \dots\dots\dots (5.29) \end{aligned}$$

となる。(4.16), (4.21) 式など参照。

$R_0=0$ の場合 これを $h=\infty, 0$ について考える。

$h=\infty$ この場合には m は (3.19) 式により $m=1, 3, 5$ であるが、上式の τ_m' を (5.14) 式によって τ_1 を用いて示し、かつ上式の定常項と過渡項とを分けて考えると、

$$\begin{aligned} \frac{T'}{T_{of}} &= \frac{T'_f(x)}{T_{of}} - \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{1+f} \cdot \cos \left(\frac{\pi x}{2a} \right) \cdot e^{-(1+f)t/\tau_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3^2+f} \cdot \cos \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot e^{-(9+f)t/\tau_1} + \dots \right] \quad \dots\dots\dots (5.30) \end{aligned}$$

となる。ただし上式の $T'_f(x)$ は定常項で、(5.29) 式において $t=\infty$ とおいたものであるが、これは (5.15)

式で与えられる。

Fig. 18(a) には $t=(0.1, 0.5, 1)\tau_1$ の場合の分布曲線を示しているが、($f=1$)、図において注目すべきは $t=\tau_1$ の曲線は $t=\infty$ の曲線とあまり差がない点である。これは表面からの熱損失があるので、温度が少し上昇するとその上昇速度がいじりしく減少するからで、熱放散のない場合 (Fig. 14(a) の $t=\infty, t=\tau_1$ の曲線) と相当に趣きを異にしている。 $t=0.1\tau_1$ の曲線は 発熱開始よりいまだあまり時間も経過しておらず、かつその温度上昇値も低いので、熱放散を無視した場合の曲線 (Fig. 14(a) 参照) とほとんど差がない。

$h=0$: この場合には $m=0, 2, 4 \dots$ となり、

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{T_f'(x)}{T_0 f} - \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} e^{-f^2/\tau_1} + \frac{1}{2^2+f} \cos\left(\frac{2\pi x}{2a}\right) e^{-(4+f)^2/\tau_1} + \dots \right] \dots (5.31)$$

となる。Fig. 18(a) には $t=\tau_1$ の曲線を $f=1$ として描いている。

$R_0=1$ の場合 この場合も前述の $R_0=0$ の場合と似た形としてかける。ただ (5.29) 式の A_m が R_0 値によって異なるので、(3.23) 式 m 、次項の係数が異なる。

$h=\infty$: 温度 T' をそのまま誌すと

$$T' = \frac{qa^2}{2K} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1+f} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cdot (1 - e^{-(1+f)^2/\tau_1}) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2+f} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot (1 - e^{-(9+f)^2/\tau_1}) + \dots \right] \dots (5.32)*$$

$h=0$: この場合には温度はすべての x 点において同

一で、時間定数 τ_{rad} にて指数函数的に上昇する。

$$T' = T_f' \cdot (1 - e^{-t/\tau_{\text{rad}}}) \\ = T_0 f' \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{f} (1 - e^{-f^2/\tau_1}) \dots (5.33)$$

Fig. 18(b) には $f=1$ として $t=\infty, \tau_1, 0.5\tau_1$ などの温度を示している。

なお $t=\infty$ の高さは図に見るように $8/\pi^2=0.81$ であり、これは熱放散を無視した場合の $t=\tau_1$ における値 (Fig. 14(d) の $t=\tau_1$ 曲線) と一致している。これはここでは $f=1(\tau_{\text{rad}}=\tau_1)$ と仮定しているからであることはいうまでもない。

VI 結 言

本稿は静止熱源による平板中の一次元の熱伝導を主としてフーリエ級数によって取扱ったもので、実際のアーク溶接における母板の温度分布についての知見を得ることをねらいとしている。得られた結果の概要はグラフとしては Fig. 14, Fig. 18 に示しているが、理論式としては温度変化を熱時間定数 τ_1, τ_m で取扱い、表面からの熱放散も τ_{rad} なる時間定数で取扱ったので、板自体の熱伝導による温度変化と表面損失による温度変化との関係を明快に知ることができ、板寸法によって定まる $\tau_1, \tau_{\text{rad}}$ の任意の場合の考察が容易にできるようになっている。比較的小さな寸法の母板についても 表面からの熱放散は温度に大きく影響することは注目に値する。

引用文献

- 1) 安藤弘平：溶学誌 39 (1) 9 (1970)
- 2) 安藤・中村：溶接誌 26 (12) 742 (1957)
- 3) 渡辺・佐藤：溶接力学とその応用 朝倉書店