構造用材料の溶接変形におよぼす溶接諸条件の影響*

佐藤 邦彦** 寺崎 俊夫**

Effect of Welding Conditions on Welding Deformations in Welded Structural Materials*

by Kunihiko Satoh** and Toshio Terasaki**

It is well known that welding deformations influence strength and ductility of weldments. In the present report, attention is focussed to the effect of welding conditions, such as weld heat input, physical and mechanical properties of materials, size of weldment etc, on welding deformations in surfacing weld. Parameters which dominates welding deformations are deduced by the use of theories of heat flow and thermoelasto-plasticity. Experiments are carried out under various conditions, changing weld heat input, plate thickness and material, for investigating the effect of those parameters on welding deformations.

From this study, the following informations are obtained.

- (1) Welding deformations are determined by the following parameters;
 - (a) Heat input $T_0^* = \alpha_0 Q / c \rho \varepsilon_{Y0} h^2$
 - (b) Initial temperature $\theta_i^* = \alpha_0 \theta_i / \varepsilon_{Y0}$
 - (c) Temperature above which yield stress becomes zero $\theta_M^* = \alpha_0 \theta_M / \varepsilon_{Y0}$
- (2) Welding deformations are determined by parameter Q/h^2 , θ_i when material is same.
- (3) In the case of mild steel, welding deformations are not depend on welding processes such as GMAW, GTAW, SMAW and SAW, when Q/h^2 is less than or nearly equal to 2500 cal/cm^3 .
- (4) Conventional formulae to calculate welding deformations are derived from the theory and experimental results.

1. 緒 言

溶接変形におよぼす溶接諸条件の影響については古くから多くの研究が行なわれ、多くの知見が得られている。

しかし、これまでの多くの研究は主として軟鋼板の被覆アーク溶接による溶接変形を取り扱っており、最近の溶接構造用材料の多様化、溶接技術の進歩に対応して溶接変形を系統的に論じた報告はあまり見あたらない。

本論文ではまず溶接変形を決定する主要な要因が溶接部近傍の熱サイクルと材料定数の温度依存性であることに注目して、溶接変形を整理するパラメータを熱伝導相似則と二次元有限要素法熱弾塑性解析により見出した。

次に3種の構造用材料(軟鋼, Al合金, オーステナイト系ステンレス鋼)を用い、SMAW, GMAW, SAW, GTAWの4種の溶接法によってビード溶着による横収縮、横曲り変形の測定を行なった。そして、これらの実験結果を著者の一人りが以前に導いたパラメータ(以後“従来のパラメータ”と呼ぶ)と今回導いたパラメータ(以後“熱弾塑性パラメータ”と呼ぶ)とを用いて整理

した結果を比較考察するとともに、使用した3種の材料の溶接変形を比較的簡単に推定できる略算式を導いた。

2. 溶接変形を整理するためのパラメータ

Fig. 1に示す長さ L , 幅 $2W$, 板厚 h の平板表面を z 軸に沿ってビード溶着する場合を対象として、横収縮・横曲り変形を規定するパラメータについて考察する。

Fig. 1 Specimen of bead-on-plate test

溶接変形に影響する要因を見出すため、前報²⁾の研究にならって、ひずみ・応力・温度・材料定数などについて Table 1 に示す無次元変数を利用する。これらの無次元変数を使用した場合、任意の点 (X^*, Y^*) の任意の時刻 τ^* における無次元化された応力・ひずみが同じ

*原稿受付 昭和50年11月19日 (昭和49年度秋季全国大会にて発表)

**正 員 大阪大学工学部 Member, Faculty of Engineering, Osaka University

Table 1 Dimensionless Variables used in Thermo-elasto-plastic study

Strain	$\epsilon^* = \epsilon/\epsilon_0$
Stress	$\sigma^* = \sigma/\sigma_0$
Temperature	$\theta^* = \alpha_0 \theta/\epsilon_0$
Yield Stress	$\sigma_y^* = \sigma_y/\sigma_0$
Linear Thermal Expansion Coefficient	$\alpha^* = \alpha/\alpha_0$
Young's Modulus	$E^* = E/E_0$
Coefficient of Work Hardening	$H^* = H/H_0$
Plate Width	$W^* = W/h$
Location	$X^* = X/h$ $Y^* = Y/h$
Time	$\tau^* = 2kt/h$

Note: ϵ : Strain σ : Stress
 θ : Temperature
 ϵ_0 : Yield strain at reference temperature
 σ_0 : Yield stress at reference temperature
 α : Linear thermal expansion coefficient
 E : Young's modulus
 H : Coefficient of work hardening
 k : Thermal diffusivity coefficient
 t : Time
 x, y : Location
 Subscript "0" means at reference temperature

になるためには次の2つの条件が同時に成立しなければならない³⁾。

- ① 温度 $\theta^* = \theta^*(\tau^*, X^*, Y^*)$ の履歴が同じであること
- ② 材料定数 $\sigma_y^*, \alpha^*, E^*, H^*$ の温度 θ^* に関する依存性が同じであること

まず、上記の条件①について考察する。Fig. 1 に示す z 軸上に強さ Q cal/cm の線熱源が瞬間投与される場合、任意の点 (X^*, Y^*) の任意時刻 τ^* における温度 θ^* は板表面からの熱放散を無視すると次式で与えられる。

$$\theta^* - \theta_i^* = T_0^* [u_i(\tau^*, X^*, Y^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \{u_i(\tau^*, X^* \pm 2nW^*, Y^*) + u_i(\tau^*, X^*, Y^* \pm 2n)\}] \dots (1)$$

ただし

$$\begin{cases} T_0^* = \alpha_0 Q / \epsilon_{Y0} c \rho h^2 & (T_0^* \text{を以後}^* \text{入熱のパラメータと呼ぶ}) \\ \theta_i^* = \alpha_0 \theta_i / \epsilon_{Y0} & \theta_i: \text{板の初期温度} \\ (\kappa, \xi, \eta) = 2 / (\pi \kappa^2) \cdot \exp[-(\xi^2 + \eta^2) / \kappa^2] \end{cases}$$

式(1)からわかるように、瞬間線熱源が投与されたという初期条件を用いるかぎり、温度 θ^* の履歴は入熱のパラメータ T_0^* と板の初期温度 θ_i^* によって決定される。したがって、上記の条件①は「 T_0^* と θ_i^* が同じであること」と書きかえることができる。

次に、上記の条件②について考察する。材料定数 $\sigma_y^*, \alpha^*, E^*, H^*$ の温度依存性が溶接変形におよぼす影響を知るために、材料定数の温度依存性として前報²⁾と同様に Fig. 2 に示す4つの形式のものを採用し、Fig. 1 において $W=100$ mm, $h=15$ mm, $\theta_i=0^\circ\text{C}$ とし、 z 軸上に強さ $Q=1000$ cal/cm の線熱源が瞬間投与された場合

Fig. 2 Temperature dependence of physical and mechanical properties selected for thermo-elasto-plastic analyses

Fig. 3 Boundary condition applied to shrinkage distortion analysis

について xy 平面内の二次元 FEM 熱弾塑性解析を行なった。解析には 0°C の材料定数として軟鋼板の材料定数(前報²⁾ Table 3)を使用し、横収縮・横曲り変形の過渡的变化を求めた。この場合周辺条件を次のようにした。すなわち、冷却の初期の段階では、板の表面側に凸の曲げ変形を生じないように Fig. 3 に示すような拘束を与えた。このような拘束を与えると、 y 軸上に生じる z 軸まわりの拘束曲げモーメントがちょうど零を通過する瞬間 Fig. 3 の B 点)以降は、拘束を取り除いて周辺自由な条件で冷却させた。したがって、横曲り変形 δ は Fig. 3 に示すように B 点以降で生じる。このような周辺条件を与えた理由はビード溶着による横曲り変形の過渡

的变化を溶接線の中央断面において実測してみると溶接長およそ 100 mm 以上の場合には溶接側に凸の曲り変形がほとんど生じないという実験的事実のためである。

解析結果を Fig. 4 に示す。図からわかるように θ_{max} 値の異なる Case 3 を除いては横収縮・横曲り変形の過渡的变化にはほとんど差が認められない。このことから、溶接変形に主として影響を与えるのは材料が応力をうけもたなくなる温度 θ_{cr}^* であって、 θ_i^* と θ_{cr}^* の間における Fig. 2 に示すような材料定数の変化の特性が溶接変形におよぼす影響は 2 次的なものに過ぎないと思われる。したがって、上記の条件②は「材料が応力をうけもたなくなる温度 θ_{cr}^* が同じであること」と書きかえてもよからう。

Fig. 4 Transient deformations for selected temperature dependence of physical and mechanical properties

以上の考察より、溶接変形を規定するパラメータは入熱のパラメータ T^* 、初期温度 θ_i^* および材料が応力をうけもたなくなる温度 θ_{cr}^* であり、同一材料では Q/h^2

と θ_i であると結論される。

3. 実験

軟鋼 (SS41), Al 合金 (Al 5083-O), オーステナイト系ステンレス鋼 (SUS 310) の 3 種の材料を用い、Table 2 に示す条件でビード溶着実験を行なった。板の初期温度は 15~25°C の範囲であった。溶接にあたって、溶接の始終端におけるアークの点火・消滅によるビードの不連続が溶接変形に影響をおよぼさないように、試験片の両側に板幅 200 mm, 長さ 20 mm のタブ板を添えた。

Table 2 Experimental conditions

Material	Length L (mm)	Width W (mm)	Thickness h (mm)	Welding Process (Thermal Efficiency)	Heat Input Q (cal/cm)
Mild steel	5~1500	200	6~20	GMAW (0.7)	600~5000
	200		6~15	GTAW (0.65)	400~2000
	200		6~20	SMAW (0.8)	1000~2000
	200		10~20	SAW (0.9)	3000~9000
Al-alloy (Al 5083-O)	200	200	6~20	GMAW (0.8)	400~1800
Stainless steel (SUS310)	200	200	6~12	GMAW (0.7)	600~4500

横収縮・横曲り変形の測定はいずれも溶接線の中央断面で行なった。完全冷却後の横収縮は溶接線をはさんで標点距離 100 mm について板の表裏面で測定し、その平均をとった。測定器として Al 合金はコンパレータを使用し、軟鋼、ステンレス鋼は Pfender ひずみ計を用いた。また完全冷却後の横曲り変形は溶接線から 90 mm 離れた点に dial gauge (1/100 mm) を取りつけて、溶接前後のたわみの変化量から求めた。なおこれとは別に横収縮・横曲り変形の過渡的变化を変位計により電磁オシログラフに記録した。実験結果を整理するのに必要な材料定数は前報²⁾ Table 3 の値を使用している。

4. 実験結果と考察

4.1 入熱のパラメータ Q/h^2 による実験結果の整理

前項の実験は初期温度 $\theta_i = 15 \sim 25^\circ\text{C}$ とほぼ一定で行なわれているので、同一材料では溶接変形は入熱のパラメータ Q/h^2 によって定まると予想される。

各種溶接法による軟鋼板の横収縮・横曲り変形の実験結果 (板厚 6~20 mm, 溶接長 200 mm, 溶接入熱 400~9000 cal/cm) をパラメータ Q/h^2 に対して整理した結果をそれぞれ Fig. 5(a), Fig. 6(a) に示す。比較のために同じ実験結果を従来のパラメータ¹⁾ (I : 溶接電流, V : 溶接電圧, v : 溶接速度, η : 熱効率) を用いて整理した結果を Fig. 5(b), Fig. 6(b) に示す。図 (a) と図 (b) を比較すると今回提案した入熱のパラメータ Q/h^2 によって整理した図 (a) の方が全体として実験値のバラツキ

Fig. 5 (a) Arrangement of transverse shrinkage S/h by heat input parameter Q/h^2

Fig. 5 (b) Arrangement of transverse shrinkage S by heat input parameter $\eta IV/h \sqrt{v}$

が少ない。とくに $Q/h^2 \leq 2000 \sim 2500$ (cal/cm²) の範囲では採用した溶接法のいかににかかわらず実験値はほぼ一本の曲線で表示されており、今回提案した熱弾塑性パラメータの優位性がうかがわれる。一方、 $Q/h^2 \geq 2500 \sim 3000$ (cal/cm²) の範囲では各溶接法に応じて横収縮・横曲り変形の値が異なっている。この理由は熱源形状の相異と考えられる。

Fig. 7 は熱源形状が横収縮・横曲り変形におよぼす影響を一次元熱弾塑性解析³⁾により求めた結果である。解析は板全体を図中に示すように各短冊に分割し、各短冊がそれぞれの熱サイクルに応じて生じる変形を加算したものが板全体の变形であると考えて行なった。Fig. 7 によると入熱 Q/h^2 が小さい場合、横収縮・横曲り変形は熱源形状の影響を受けにくいこと、入熱 Q/h^2 が大きい場合、横収縮・横曲り変形は熱源形状の影響を受けやすいことがわかる。そして、入熱 Q/h^2 が大きい場合、熱源形状が変形におよぼす影響については次のよう

Fig. 6 (a) Arrangement of angular distortion δ by heat input parameter Q/h^2

Fig. 6 (b) Arrangement of angular distortion δ by heat input parameter $\eta IV/h \sqrt{v}$

なことがいえる。すなわち、Fig. 7 の3つのケース

- ① 熱が一点に集中して一様に与えられる場合
- ② 熱が深さ方向に集中して与えられる場合
- ③ 熱が幅方向に大きく広がり、深さ方向にも分布して与えられる場合

の計算結果を比較することより、②の横縮は①より大きくなり、②の横曲り変形は①より小さくなること、③の横収縮は①より小さくなり、③の横曲り変形は①より大きくなるのがわかる。Photo. 1 は板厚 6 mm の軟鋼板を Table 3 の溶接条件を用いてほぼ同一入熱 ($Q/h^2 \approx 3800$ cal/cm²) で溶接したときの GMAW, SMAW, GTAW の溶け込み形状を示している。Photo. 1 よりビード形状を熱源形状と考え、Fig. 7 に示す熱源形状の幅 a 、深さ b と板厚 h の比を求めると Table 3 となる。Table 3 より今回の実験条件での GMAW と SMAW の熱源形状は Fig. 7 の③に、GTAW の熱源形状は①と考えられ、実験結果 Fig. 5, Fig. 6 の図(a)と Fig. 7 の熱源形状と溶接変形の関係は定性的に一致している。

Fig. 7 (a) Effect of heat source patterns on transverse shrinkage

Fig. 7 (b) Effect of heat source patterns on angular distortion

(a) GMAW

(b) SMAW

(c) GTAW

Photo. 1 Nugget shape

Table 3 Nugget Shapes of Welding processes, such as GMAW, SMAW, GTAW ($h=6$ mm)

Welding process	Welding current I (A)	Welding voltage V (V)	Welding speed v (cm/min)	Width of bead a/h	Depth of bead b/h	Transverse shrinkage S (mm)	Angular distortion delta (radian)
GMAW	400	26	75	0.88	0.40	0.24	9.8×10^{-3}
SMAW	186	32	50	0.75	0.25	0.25	7.4×10^{-3}
GTAW	253	17	30	0.50	0.35	0.28	4.2×10^{-3}

4.2 溶接変形の略算式

前項で示されたように材料が同一で初期温度が一定の場合、溶接変形は入熱のパラメータ Q/h^2 で整理できる。この項では異種材料間の溶接変形が第2項で示された熱弾塑性パラメータすなわち入熱のパラメータ T_0^* 、材料のパラメータ θ_M^* 、初期温度のパラメータ θ_0^* の関数であることを利用して溶接変形の略算式を導いた。

Fig. 8 は熱弾塑性理論により導かれる δ/ϵ_{Y0} 、 $S/h\epsilon_{Y0}$ すなわち横収縮 S を板厚 h 、降伏ひずみ ϵ_{Y0} で割った値 $S/h\epsilon_{Y0}$ と横曲り変形 δ を降伏ひずみ ϵ_{Y0} で割った値 δ/ϵ_{Y0} を縦軸に取り、横軸に入熱のパラメータ T_0^* を取って、初期温度が一定の軟鋼、Al 合金、ステンレス鋼の GMAW によるビード溶着時の溶接変形を整理したものである。横収縮 $S/h\epsilon_{Y0}$ は θ_M^* の小さい

ほど大きく、横曲り変形 δ/ϵ_{Y0} は θ_M^* が大きいほど大きくなっており、 θ_M^* の大きさの順番になっている。このことより、異種材料間の溶接変形を比較する場合 T_0^* 、 θ_M^* が有効であることがわかる。そこで、上記3種の実験曲線より溶接変形を求める略算式を導き、溶接変形が未知の材料に対して材料定数と物理定数が与えられれば溶接変形が求められるようにした。

$$\left. \begin{aligned} \text{横収縮} \quad S/h\epsilon_{Y0} &= a_1 T_0^{*2} + a_2 T_0^* \quad T_0^* \leq T_{cr}^* \\ S/h\epsilon_{Y0} &= T_0^* \quad T_0^* > T_{cr}^* \\ \text{横曲り変形} \quad \delta/\epsilon_{Y0} &= b_3 T_0^* / \{ (T_0^* - b_1)^2 + b_2 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし

$$\left\{ \begin{aligned} T_{cr}^* &= 1.85\theta_M^* + 27.6 \quad (T_{cr}^* \text{ は } 45^\circ \text{ 直線に乗る } T_0^* \text{ の限界値}) \\ a_1 &= -9.26 \times 10^{-4}\theta_M^* + 2.62 \times 10^{-2} \end{aligned} \right.$$

Fig. 8 (a) Arrangement of transverse shrinkage $S/\varepsilon_{Y0}h$ by dimensionless heat input parameter T_0^*

Fig. 8 (b) Arrangement of angular distortion δ/ε_{Y0} by dimensionless heat input parameter T_0^*

Table 4 Conventional formulae for calculating welding deformations

Material	Condition	Angular distortion	Transverse shrinkage
Mild steel	$Q/h^2 \leq 2500$	$\delta = 6 \times 10^{-6} Q/h^2$	$S = 5 \times 10^{-6} Q/h$
	$2500 \leq Q/h^2 \leq 5000$	$\delta = 2.4 \times 10^{-6} Q/h^2 + 0.021$	$S/h = 1.9 \times 10^{-6} Q/h^2 - 0.035$
	$Q/h^2 \geq 5000$		$S = 1.2 \times 10^{-5} Q/h$
Al-alloy (Al 5083-O)	$Q/h^2 \leq 800$	$\delta = 1.8 \times 10^{-5} Q/h^2$	$S = 2 \times 10^{-5} Q/h$
	$800 \leq Q/h^2 \leq 1700$		$S/h = 7 \times 10^{-5} Q/h^2 - 0.04$
	$Q/h^2 \geq 1700$	$\delta = 6.7 \times 10^{-6} Q/h^2 + 0.02$	$S = 4 \times 10^{-5} Q/h$
Stainless steel (SUS 310)	$Q/h^2 \leq 1800$	$\delta = 1.9 \times 10^{-5} Q/h^2$	$S = 8.4 \times 10^{-5} Q/h$
	$1800 \leq Q/h^2 \leq 3800$		$S/h = 2.8 \times 10^{-5} Q/h^2 - 0.037$
	$Q/h^2 \geq 3800$	$\delta = 5.2 \times 10^{-6} Q/h^2 + 0.044$	$S = 1.8 \times 10^{-5} Q/h$

$$\begin{cases} a_2 = 9.3 \times 10^{-3} \theta_M^* + 0.14 \\ b_1 = 0.33 \theta_M^* + 8.0 & b_2 = 40.5 \theta_M^* - 51.6 \\ b_3 = 8.18 (\theta_M^* - 4.04)^2 + 66.6 \end{cases}$$

適用範囲 $\theta_M^* = 4 \sim 12$ $\theta_M^* \neq 0$ 溶接法 GMAW
溶接長 $L = 20$ cm

具体的に各種材料の溶接変形略算式を示すと Table 4 となる。

Fig. 9 (a) Effect of weld length on transverse shrinkage

Fig. 9 (b) Effect of weld length on angular distortion

4.3 溶接長が溶接変形におよぼす影響

Fig. 9 は溶接長が溶接部中央断面の y 軸上の溶接変形におよぼす影響を調べた結果である。縦軸は溶接長 $L = \infty$ のときの y 軸上の横収縮 S_{∞} 、横曲り変形 δ_{∞} で溶接長 L のときの変形 S, δ を割った値 $S/S_{\infty}, \delta/\delta_{\infty}$ を取り、横軸は溶接長 L を取っている。図によると溶接長が $0 \leq L \leq 20$ cm の範囲で溶接変形は溶接長の影響を大きく受け、溶接長の増加とともに大きく増加していること、 $L \geq 20$ cm の範囲で溶接変形は溶接長の影響をあまり受けず、溶接長の増加とともにわずかに増加していることがわかる。図中の実線は無限板において溶接部に相当する領域 ($L \times 2b$) 内に固有ひずみが存在すると考えて計算した結果である。溶接長 L と溶接変形 S, δ の関係は次式であらわされる。

$$\begin{cases} S/S_{\infty} = [4 \tan^{-1}(L/20) + 0.1 L \log(1 + 400/L^2)] / 2\pi \\ \delta/\delta_{\infty} = [8 \tan^{-1}(L/12) \\ + (1 + \nu)L / 6 \cdot \log(1 + 144/L^2)] / 4\pi \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $S_{\infty}, \delta_{\infty}$ は $L = \infty$ での y 軸上の変形

L : 単位は cm

また, 図中の実験値は溶接条件が同じ実験値の中で最大溶接長の溶接変形が曲線上に乗るように補正し, 補正値を他の実験値に掛けてプロットしている。

式 (3) より実用的な近似式を導くと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq L \leq 200 \text{ cm}; S = 0.64 L^{3/20} \cdot S_{20} \quad \delta = 0.64 L^{3/20} \cdot \delta_{20} \\ L > 200 \text{ cm}; S, \delta \text{ は一定} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ただし, S_{20} , δ_{20} : 溶接長 $L=20$ cm での横収縮・横曲り変形

式 (2) と式 (4) or 式 (3) をもちいと任意の板を GMAW でビード溶着したときの溶接変形が求まる。

5. 初期温度が溶接変形におよぼす影響

Fig. 10 は初期温度 θ_i が横収縮・横曲り変形におよぼす影響を軟鋼を対象として一次元熱弾塑性解析した結果である。Fig. 10 によると初期温度 θ_i が大きくなる

Fig. 10 (a) Effect of initial temperature on transverse shrinkage

Fig. 10 (b) Effect of initial temperature on angular distortion

と横収縮はやや増加すること, 横曲り変形はかなり小さくなることがわかる。

6. 結 論

本論文で得られた結論を要約すると次の通りである。

(1) ビード溶着の溶接変形は

入熱の無次元パラメータ $T_0^* = \alpha_0 Q / \epsilon_{Y_0} c \rho h^2$

初期温度の無次元パラメータ $\theta_i^* = \alpha_0 \theta_i / \epsilon_{Y_0}$

降伏応力が零となる温度の無次元パラメータ

$$\theta_M^* = \alpha_0 \theta_M / \epsilon_{Y_0}$$

で規定される。

同一材料では

入熱のパラメータ Q/h^2

初期温度 θ_i

で規定される。

(2) 溶接法を SMAW, GTAW, GTAW, SAW と種々変化したときの溶接変形の実験値を従来の溶接変形の整理パラメータと結論 (1) の熱弾塑性パラメータでそれぞれ整理し, 結論 (1) の熱弾塑性パラメータがすぐれていることを示した。また, 溶接法の相違が溶接変形におよぼす影響は溶け込み形状の相違が溶接変形におよぼす影響として取り扱えることを示した。そして, 軟鋼を今回用いた 4 種の溶接法でビード溶着したときの溶接変形は入熱のパラメータが

$$Q/h^2 \leq 2500 \text{ (cal/cm}^2\text{)}$$

の範囲で溶接法の影響をほぼ受けないことを示した。

(3) 溶接長が溶接変形におよぼす影響を理論解析し, 式にあらわした。(式 (3) or (4) 参照)。

(4) 結論 (1) の熱弾塑性パラメータを用いて軟鋼, Al 合金, オーステナイト系ステンレス鋼の溶接変形を整理し, 溶接変形を求める略算式 (2) を導いた (Table 4 参照)。

(5) 初期温度 (予熱温度) は横曲り変形に大きな影響を与える。

最後に, 本実験に協力された西川修史工学士, 綾仁立工学士, 野原和宏工学士に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 渡辺正紀, 佐藤邦彦: “ビード溶着による横収縮, 横曲り変形と溶接条件との関係”. 溶接学会誌, 第25巻 (1956年) 第4号, pp. 211~216
- 2) 佐藤邦彦, 寺崎俊夫: “構造用材料の溶接残留応力分布におよぼす溶接諸条件の影響”. 溶接学会誌, 第45巻 (1976) 第2号 pp. 150~156
- 3) 辻 勇: “一次元の温度分布を有する矩形板の熱弾塑性応力問題に関する研究 (第4報)”. 造船協会論文集, 第118号 (1965年) pp. 307~317