全ひずみ分布による二次元残留応力の解析*

里 中 忍**

Calculation of Two-dimensional Residual Stress from Total Strain Distribution*

by Shinobu Satonaka**

In this paper, a mathematical analysis of residual stress is proposed, by which the plastic strain is calculated from an already known total strain distribution without cutting process for relieving the elastic strain. In order to confirm the analysis, numerical calculations are carried out on the following two subjects.

First, the differential equation and boundary condition are derived from the condition of compatibility and the equation of equilibrium on the assumption of incompressibility, plane stress state and non-phase transformations. The differential equation is applied to find the plastic strain value in the case that the total strain distribution for an arbitrarily assumed plastic strain distribution has been known by the analyses of inherent strain method. The resultant values of the plastic strain are in well agreement with the assumed ones.

Second, the equation is applied to analyze the residual stress and distortion resulting from spot heating of aluminum alloy thin plate. The results coincide with the experimental data except around the heating point where swelling deformation occurs and the stress state is three dimensional.

1. 緒 言

溶接残留応力は溶接部近傍に発生した不均一な塑性変形に基因する自己平衡型の応力で、溶接割れや変形の発生原因となるほかに、構造物の機械的性質、例えば疲労強度や応力腐食割れなどに影響を及ぼす。残留応力の発生機構については定性的に明らかにされているが、その発生因子である塑性変形が応力の履歴に依存して、溶接条件や板厚あるいは拘束の程度などの関数として一義的に決定できないために、定量的な取扱いは測定によることが多い。したがって、種々の残留応力測定法が考案され、応力弛緩法やX線応力測定法などの実験的方法¹⁾や固有ひずみ法²⁾、くいちがい理論³⁾、有限要素法⁴⁾などの数値計算による方法が用いられてきた。実験的な方法は残留応力を直接測定できるものの、応力弛緩法では応力解放のための加工を必要とすること、X線応力測定法では局部的な値しか知り得ないことが欠点となっている。一方、数値計算による方法では有限要素法による残留応力分布の直線近似⁵⁾や固有ひずみ法と応力弛緩法の組合せによる三次元残留応力測定⁶⁾などが報告され、多くの知見が得られている。しかしながら、実際のひずみ

分布から残留応力を非破壊的に推定する方法についてはその報告をみない。

本来、塑性ひずみはひずみの履歴の積分値として得られるものであるが、本研究では塑性ひずみは体積一定の条件を満足するものと仮定して、全ひずみ、塑性ひずみ、弾性ひずみの間の関係を弾性論から導いた。すなわち、全ひずみはひずみの適合条件式を満足しているが、つりあい方程式は弾性域でしか成立しない。また、固有ひずみ法は固有ひずみの不適合度から残留応力を求める方法であるが、本法は塑性ひずみのつりあい成分と体積一定の条件から塑性ひずみあるいは弾性ひずみを非破壊的に求める方法である。この方法は固有ひずみ法によって確かめられ、さらに最も単純な点加熱の場合の全ひずみ分布に適用して分割法による測定結果と比較検討した。

2. 二次元残留応力の解法

一般に、溶接残留応力は溶接部近傍では塑性状態、溶接部から離れた領域では弾性状態となっている。したがって、ひずみ分布から残留応力を求める場合には応力弛緩法などの応力解放による方法がしばしば採用されている。しかしながら、この方法は応力解放のための加工が不可欠であり、構造物の残留応力を非破壊的に測定できない。本研究では全ひずみ分布から直接、残留応力を求めること、すなわち、弾性ひずみと塑性ひずみを非破壊

*原稿受付 昭和59年4月18日(昭和57年度秋季全国大会にて発表)

**正 員 熊本大学工学部 Member, Faculty of Engineering, Kumamoto University

的に分離することを目的としているが、ここではその基本的な解析法を述べる。解析にあたり、次の仮定を設ける。(1)相変態などの体積膨張はないものとする。(2)塑性変形は非圧縮性、すなわち、体積一定の条件を満足する。(3)応力は平面応力状態とする。

2.1 極座標系における解析法

点溶接や点加熱の場合のひずみ分布は一般に軸対称となっている。このような場合には極座標系を用いる方が便利である。ここで、 ε , ε^* , $\tilde{\varepsilon}$ をそれぞれ全ひずみ、塑性ひずみ、弾性ひずみとし、半径方向、円周方向、板厚方向の成分には添字 r , θ , z を付けるものとする、弾塑性域の全ひずみは次のような関係が成立する。

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^* + \tilde{\varepsilon}_r, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^* + \tilde{\varepsilon}_\theta, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^* + \tilde{\varepsilon}_z \quad \dots\dots(1)$$

全ひずみはひずみの適合条件を満足しなければならない。すなわち、

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r} = 0 \quad \dots\dots(2)$$

一方、半径方向と円周方向の応力 σ_r , σ_θ の間には次のつりあい方程式が成立する。

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad \dots\dots(3)$$

ポアソン比を ν とすると、応力とひずみの間には

$$\tilde{\varepsilon}_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \quad \tilde{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad \dots\dots(4)$$

の関係があり、つりあい方程式(3)をひずみ成分で表示すると、次のようになる。

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}_r}{dr} + \frac{1-\nu}{r}\tilde{\varepsilon}_r = \frac{1-\nu}{r}\tilde{\varepsilon}_\theta - \nu\frac{d\tilde{\varepsilon}_\theta}{dr} \quad \dots\dots(5)$$

体積一定の条件と式(1)とから、次の関係が導かれる。

$$(1+\varepsilon_r^*)(1+\varepsilon_\theta^*)(1+\varepsilon_z^*) = (1+\varepsilon_r - \tilde{\varepsilon}_r)(1+\varepsilon_\theta - \tilde{\varepsilon}_\theta)(1+\varepsilon_z - \tilde{\varepsilon}_z) = 1 \quad \dots\dots(6)$$

式(6)の右辺の定数1は関係 $P(r)$ と $1/P(r)$ の積と考え、 $P(r) = 1 + \varepsilon_r^*$, $1/P(r) = (1 + \varepsilon_\theta^*)(1 + \varepsilon_z^*)$ とおくと、弾性ひずみ $\tilde{\varepsilon}_r$, $\tilde{\varepsilon}_\theta$ は

$$\tilde{\varepsilon}_r = 1 + \varepsilon_r - P(r), \quad \tilde{\varepsilon}_\theta = 1 + \varepsilon_\theta - \frac{1}{(1 + \varepsilon_z - \tilde{\varepsilon}_z)P(r)} \quad \dots\dots(7)$$

となる。なお、板厚方向の弾性ひずみ $\tilde{\varepsilon}_z$ は平面応力の仮定により

$$\tilde{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\varepsilon}_\theta) \quad \dots\dots(8)$$

となる。式(8)を式(7)に代入して、 $\tilde{\varepsilon}_r$, $\tilde{\varepsilon}_\theta$ を全ひずみと関数 $P(r)$ で表わすと、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r &= 1 + \varepsilon_r - P(r) \\ \tilde{\varepsilon}_\theta &= -\frac{1-\nu}{2\nu}\left\{(1+\varepsilon_z) + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - P(r))\right\} + \frac{1-\nu}{2\nu}\sqrt{Q} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(9)$$

ただし

$$Q = \left\{1 + \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - P(r))\right\}^2 - \frac{4\nu}{1-\nu}\left\{\frac{1}{P(r)} - (1 + \varepsilon_\theta)\left\{1 + \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_r - P(r))\right\}\right\}$$

式(9)を式(5)に代入し、ひずみの適合条件式で整理すると、

$$\left. \begin{aligned} S \frac{dP(r)}{dr} &= R \\ \text{ただし} \\ S &= \frac{\nu}{2} - 1 - \frac{\nu}{2\sqrt{Q}}\left\{1 + \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu}\left(r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - P(r)\right)\right\} + \frac{\nu}{\sqrt{Q}} \cdot \frac{1}{P(r)} \\ &\quad - \frac{\nu^2(1+\varepsilon_\theta)}{(1-\nu)\sqrt{Q}} \\ R &= \left\{\frac{\nu-1}{2\sqrt{Q}}\left\{\frac{d\varepsilon_z}{dr} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{d\varepsilon_r}{dr} - \frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right)\right\} - \frac{(1-\nu)^2}{2\nu r}\right\}\left\{1 + \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu}\left(r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - P(r)\right)\right\} \\ &\quad + \frac{(1-\nu)^2}{2\nu r}\sqrt{Q} + \frac{1-\nu}{2}\left\{\frac{d\varepsilon_z}{dr} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{d\varepsilon_r}{dr} - \frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right)\right\} - \sqrt{Q} \\ &\quad \left\{\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\left\{1 + \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu}(1 + \varepsilon_r - P(r))\right\} + (1 + \varepsilon_\theta)\left\{\frac{d\varepsilon_z}{dr} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{d\varepsilon_r}{dr}\right\}\right\} \\ &\quad - \frac{d\varepsilon_r}{dr} - \frac{1-\nu}{r}(1 + \varepsilon_r - P(r)) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(10)$$

となる。式(10)は全ひずみと関数 $P(r)$ の関係を示した微分方程式で、このうち、全ひずみは測定可能な既知量である。したがって、与えられた全ひずみ分布に対する関数 $P(r)$ の値を計算することによって、式(9)より弾性ひずみが求まる。なお、式(10)の数値計算に際しては境界条件を定める必要があるが、既に報告したように⁷⁾、境界条件は弾性域と塑性域の境界として与えられる。すなわち、弾性域においては全ひずみ ε_r , ε_θ は弾性ひずみに等しくなり、つりあい方程式とひずみの適合条件式を満足して、次の関係が成立する。

$$\frac{d}{dr}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) = 0 \quad \dots\dots(11)$$

式(11)を満足する領域では、関数 $P(r)$ の値は常に1となり、塑性域の境界は式(11)を満足する境界 r_0 として与えられる。

特別な場合として、板厚方向の塑性ひずみ ε_z^* が存在しない場合には、 $\varepsilon_z = \tilde{\varepsilon}_z$ となって、式(10)は次の簡単な微分方程式となる。

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{P(r)}{P(r) - \nu}\left\{\frac{1-\nu}{r}\left(\frac{1}{P(r)} - P(r)\right) - \frac{d}{dr}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)\right\} \quad \dots\dots(12)$$

2.2 直角座標系

平板の突合せ溶接やビード溶接の場合には直角座標系が便利で、この場合にも極座標系と同様の方法で微分方程式が導かれる。ただし、全ひずみ成分としては ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} を考え、この時平板に生成される残留応力成分を σ_x , σ_y , τ_{xy} とする。

全ひずみ，塑性ひずみ，弾性ひずみの間には

$$\epsilon_x = \epsilon_x^* + \tilde{\epsilon}_x, \quad \epsilon_y = \epsilon_y^* + \tilde{\epsilon}_y, \quad \epsilon_z = \epsilon_z^* + \tilde{\epsilon}_z, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^* + \tilde{\gamma}_{xy} \quad \dots\dots(13)$$

の関係がある。弾性ひずみ-応力関係式は

$$\tilde{\epsilon}_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \tilde{\epsilon}_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \tilde{\gamma}_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad \dots\dots(14)$$

である。また，応力のつりあい方程式とひずみの適合条件は次のとおりである。

$$\text{つりあい方程式: } \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots(15)$$

$$\text{適合条件式: } \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad \dots\dots(16)$$

ここに， ϵ^* ， $\tilde{\epsilon}$ はそれぞれ塑性ひずみと弾性ひずみの成分で E は縦弾性係数， ν はポアソン比である。釣合方程式 (15) をひずみ成分で表示すると

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\epsilon}_x + \nu \tilde{\epsilon}_y) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \tilde{\gamma}_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{\epsilon}_y + \nu \tilde{\epsilon}_x) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \tilde{\gamma}_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots(17)$$

となる。式 (17) において，せん断ひずみ成分を消去すると，次の関係が導かれる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}_y}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}_x}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \dots\dots(18)$$

塑性ひずみの非圧縮性は式 (6) と同様にして

$$(1+\epsilon_x^*)(1+\epsilon_y^*)(1+\epsilon_z^*) = (1+\epsilon_x - \tilde{\epsilon}_x)(1+\epsilon_y - \tilde{\epsilon}_y)(1+\epsilon_z - \tilde{\epsilon}_z) = 1 \quad \dots\dots(19)$$

となる。直角座標系の場合にも右辺の定数 1 は関数 $P_{(x,y)}$ と $1/P_{(x,y)}$ の積と考え， $P_{(x,y)} = 1 + \epsilon_x^*$ ， $1/P_{(x,y)} = (1 + \epsilon_y^*)(1 + \epsilon_z^*)$ とおく。この場合には関数 $P_{(x,y)}$ は x と y の関数となる。また，平面応力の条件から弾性ひずみ $\tilde{\epsilon}_z$ は

$$\tilde{\epsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\tilde{\epsilon}_x + \tilde{\epsilon}_y) \quad \dots\dots(20)$$

となる。式 (9) の場合と同様にして，弾性ひずみ $\tilde{\epsilon}_x$ ， $\tilde{\epsilon}_y$ を全ひずみと関数 $P_{(x,y)}$ で表わすと

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\epsilon}_x &= 1 + \epsilon_x - P_{(x,y)} \\ \tilde{\epsilon}_y &= -\frac{1-\nu}{2\nu} \left\{ 1 + \epsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_x - \epsilon_y - P_{(x,y)}) \right\} + \frac{1-\nu}{2\nu} \sqrt{Q'} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(21)$$

ただし，

$$Q' = \left\{ 1 + \epsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_x - \epsilon_y - P_{(x,y)}) \right\}^2 - \frac{4\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{P_{(x,y)}} - (1 + \epsilon_y) \{ 1 + \epsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} (1 + \epsilon_x - P_{(x,y)}) \} \right\}$$

となる。式 (21) を式 (18) に代入すると，次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_{(x,y)}}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2\nu} \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_{(x,y)}}{\partial y^2} \right) \right\} - \frac{1-\nu}{2\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sqrt{Q'}) \\ & + \nu \left[-\frac{1-\nu}{2\nu} \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_{(x,y)}}{\partial x^2} \right) \right\} + \frac{1-\nu}{2\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{Q'}) - \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 P_{(x,y)}}{\partial y^2} \right] = 0 \quad \dots\dots(22) \end{aligned}$$

上式もまた，全ひずみと関数 $P_{(x,y)}$ との関係を示し， $P_{(x,y)}$ の値を数値計算することによって弾性ひずみを決定することができる。ただし，この場合の境界条件は

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \dots\dots(23)$$

を満足する境界として与えられ， $P_{(x,y)}$ の値は 1 となる。特別な場合として， $\epsilon^* = 0$ の時の微分方程式 (22) は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2} + \nu \left(2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^2 P_{(x,y)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{P_{(x,y)}} \right) + \nu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{P_{(x,y)}} \right) - \frac{\partial^2 P_{(x,y)}}{\partial y^2} \right\} \quad \dots\dots(24) \end{aligned}$$

となり，単純な形の微分方程式となる。

なお，関数 $P_{(x)}$ ， $P_{(x,y)}$ の物理的な意味は次のようなものである。弾性ひずみはつりあい方程式を満足するが，全ひずみを適用した場合にはつりあい方程式は塑性ひずみの成分による項のみが残る。(これを不つりあい成分と呼ぶことにする。) この不つりあい成分だけから塑性ひずみを決定する場合には無数の分布が考えられるが，体積一定の条件を適用すると，その分布が決定される。その関係を示したのが関数 $P_{(x)}$ ， $P_{(x,y)}$ であり，板厚方向の塑性ひずみ ϵ_z^* が存在しない場合には $P-1 = \epsilon_x^*$ または ϵ_y^* ， $1/P-1 = \epsilon_y^*$ または ϵ_x^* となる。

3. 計算例

残留応力の数値計算法の一つに固有ひずみ法⁸⁾が提案されている。この方法は固有ひずみが与えられた時，弾性論に基づいて弾性ひずみあるいは残留応力を計算する方法である。固有ひずみは相変態などによる体積膨張がない場合には塑性ひずみとなり，熱応力の場合には熱ひずみに対応するもので，これらの値は既知量として取扱っている。しかしながら，溶接の場合にはその値は未知量であり，全ひずみ分布には適用できない。ここでは塑性ひずみを既知と仮定して固有ひずみ法により全ひずみ分布を求める。この全ひずみ分布に本法の解析法を適用して塑性ひずみを数値計算し，最初に仮定した塑性ひずみと比較検討する。簡単のために，ここでは板厚方向

の塑性ひずみはないものとする。

3.1 極座標系の場合

$P(r)=1/(1+a+br^2)$ と仮定して無限板の一点に次のような塑性ひずみが存在する場合。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r^* &= a+br^2 \\ \epsilon_r^* &= \frac{1}{1+a+br^2} - 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(25)$$

ただし, $0 \leq r \leq \sqrt{-a/b}$

このような塑性ひずみ分布における残留応力は固有ひずみ法³⁾によって求められ, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E}{2r^2} \int_0^r (\epsilon_r^* + \epsilon_\theta^*) r' dr' - \frac{E}{2} \int_r^\infty (\epsilon_r^* - \epsilon_\theta^*) \frac{dr'}{r'} \\ &= \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{-a/b} \text{ では} \\ -\frac{E}{2r^2} \left\{ \frac{b}{4} r^4 + \frac{a-1}{2} r^2 + \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1+a+br^2}{1+a} \right) \right\} \\ + \frac{E}{4(1+a)} \left\{ (1+a)b \left(-\frac{a}{b} - r^2 \right) \right. \\ \left. + 2a(a+2) \ln \left(\frac{\sqrt{-a/b}}{r} \right) + \ln \left(\frac{1}{1+a+br^2} \right) \right\} \\ r > \sqrt{-a/b} \text{ では} \\ -\frac{E}{2r^2} \left\{ \frac{a^2}{4b} - \frac{a(a-1)}{2b} + \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1}{1+a} \right) \right\} \end{cases} \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{2r^2} \int_0^r (\epsilon_r^* + \epsilon_\theta^*) r' dr' - \frac{E}{2} \int_r^\infty (\epsilon_r^* - \epsilon_\theta^*) \frac{dr'}{r'} \\ &\quad - E\epsilon_\theta^* \\ &= \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{-a/b} \text{ では} \\ \frac{E}{2r^2} \left\{ \frac{b}{4} r^4 + \frac{a-1}{2} r^2 + \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1+a+br^2}{1+a} \right) \right\} \\ + \frac{E}{4(1+a)} \left\{ (1+a)b \left(-\frac{a}{b} - r^2 \right) \right. \\ \left. + 2a(a+2) \ln \left(\frac{\sqrt{-a/b}}{r} \right) + \ln \left(\frac{1}{1+a+br^2} \right) \right\} \\ - E(a+br^2) \\ r > \sqrt{-a/b} \text{ では} \\ \frac{E}{2r^2} \left\{ \frac{a^2}{4b} - \frac{a(a-1)}{2b} + \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1}{1+a} \right) \right\} \dots\dots(26) \end{cases} \end{aligned}$$

式 (4) より弾性ひずみを求め, 式 (25) の塑性ひずみを加えた値が全ひずみとなり, 次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \epsilon_r^* \\ &= \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{-a/b} \text{ では} \\ -\frac{a+br^2}{1+a+br^2} - \frac{b}{8} r^2 (1+\nu) - \frac{1}{4br^2} (1+\nu) \ln \\ \left(\frac{1+a+br^2}{1+a} \right) + \frac{(1-\nu)}{4(1+a)} \left\{ b(1+a) \left(-\frac{a}{b} - r^2 \right) \right. \\ \left. + 2a(a+2) \ln \left(\frac{\sqrt{-a/b}}{r} \right) + \ln \left(\frac{1}{1+a+br^2} \right) \right\} \\ + \nu(a+br^2) \\ r > \sqrt{-a/b} \text{ では} \\ -\frac{a^2}{8br^2} (1+\nu) + \frac{a(a-1)}{4br^2} (1+\nu) - \frac{1+\nu}{4br^2} \\ \ln \left(\frac{1}{1+a} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Fig. 1 Total strain distribution calculated by inherent strain method

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \epsilon_\theta^* \\ &= \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{-a/b} \text{ では} \\ \frac{b}{8} (1+\nu) r^2 + \frac{a-1}{4} (1+\nu) + \frac{1+\nu}{4br^2} \ln \\ \left(\frac{1+a+br^2}{1+a} \right) + \frac{1-\nu}{4(1+a)} \left\{ b(1+a) \left(-\frac{a}{b} - r^2 \right) \right. \\ \left. + 2a(a+2) \ln \left(\frac{\sqrt{-a/b}}{r} \right) + \ln \left(\frac{1}{1+a+br^2} \right) \right\} \\ r > \sqrt{-a/b} \text{ では} \\ \frac{a^2(1+\nu)}{8br^2} - \frac{a(a-1)}{4br^2} (1+\nu) + \frac{1+\nu}{4br^2} \\ \ln \left(\frac{1}{1+a} \right) \dots\dots(27) \end{cases} \end{aligned}$$

Fig. 1 は $a=0.08$, $b=-0.0032$ の場合の全ひずみ分布を示したものである。Fig. 1 に示すような全ひずみ分布は溶接の場合, 溶接前後の標点距離の変化量から測定できる既知量である。しかしながら, 全ひずみ分布から弾性ひずみと塑性ひずみを分離することは容易でない。そこで, 本法を適用する。Fig. 1 の場合には全ひずみ分布は式 (27) によって示されているので式 (11) に代入すると, $d(\epsilon_r + \epsilon_\theta)/dr=0$ を満足する r の値は $r \geq 5$ である。従って, 境界条件は

$$r=5; \quad P(r)=1 \quad \dots\dots(28)$$

となる。式 (28) の境界条件で, 式 (12) の微分方程式の数値計算を実行して得られた塑性ひずみを Fig. 2 に示す。実線は $a=0.08$, $b=-0.0032$ とした時の式 (25) の値を示し, 破線は本法を Fig. 1 に適用した結果である。両者はよく一致しているが, 中心部近傍で誤差が認められる。これは数値計算による誤差で, 計算間隔を小さくすることによって誤差を小さくすることができる。

3.2 直角座標系

$P(x,y)=ax^2+by^2+c+1$ と仮定して, 無限板上に

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^* &= ax^2+by^2+c \\ \epsilon_y^* &= -\frac{ax^2+by^2+c}{1+ax^2+by^2+c} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(29)$$

ただし, $ax^2+by^2+c \leq 0$

Fig. 2 Comparison of plastic strain

なる塑性ひずみが分布する場合、

残留応力は既に報告されている固有ひずみ法⁸⁾によると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad \dots(30)$$

ただし、

$$\psi(x,y) = -\frac{E}{4\pi} \iint_S \{(\epsilon_x^* + \epsilon_y^*) \log \rho - (\epsilon_x^* - \epsilon_y^*) \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{2\rho^2}\} dx' dy'$$

ここに、 $\rho^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$, $\bar{x} = x - x'$, $\bar{y} = y - y'$ で S は物体の占める領域である。従って、全ひずみは式 (13), (14) より

$$\epsilon_x = \begin{cases} ax^2 + by^2 + c \leq 0 \text{ では} \\ ax^2 + by^2 + c + \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} \right) \\ ax^2 + by^2 + c > 0 \text{ では} \\ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} \right) \end{cases}$$

$$\epsilon_y = \begin{cases} ax^2 + by^2 + c \leq 0 \text{ では} \\ -\frac{ax^2 + by^2 + c}{1 + ax^2 + by^2 + c} + \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} \right) \\ ax^2 + by^2 + c > 0 \text{ では} \\ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad \dots\dots(31)$$

となる。極座標系の場合と同様にして、式 (31) を式 (23) に代入して境界条件を求めると、

$$ax^2 + by^2 + c = 0 : P(x,y) = 1 \quad \dots\dots(32)$$

となる。式 (31) を式 (24) に代入すると、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ ax^2 + by^2 + c + \frac{\nu(ax^2 + by^2 + c)}{1 + ax^2 + by^2 + c} \right\} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{ax^2 + by^2 + c}{1 + ax^2 + by^2 + c} + \nu(ax^2 + by^2 + c) \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$(P(x,y) + \frac{\nu}{P(x,y)}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\frac{1}{P(x,y)} + \nu P(x,y)) \quad \dots(33)$$

式 (33) の左辺において、弾性ひずみによる成分はゼロとなり、塑性ひずみ成分のみの項となっている。式 (33) の解は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P(x,y) + \frac{\nu}{P(x,y)} &= ax^2 + by^2 + c + \\ \frac{\nu(ax^2 + by^2 + c)}{1 + ax^2 + by^2 + c} &+ f_1(y)x + f_2(y) \\ \frac{1}{P(x,y)} + \nu P(x,y) &= \frac{ax^2 + by^2 + c}{1 + ax^2 + by^2 + c} \\ &+ \nu(ax^2 + by^2 + c) + g_1(x)y + g_2(x) \end{aligned} \right\} \quad \dots(34)$$

ただし、 $f_1(y)$, $f_2(y)$: 任意の y の関数

$g_1(x)$, $g_2(x)$: 任意の x の関数

式 (34) に境界条件 (32) を代入すると、 $f_1(y)$, $f_2(y)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ を決定することができる。

$$f_1(y) = 0, \quad g_1(x) = 0, \quad f_2(y) = g_2(x) = 1 + \nu$$

上式を式 (34) に代入すると、関数 $P(x,y)$ は

$$P(x,y) = ax^2 + by^2 + c + 1$$

となることがわかる。この場合、塑性ひずみは

$$\epsilon_x^* = P(x,y) - 1 = ax^2 + by^2 + c$$

$$\epsilon_y^* = \frac{1}{P(x,y)} - 1 = -\frac{ax^2 + by^2 + c}{1 + ax^2 + by^2 + c}$$

となり、式 (29) で与えた塑性ひずみと一致していることが明らかである。

4. 点加熱における塑性ひずみ分布

関数 $P(r)$, $P(x,y)$ を用いた解析法は全ひずみ分布から塑性ひずみと弾性ひずみを分離する方法であり、固有ひずみ法によってその有用性が確かめられた。ここでは実際の溶接ひずみ分布に適用する。

Fig. 3 は Al-Mg 系合金 A 5052-P (板厚 3 mm) に TIG 溶接法で点加熱を施した場合の半径方向、円周方向の全ひずみ ϵ_r , ϵ_θ を示す。この時の溶接条件を Ta-

Fig. 3 Total strain distribution obtained from spot heating of Al alloy

Table 1 Welding condition

Arc voltage (V)	Welding current (A)	Heating time (sec)	Heat input (kJ)	Gas flow rate (l/min)
38	170	10.6	68.5	8

Fig. 4 Strain distribution in the thickness direction

Fig. 5 Comparison of calculated value with the plastic strain by experiment

ble 1 に示す。図中の○、●印はひずみの測定結果であり、微小硬度計により試験片に 1.5 mm 間隔の標点を設け、溶接前後の標点距離の変化量から求めた。また、実線は最小二乗法により関数に置き換えたもので、

$$\epsilon_{\theta} = 0.038 e^{-0.12r^2} - 3.259 \times 10^{-6} r^2 + 1.43 \times 10^{-4} r + 1.7367 \times 10^{-3} - \frac{1.40691}{r}$$

$$\epsilon_r = 0.038(1 - 0.24r^2)e^{-0.12r^2} - 9.777 \times 10^{-6} r^2 + 2.86 \times 10^{-4} r + 1.7367 \times 10^{-3}$$

となり、 ϵ_r と ϵ_{θ} はひずみの適合条件を満足している。Fig. 4 は溶接前後の板厚の変化量から求めた板厚方向のひずみ分布を示したものである。以上の測定値を式(10)に代入して得られた塑性ひずみ分布を Fig. 5 に示す。図には放電加工による分割法で得られた結果も示しているが、比較的良好に一致している。しかしながら、加熱点近傍では計算結果と実験値に誤差が観察されている。この主な原因としては板厚方向のひずみ分布の測定で、溶融

部に凹凸が検出されて誤差を含んでいること、数値計算における誤差の他に、加熱点近傍で ϵ_r が急激に大きくなって応力が三次元状態になったことが推察される。従って、本法を適用する場合にはひずみ分布の正確な測定が要求される。

5. 結 言

本研究では二次元残留応力を対象として、全ひずみ分布から塑性ひずみと弾性ひずみを解析する方法を明らかにし、点加熱によって得られた全ひずみ分布から塑性ひずみを求めた。一般に、塑性状態では全ひずみはつりあい式を満足せず、塑性ひずみ成分の項（つりあい成分）が残るが、本法は塑性変形が非圧縮性と仮定して、つりあい成分を関数 $P(r)$ 又は $P(x, y)$ と全ひずみ成分で表わし、関数 $P(r)$ 、 $P(x, y)$ の値を求めることによって塑性ひずみと弾性ひずみを求めることができることを明らかにした。また、本法は固有ひずみ法を用いた数値計算や解析的手法によって確かめられた。固有ひずみ法は塑性ひずみが既知の場合に有効であるのに対し、本法は全ひずみ分布に適用できることが特徴である。また、点加熱によって得られた全ひずみ分布に本法を適用した結果は分割法による実測値と比較的良好な一致をみたが、溶接部近傍で誤差が観察された。この原因としては数値計算による誤差とひずみの測定精度が主な原因と考えられる。本法は残留応力を非破壊的に推定する方法で、構造物の安全性を評価する上で工業的に重要な手段となり得るものであるが、本法を適用するに当たり、全ひずみの測定精度の向上に努め、数値計算の精度を上げること、特に極座標系の原点近傍では計算間隔を細かくとるなどの注意が必要である。

最後に、本研究に対して有益な御意見を賜った熊本大学立川逸郎教授、溶接学会溶接構造研究委員会分科会の各委員に深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 渡辺正紀, 佐藤邦彦: 溶接力学とその応用, 朝倉書店 (1975) 332-350
- 2) 藤本二男: 弾性体の固有応力について (第 1 報固有ひずみにもとづく固有応力の二次元理論), (第 2 報三次元固有応力の一般理論), 日本機械学会論文集 35, 270 (1967) 286-302
- 3) 佐藤邦彦, 上田幸雄, 藤本二男: 溶接変形・残留応力, 産報 (1979) 39-43
- 4) たとえば, 上田幸雄, 山川武人: 有限要素法による弾塑性挙動の解析, 溶接学会誌 42, 6 (1973) 567-577
- 5) 佐藤邦彦, 寺崎俊夫: 構造用材料の溶接残留応力分布に及ぼす溶接諸条件の影響, 溶接学会誌 45, 2 (1976) 150-156
- 6) 上田幸雄, 福田敬二, 谷川雅之: 固有ひずみ論に基づく 3 次元残留応力測定法, 日本造船学会論文集 145 (1979) 203-211
- 7) 里中忍, 立川逸郎: 格子焼付による溶接ひずみの測定, 本会論文集 3-2 (1985) 161-167
- 8) 藤本二男: 固有ひずみ法による溶接熱弾塑性解析の基礎理論, 溶接学会誌 45, 1 (1976) 14-21