電磁流体円柱の安定性*

—橋絡移行におけるピンチ力の効果(第1報)—

丸尾 大**, 平田 好則**, 吉田 欣吾***

Numerical Analysis on the Stability of Conductive Fluid Cylinder*

—The Effect of Electromagnetic Pinch Force on the Bridging Transfer (Rept. 1)—

by Hiroshi Maruo**, Yoshinori Hirata** and Kingo Yoshida***

The numerical solution technique for the dynamics of a viscous incompressible fluid with a free surface, which is called the Marker And Cell (MAC) method, is applied to the problem of the stability in the electromagnetic fluid cylinder.

Numerical stability and accuracy of the MAC method, which is based on Finite-Difference Method, are examined as the first step for an analytical study of the kinetics of the metal transfer in the arc welding processes. In the growth rate of instability of the fluid cylinder, the numerical solutions by MAC method agree with the analytical solutions by Rayleigh, Murty and Chandrasekhar within the numerical error.

Key Words: Bridging transfer, Electromagnetic pinch force, GMA welding, Pinch instability, Numerical analysis, Cylindrical fluid, Dispersion relation, Surface tension, Perturbation mode

1. 緒 言

MIG/MAG 溶接等の消耗電極アーク溶接法ではワイヤあるいは電極棒から熔融金属が離脱・移行し、アークの安定性を支配する。低電流域での溶接や短アーク長による溶接、姿勢溶接などを行なう場合、橋絡移行様式を利用することが多い。

定電圧特性で短絡時に大電流が流れるような従来電源を用いた GMA 溶接や TIG 溶接におけるホットワイヤのようにワイヤに直接通電する場合、ワイヤ端の溶融部には重力、表面張力などの力に加えて電磁ピンチ力が働き、ワイヤと溶融池金属との間の橋絡を切り離したり、さらにはアーク再生の駆動力となる。このとき、過大な電流が流れるとスパッタが発生し、施工上問題になる場合が多い。これに対し、最近では電流制御素子として大容量のトランジスタや FET を用い、インバータなどの制御回路により MAG 溶接や CO₂ 溶接の短絡電流波形を制御し、スパッタ低減に効果があることなども報告されている¹⁻⁴⁾。また、電極ワイヤから溶融池への熔融金属の移行は連続ではないので、その移行頻度あるいは短絡回数は定常的な溶融池の形成とも関連して、高速溶接の安定性に影響する。

このように熔融金属橋絡部の分離現象はアーク溶接過程において重要な役割を演じている。しかしながら、その機構は複雑であり、現状では最適な電流波形を選択する考え方が確立されていない。橋絡部の分離には液柱の毛管不安定に加え、ピンチ力、溶融池金属の振動、雰囲気などが影響するものと考えられるが、本研究においては橋絡形状をモデル化することにより、それぞれの効果

を分離して解析及び実験を行ない、その機構を追求することにした。

溶滴移行の機構を解析するには、熔融金属表面形状の時間変化を知る必要がある。自由表面を含む液体の運動に関しては Marker And Cell (MAC) 法と呼ばれる差分法を用いた数値計算手法がある⁵⁾。液体内部に配された粒子(マーカー)の移動を計算することによって、表面形状の時間的変化を追うものである。しかしながら、差分近似式による数値解としての誤差は避けられないものであり、MAC 法の使用においては、その誤差と適用範囲をあらかじめ明らかにしておく必要がある。また、すでに報告されている MAC 法(Harlow らのオリジナルの発表後、多くの研究者によってアルゴリズムが改良され、SUMMAC など種々の呼び名が与えられている)による解析例には比較的大きな表面張力をもつ液体の変形挙動や電磁流体を扱ったものは少ない。本報では、溶滴移行解析の基本となる電磁流体円柱の安定性に関する解析解と、MAC 法による数値解との比較を行ない、MAC 法適用の可能性について検討する。

2. 基礎方程式と仮定

非圧縮性のニュートン流体の運動に対する基礎方程式は、次の連続の式と運動方程式で与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\rho \{ \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \} = \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F} \quad \dots\dots(2)$$

ただし、 $\mathbf{v}$: 流体の速度ベクトル (m/s), P : 圧力 (Pa), $\mathbf{F}$: 外力ベクトル (N/m³), ρ : 密度 (kg/m³), μ : 粘性係数 (Pa·s) である。ここでは、Fig. 1 に示すような半径 R (m) で無限長の流体円柱を解析の対象とする。安定性について議論するため、表面に波長 λ (m) の微小な波が存在し、振幅 a (m) が時間的に変化する(微小変動)場合を考える。すなわち、変動時の流体表面形状は次式で表わせる。

*原稿受付 昭和63年9月18日 昭和63年度春季全国大会で発表

**正 員 大阪大学工学部 Member, Osaka University, Faculty of Engineering

*** 大阪大学大学院(現ダイハツ) Osaka University, Faculty of Engineering (Present address:Daihatsu)

Fig. 1 Perturbation of a fluid cylinder (axisymmetric perturbation which deforms the surface of the cylinder into a sinusoidal shape).

$$r = R + a \cos k z \quad (a \ll R) \quad \dots\dots(3)$$

$$a = a_0 \cos \omega t = a_0 \cosh j \omega t \quad \dots\dots(4)$$

ただし、 k : 波数 ($=2\pi/\lambda$) (m^{-1}), ω : 角周波数 (rad/s) である。

また、解析にあたって次の仮定を設ける。

- (I) 流体に作用する力は表面張力と電磁力のみである。(次報で述べる橋絡液柱の場合、さらに重力を考慮している。)
- (II) 表面張力あるいは外圧は流体全表面にわたって等しく、流体の密度と粘性は内部のいずれの場所でも一定である。
- (III) 流体形状とその変動は軸対称である。

さらに、対象とする流体に導電性があり、電磁力を扱う場合、(2)式において $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ が外力として加わるので、その効果を次のマックスウェルの方程式とオームの法則により求める。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \dots\dots(5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \dots\dots(6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots(7)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \dots\dots(8)$$

ただし、 $\mathbf{J}$: 電流密度ベクトル (A/m), $\mathbf{B}$: 磁場ベクトル (T), $\mathbf{E}$: 電場ベクトル (V/m), μ_0 : 真空中の透磁率 ($4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$), σ : 流体の電気伝導率 ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$) である。なお、電流の時間的な変化が 10 kHz 以下であるので変位電流を無視している。また、(8)式において電磁流体の運動に伴う磁気対流項 ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) を考慮する必要があるが、本研究で扱う現象においては無視できる。すなわち対象とする流体の代表寸法 L は 10 mm 以下で、その運動速度 $|\mathbf{v}|$ はたかだか 10 m/s である。また、金属の導電率は $10^6 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ 程度である。従って、磁気レイノルズ数 ($R_{em} = |\mathbf{v}| L \sigma \mu_0$) は $R_{em} \ll 1$ となり、 $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ とすることができる。さらに、流体内での磁力線の拡散時間 ($t \sim L^2 \sigma \mu_0$) は十分短いので定常磁場近似が成立し、(6)

式を用いることができる。

3. 電磁流体円柱の安定性に関する解析解

非圧縮・非粘性流体の円柱の安定性に関して、重力場のない場合について Rayleigh により解析されている⁶⁾。すなわち、表面変動のモード $x (=kR)$ と振幅 a の角周波数との関係 (分散関係) は次式で与えられる。

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho R^3} \frac{x I_1(x)}{I_0(x)} (x^2 - 1) \quad \dots\dots(9)$$

ただし、 γ : 表面張力 (N/m), $I_m(x)$: m 次の変形ベッセル関数である。

今、 $x > 1$ のとき ω^2 は正であるので液柱は振動するのみで安定であると判断される。一方、 $x < 1$ のとき ω^2 は負となるので、 $\omega = j\omega_0$ とおくと(4)式から、

$$a = a_0 \cosh \omega_0 t \quad \dots\dots(10)$$

となり、 a は時間とともに指数関数的に増加することが分かる。従って、振幅は大きく増大し、くびれの進行とともに液柱が分離する不安定現象が発生する。このとき ω_0 はくびれの進行の速さを示すことになるので、不安定成長速度と呼ぶ。

Chandrasekhar は Rayleigh の解析解を粘性流体の場合へ拡張し、次のような分散関係を得ている⁷⁾。

$$2x^2(x^2 + y^2) \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \left[1 - \frac{2xy}{x^2 + y^2} \frac{I_1(x)}{I_1(y)} \frac{I_1(y)}{I_1(x)} \right] - (x^4 - y^4) = \frac{\gamma R}{\rho \nu^2} \frac{x I_1(x)}{I_0(x)} (1 - x^2) \quad \dots\dots(11)$$

ただし、 $y = \kappa R$, $\kappa = k^2 + (\omega/\nu)$, $\nu (= \mu/\rho)$: 動粘性係数 (m^2/s) である。

Murty は、さらに非圧縮・非粘性流体の円柱に電流が流れる場合の問題を議論している⁸⁾。この場合の分散関係は、次式で示される。

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho R^3} \left[\frac{x I_1(x)}{I_0(x)} (x^2 - 1) - 4N \left\{ 1 + \frac{x}{2} \left(\frac{I_1(x)}{I_0(x)} - \frac{I_0(x)}{I_1(x)} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots(12)$$

ただし、 $N = \mu_0 I^2 / 4 \pi^2 R \gamma$ である。(12)式において電流がゼロの場合、第1項のみとなり、Rayleigh の解析解に一致する。

(12)式に数値を代入し、計算した結果を Fig. 2 に示す。縦軸は無次元化量 $\Omega^2 (= \rho R^3 \omega^2 / \gamma)$ としている。この場合、安定限界である $\Omega = 0$ となるモード x_c の値は、電流の無次元化量 N によって異なる。 N を定めると、 $x > x_c$ では $\Omega^2 > 0$ すなわち ω は実数となるので流体円柱は安定である。一方、 $x < x_c$ で Ω^2 は負になるので不安定となる。そして、 $x = x_m$ においては極小値 $-\Omega_m^2$ をとり、不安定成長速度が最大となる。また、 N の増大に従って、 $|\Omega^2|$ あるいは x_c も大きくなる。このように電磁流体の場合には、円柱の安定性はモード x に加えて電流値の大きさ N が大きく影響する。なお、次に述べる数値解との比較を行なうために、いずれの解析解も軸対称モードの変動 (半径方向のピンチ不安定) についてのみ示している。(12)式では軸対称のピンチ不安定に対する解を示しているが、Murty はより高次の不安定モードも含めて一般的に扱っており、さらに z 方向 (液柱の長さ方向すなわち電流の流れる方向) に均一な磁場が印加

Fig. 2 Nondimensional growth rate of the radial pinch instability as a function of $x=2\pi R/\lambda$ in the incompressible and inviscid fluid having finite electrical conductivity.

されている場合についても議論している。対象とする液柱が2.に述べた条件範囲にあれば、外部磁場が存在しない場合、ラジアルピンチ不安定はキンク不安定よりも先行することが予想されるので、まず軸対称モードから議論してもよいと考えられる。

4. MAC 法を用いた数値解法

4.1 計算手順

複雑な境界条件や流れの時間的変化を解析的に求めることは難しく、一般的には有限要素法や差分法を用いた数値解析が行なわれる。MAC 法は連続の式とナビエーストックスの式を差分近似式に置き換えて計算する手法で、自由表面をもつ流体の問題にも適用可能である。なお、MAC 法の使用に際しても2.に述べた条件を仮定している。

計算にあたっては、(1)(2)式を円筒座標系 (r, θ, z) で表現している。 θ 方向の流れはないものとして速度ベクトル $(u, 0, v)$ を求める。また、電流についても θ 成分はゼロとしているので、磁場は θ 方向成分のみ $(0, B_\theta, 0)$ となり、 $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nabla B^2/2\mu_0$ が成り立つ。なお磁場分布は(5)~(8)式より $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$ となるので電磁気の境界条件に応じて求めることができる。従って、次に示す関係が成立する。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots(13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ru^2}{\partial r} + \frac{\partial uv}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{2\mu_0 \rho} \frac{\partial B_\theta^2}{\partial r} \quad \dots\dots(14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ruv}{\partial r} + \frac{\partial v^2}{\partial z} = g - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{2\mu_0 \rho} \frac{\partial B_\theta^2}{\partial z} \quad \dots\dots(15)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r B_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots(16)$$

ただし、 $\phi(p/\rho)$: 圧力関数 (m^2/s^2)、 g : 重力加速度 (本報では $g=0$ としている) である。

Fig. 3 Field-variables lay out in the numerical solution technique (MAC method) used.

次にこれらの式を差分近似式に置き換える。すなわち空間差分格子の寸法を $\delta r \times \delta z$ 、時間ステップを δt 、時刻を n とおくと、Fig. 3 のようなセル構造を考え、 ϕ, B をセル中心で、 u, v をそれぞれ図に示すようにセル境界で定義する。そして、運動方程式(14)(15)を時間に対して前進差分、空間に対して中心差分で近似し、時刻 n における速度、圧力分布及び磁場分布から時刻 $(n+1)$ の速度を求める。

ここで、時刻 n における圧力分布を求めるために流体の体積 (密度) 変化を次のように定義する。

$$D = \frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \dots\dots(17)$$

(2)式の両辺について発散 (DIV) をとると、

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -Q + R - \frac{1}{2\mu_0 \rho} \nabla^2 B_\theta^2 \quad \dots\dots(18)$$

$$Q = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 ru^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 ruv}{\partial r \partial z} \quad \dots\dots(19)$$

$$R = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad \dots\dots(20)$$

$$\nabla^2 B_\theta^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_\theta^2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 B_\theta^2}{\partial z^2} \quad \dots\dots(21)$$

が成立するので、各格子点で時刻 n における Q ((19)式より流速で決定される) 並びに $\nabla^2 B_\theta^2/2\mu_0 \rho$ を計算し、非圧縮性流体 ((13)式) の条件から $\partial D/\partial t=0$ となるように(18)(20)式によって ϕ を決定する (サイクル誤差自己調整法)。なお、 B は次に述べる境界条件を用いて(16)式により求める。 ϕ と B の収束計算では、計算ステップ毎の誤差が0.01%以下になるまで繰り返している。

Fig. 4 に本研究で用いた MAC 法全体の計算フローチャートを示す。このフローチャートに従って、任意の時刻まで計算を進めることができる。

4.2 初期条件と境界条件

Fig. 5 に計算に使用した差分格子と流体円柱の初期形状を示す。 z 軸に対して対称であり、 z 方向に無限長のモデルを想定しているので、 $r=0, z=0, z=\lambda$ でフリー

スリップ境界としている。初期表面形状は一周期の正弦波形状であり、表面マーカーを配して形状認識を行な

Fig. 4 Flow chart of the computation by MAC method.

Fig. 5 Mesh and marker-particle lay out used for numerical calculation of fluid cylinder instability.

う。各計算サイクル（時刻）において表面の形状認識がされると曲率を計算して表面張力による圧力を求め、圧力計算(20)式の境界条件としている。また、内部にもマーカーを配して流体の動きを追う。

磁場に関しては電流の流入出がある境界 ($z=0, z=\lambda$) と表面の格子についてのみ境界条件を設定し、(20)式により流体内部の磁場分布を求めた。すなわち、 $z=0, \lambda$ では流体が半径 $R(m)$ の円と壁と接触して、電流は一樣な密度で垂直に流入出すると仮定し、次の直線電流による磁場の式で近似して決定する。

$$B_{\theta} = \mu_0 I r / 2\pi R^2 \quad (r < R)$$

$$B_{\theta} = \mu_0 I / 2\pi r \quad (r \geq R) \quad \dots\dots (22)$$

また、表面においても表面セルのそれぞれの位置 (R_s, Z_s) で $r=R_s$ として上式を用いた。

5. 解析解と数値解の比較

Fig. 6 及び Fig. 7 は MAC 法による数値計算結果の例である。Fig. 6 は半径 $R=0.6 \text{ mm}$ 、波長 $\lambda=3 \text{ mm}$ すなわち、 $x=1.26$ の場合に初期振幅 $a_0=0.05 \text{ mm}$ を与えたときの計算結果で、Fig. 2 より解析的には安定（振動）状態に相当する。ただし、計算の時間きざみは $\delta t=5 \times 10^{-5} \text{ s}$ 、空間差分格子のサイズは $\delta r=\delta z=0.1 \text{ mm}$ である。図から数値計算においても時間経過とともに振動していることが分かる。詳細に観察すると減衰振動を呈しており、粘性の影響が計算結果に反映されている。一方 Fig. 7 は半径 $R=0.4 \text{ mm}$ 、波長 $\lambda=4 \text{ mm}$ すなわち、 $x=0.63$ ($a_0=0.05 \text{ mm}$) の場合の計算結果である。この計算（図中(a)~(f)）の時間きざみは $\delta t=2 \times 10^{-5} \text{ s}$ 、空間差分格子のサイズは $\delta r=\delta z=0.05 \text{ mm}$ である。時間とともに中央部のくびれが進行する不安定モードとなっている。ここで、図中(g)は $\delta t=5 \times 10^{-5} \text{ s}$ 、 $\delta r=\delta z=0.1 \text{ mm}$ で計算したものであり、同じ時間経過した(d)と比較すると、くびれ部の乱れが大きく、この段階で正確な計算が

Fig. 6 Change of fluid cylinder shape calculated by MAC method (Oscillation: cyclic change of amplitude).

行なわれていないことがわかる。差分法では有限個の格子セルを用いているので、くびれが細くなるとその近傍の流体内部では r 方向のセル数が少なくなる。計算はすべてセル単位で行なっているため、この場合の計算不安定は、差分格子の大きさから規定される表面形状に起因する誤差が大きくなることによるものと考えられる。従って、不安定現象を追求しようとするとき δt , δr , δz を小さくする必要がある。

なお、MAC 法における計算の安定性については、線形偏微分方程式の差分解法の収束条件を流用して次式のような条件を課すると経験的に安定・収束することが報告されている⁹⁾。

$$\nu \delta t < \delta r^2 \delta z^2 / 2 (\delta r^2 + \delta z^2) \quad \dots\dots (23)$$

$$\nu > (\delta t / 2) \max(u^2, v^2) \quad \dots\dots (24)$$

計算しようとする流体の表面の変形が小さい場合や表面張力による圧力が小さい場合には、(23)(24) 式の条件は計算の安定性判定に際して有効である。

Fig. 8 は振幅の時間的変化をプロットしたもので (a)(b) はそれぞれ振動モード、不安定モードに対応する。ここで、数値計算結果を (4) 式を用いて回帰すると図中の実線となり、 ω (安定モードでの振動数あるいは不安定モードでの不安定成長速度) を求めることができる。

Fig. 9 は表面張力を横軸にとり、 ω を解析解と比較した例である。ただし、(a) では $x=1.88$ の振動モード、(b) では $x=0.63$ の不安定モードを示している。すなわち、液体の表面張力が大きくなると、振動モードではその固有振動数が高くなり、不安定モードではくびれ部の成長速度が上昇することを示している。ここでは数値解の精度を調べるために物性値を適当に変えており、液体として実在しないものも計算している。なお、 $\rho=1 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, $\nu=0.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $\gamma=0.07 \text{ N/m}$ は水の物性値に対応している。

さて、通電しない場合 ($N=0$) には、数値解と Chandrasekhar の解析解がよく一致している。通電した場合、不安定モードでは数値解と解析解はほぼ一致している。一方、振動モードでは N が大きくなるにつれて、両者の差がやや大きくなっている。一般に機械振動系の共振周波数は粘性減衰により低下する。従って、数値計算ではその効果が加味されていることが一因であると考ええる。また、Fig. 2 から分かるように不安定限界のモード x_0 は N 値とともに 1 よりも大きくなり、もともと ($N=0$) $x=1.88$ で振動モードにあったものは N 値が大

Fig. 7 Changes of fluid cylinder shape calculated by MAC method (Instability: necking growth to breakup).

Fig. 8 Amplitude change of the perturbation of the fluid cylinder calculated.

Fig. 9 Comparison of numerical solution and analytical solution.

(a) natural circular frequency in the oscillation modes of fluid cylinder.
 (b) necking growth rate in the instability mode of fluid cylinder.

きくなると、固有振動数が低下する。このため差分格子の大きさも影響するものと考えられる。すなわち、この例では空間格子の大きさを $0.1 \text{ mm} \times 0.1 \text{ mm}$ と一定にしており、波長が短い程 (x が大きくなると) MAC 法で設定している正弦波形状の精度が低下する。

6. 結 言

橋絡移行現象の機構解析を行なう準備として、電磁流体円柱の安定性について検討し、差分法を用いた数値計算法である MAC 法の誤差と適用範囲を調べた。本研究に用いた空間差分格子並びに時間きざみの範囲では液柱分離までの挙動を表現できなかった。しかし、不安定成長速度を求めることは可能であり、Rayleigh, Chandrasekhar, Murty の解析解とほぼ一致した。

参 考 文 献

1) 溶接アーク物理研究委員会編：パルスアーク溶接，第4，5章 (1986)

2) 三田：CO₂アーク溶接の波形制御方法の検討，論文集Vol. 6 No. 2 (1988)
 3) 山本，原田，安田：高速パルスマグ溶接における電流波形制御によるスパッタの低減，溶接アーク物理研究委員会88-690，溶接法研究委員会SW-1871-88 (1988)
 4) 植栗，田畑，岩田，水野：パルスMAG溶接におけるスパッタ発生現象，論文集Vol. 4 No. 4 (1986)
 5) Harlow, F. H. and Welch, J. E.: Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, The Physics of Fluid, 8-12 (1965)
 6) Rayleigh, J. W. S.: The Theory of Sound, Vol. 2, Chap. XX, Dover
 7) Chandrasekhar, S.: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Chap. XII, Dover
 8) Murty, G. S.: Instability of a conducting fluid cylinder in the presence of an axial current, a longitudinal magnetic field and a coaxial conducting cylinder Band 19 nr 35 (1961)
 9) 例えばHirt, C. W.: Heuristic Stability Theory for Finite-Difference Equations, J. of Computational Physics 2, 339-355 (1968)