Optimal Investment Timing under A Mean-reverting Process: A Real Options Approach*

Yuta Fukui^a

Junichi Imai^{b,†}

^a*Graduate School of Science and Technology, Keio University*

^b*Faculty of Science and Technology, Keio University*

Abstract: This paper investigates the optimal entry and exit decisions under a mean-reverting process over a finite horizon. Many theoretical studies on real options assume that an underlying risk follows a geometric Brownian motion over an infinite-time horizon. This assumption is not always practical, especially in discussing realistic investment strategies. In this paper, we examine effects of the mean-reverting process on both entry and exit decisions over a finite horizon. We focus on deriving the optimal boundaries of entry and exit decisions under a mean-reverting process, and compare the effects of the underlying risk process and length of the project horizon on the optimal decisions. Numerical examples in this paper demonstrate that the length of horizon could have a significant impact on the boundaries of the optimal decisions, and hence on project values, particularly under a mean-reverting process.

Keywords: Real options; Mean-reverting processes; Investment timing; Finite horizon

*Received: March 27, 2015; Accepted: October 28, 2015.

[†]Corresponding author. Address: 3-14-1 Hiyoshi, Yokohama, Kanagawa, 223-8522, Japan; Phone: +81-45-566-1621; E-mail: jimai@ae.keio.ac.jp

リアルオプションアプローチによる 平均回帰過程の下での投資タイミングの分析

福井 勇太^a今井 潤一^b^a 慶應義塾大学大学院理工学研究科^b 慶應義塾大学理工学部

1 序論

グローバル化や IT 技術の発展により、我々を取り巻く環境は複雑さを増していて、将来を正確に予測することは困難である。この状況は、企業がプロジェクトへ投資を行うときにも関係することで、企業は予測が難しい不確実性を伴う中での意思決定が求められる。また、その意思決定は、将来の状況によって柔軟に変更していく必要がある。例えば、企業が新しい市場へ参入しようとする場合を考えると、参入する条件は参入後ある一定以上の収益を持続して得られることであり、その条件を満たすであろうと判断できたときに参入する。そして、計画された生産を行っていくが、ときには需要の変化などから計画を変更しなければならない場面もある。また、R&D (research and development) のような長期間にわたる段階的なプロジェクトに関しても同様のことが言える。開発を行うときには、生産技術の進歩や予想収益、競争企業の状況を考慮して、開発からの撤退を含め各段階でどれだけの投資を行うかを判断しなければならない。これらのプロジェクトのように多くの場合、投資を行うことは不確実な状況下での決定を強いられ、その決定は状況に応じて変化させることが求められる。

これまで、リアルオプションアプローチを投資意思決定に適用してきた研究は、Dixit [2] や McDonald and Siegel [4] のように不確実である商品の価格やプロジェクトの価値を幾何ブラウン運動に従うと仮定するケースが多い。確かに幾何ブラウン運動を仮定することで得られる解析面での利点は多い。しかし、コモディティのような需要と供給によって価格が変化するような原資産を考えると、商品の価格が下がれば需要が上がり、そして商品の価格を上げると需要は下がる、といったサイクルが続くであろう。したがって、価格はある一定の数値に回帰するような変動をする。これは、不確実性が従う確率過程を幾何ブラウン運動ではなく、平均回帰過程と仮定することが望ましい状況が存在することを示している。実際に Bessembinder et al. [1] や 諸田 [9] では平均回帰性の存在を主張しており、発電所の開発や原油の採掘のプロジェクトには平均回帰性が大きな影響を与えられと考えられる。しかしながら、平均回帰性に注目した研究は少ないのが現状である。その中で、平均回帰過程に言及している代表的な研究としては Metcalf and Hassett [5] と Tsekrekos [7] が挙げられる。

Metcalf and Hassett [5] では企業の不可逆な参入の問題を平均回帰過程の下で議論しており、平均回帰性の 2 つの特徴を主張している。まず 1 つ目は、‘variance effect’ と呼ばれるものであり、平均回帰過程を用いることで長期的な視点で考えると価格の変動が小さくなり参入の境界が下がることを意味する。2 つ目は、‘realised effect’ と呼ばれるものであり、平均回帰性により変動が小さくなることで参入の境界に達しづらくなることを意味する。これら 2 つの相反する効果がお互いを打ち消しあうことで、平均

回帰性は大きな影響を及ぼさないと結論づけている。また、Tsekrekos [7] では、参入だけではなく撤退を含んだ投資タイミングの分析を行っている。撤退を考慮した場合においても ‘variance effect,’ ‘realised effect,’ さらに Sarkar [6] で述べられている ‘risk discounting effect’ (平均回帰性によりプロジェクトのシステマティックリスクが下がる効果) が存在することを示し、参入と撤退の問題に拡張可能であることを示した。Tsekrekos [7] の結論として、パラメータに依存する部分は大きい、平均回帰過程は参入と撤退に関して大きな影響を及ぼすことが示唆されている。これらの先行研究の共通点として、企業的意思決定に関して無限期間で分析されていることが挙げられる。しかし、企業の問題を考える場合、プロジェクトの期間が無限であるという状況は限定的なものであり、現実的とは言えない。

そこで本研究では、より現実的かつ一般的な状況での分析を行うために、有限期間において平均回帰過程が参入と撤退に与える影響を分析可能なモデルを構築し考察を行う。モデルの構築にあたり、今井 [8] で述べられているリアルオプションを評価する際に有効なフレームワークであるスイッチングオプションと Longstaff and Schwartz [3] により提案されたアメリカンオプションの評価法である最小二乗モンテカルロ法を利用する。本モデルでは数値解の導出を行い、数値実験の結果から有限期間の問題を無限期間で議論するとプロジェクトの価値を過大評価してしまうこと、さらには有限期間でも平均回帰過程は企業的意思決定に影響を及ぼすことを明らかにする。

本研究は以下のような構成となっている。2 節では、スイッチングオプションと最小二乗モンテカルロ法の理論と評価法を紹介し、本研究のモデルを説明する。3 節では、2 節で説明したモデルを用いて数値実験を行い、有限期間で分析する必要性と平均回帰過程の特徴を明らかにする。最後に 4 節では、結論を述べる。

2 モデル

本節では、本研究で扱う企業のプロジェクトを説明するとともに、プロジェクトを評価するためのモデルについて説明する。2.1 節では、企業のプロジェクトに対する仮定を置く。2.2 節ではスイッチングオプション、2.3 節では最小二乗モンテカルロ法のモデルへの適用について示す。そして、2.4 節では企業の投資タイミングとプロジェクトの価値の導出について述べる。

2.1 仮定

本研究では、企業が新商品を生産するプロジェクトを保有している場合の最適な参入タイミングと参入後の最適な撤退タイミングを数値的なアプローチを用いて導出する。一般的に、企業は設備投資などの参入によるコスト、さらに商品を生産するコストを考慮しても十分な利益を得られると判断した場合に参入を行う。また、参入後は商品の価格が生産コストを下回るような、生産による利益が望めない状況になったときに撤退を行う。本研究では、このプロジェクトは以下の仮定に従っているとする。まず、企業は 1 年間につき 1,000 回意思決定の機会を持ち、連続的な意思決定が可能であるとする (付録 A 参照)。この意思決定の時点をも t ($t = 1, 2, \dots, T$) と書くと、企業が生産しようとしている商品の価格 P_t は

$$dP_t = \kappa(\theta - P_t)dt + \sigma P_t dz_t, \quad (1)$$

の平均回帰過程に従っているとする。(1) 式の θ は P_t の長期平均、 κ は長期平均に回帰する強さ、 z_t は標準ブラウン運動、 σ は確率項のボラティリティとする。また、 $\theta \geq 0$, $\kappa \geq 0$ (ただし、 $\kappa = 0$ の場合は幾何ブラウン運動となる)、 $\sigma > 0$ を満たすものとする。企業は参入する場合、参入コスト K_1 を支払わ

図 1: 本研究におけるスイッチングオプションの図

なければならない。実際の状況を考えても、最初は生産するための設備投資等が必要であるので、コストを支払うことは妥当である。同様に撤退する場合にも撤退コスト K_0 が伴うとする。参入後は価格 P_t の商品を生産コスト c で生産するとし、 $P_t - c$ のキャッシュフローを得ることが出来る。これら 3 種類のコストは一定とする。

2.2 参入と撤退のタイミング

本節では、企業の参入と撤退のタイミングについて説明する。企業が参入を決定するタイミングは、参入コストを支払う必要はあるが、生産した場合に得られる利益が十分大きいと考えられるまで価格が上昇したときである。また、企業が撤退を決定するタイミングは、撤退コストを支払う必要はあるが、生産した場合に発生する損失を被るよりは好ましいと考えられるまで価格が下落したときである。この参入や撤退を決める価格は、企業が意思決定を行う時点によって変わることが予想でき、各時点での価格を知ることが企業の最適な投資タイミングを見つけることを可能にする。本モデルでは、企業の参入と撤退のタイミングをスイッチングオプションを用いて求める。

スイッチングオプションとはスイッチングコストを支払うことで他の状態へ移行する権利を持ったオプションの総称である。スイッチングオプションはステージ数とスイッチングコストを変化させることで、R&D のような多くのステージを持つプロジェクトにも応用でき、多くのリアルオプションを評価することが可能となる。

ここで、本研究の問題にスイッチングオプションのフレームワークを当てはめる。本モデルでは、参入状態と撤退状態という 2 つのステージがあると仮定する。企業は意思決定を行う時点 t において、ステージを移行するか同じステージに留まるかを決定する。なお、意思決定を行う前にキャッシュフローが発生し、移行後のステージでのキャッシュフローは次の時点で受け取るものとする。ステージ 0 を撤退状態、ステージ 1 を参入状態とすると、ステージ 0 からステージ 1 へ移行するためのコストとして参入コスト K_1 、ステージ 1 からステージ 0 へ移行するためのコストとして撤退コスト K_0 が必要とする。コストを支払うことで、企業は期間中に何度でもステージを移行することができる。この概要を図で示すと図 1 のようになる。

次に本研究のスイッチングオプションにおけるステージの移行について説明する。まず、時点 t におけるステージ j での意思決定後の価値を $V_A(P_t, j)$ 、意思決定前の価値を $V_B(P_t, j)$ とする。意思決定後の価値 $V_A(P_t, j)$ は、次の時点での価値で表すことができるので

$$V_A(P_t, j) = e^{-rdt} E_t^Q [V_B(P_{t+1}, j)], \quad (j = 0, 1), \quad (2)$$

と表すことができる。ここで、 dt は意思決定の間隔、 r は安全利子率、 $E_t^Q[\cdot]$ はリスク中立確率のもとでの時点 t における期待値であり、時点 $t+1$ 以降に企業が最適な意思決定をした場合の時点 t での期待値

である。また、満期時点 T では次に時点が存在しないので

$$V_A(P_T, 0) = V_A(P_T, 1) = 0,$$

と書ける。また、意思決定前についてはステージ 1 の場合にのみキャッシュフローが発生するので

$$\begin{aligned} V_B(P_T, 0) &= \max(V_A(P_T, 0), V_A(P_T, 1) - K_1) = 0, \\ V_B(P_T, 1) &= P_T - c + \max(V_A(P_T, 1), V_A(P_T, 0) - K_0) = P_T - c, \end{aligned}$$

と書ける。

最初に、ステージ 0 の場合を考える。ステージ 0 での意思決定前においては、ステージ 0 に留まるか、ステージ 1 に移行するか 2 つの選択肢がある。ステージ 0 ではキャッシュフローが発生せず、ステージ 1 に移行する場合は参入コストが必要なので、ステージ 0 での意思決定前の価値 $V_B(P_t, 0)$ は

$$V_B(P_t, 0) = \max(V_A(P_t, 0), V_A(P_t, 1) - K_1), \quad (3)$$

と書ける。すなわち、 $V_A(P_t, 0) \geq V_A(P_t, 1) - K_1$ ならばステージ 0 に留まり、 $V_A(P_t, 0) < V_A(P_t, 1) - K_1$ ならばステージ 1 に移行する。次に、ステージ 1 の場合を考える。ステージ 1 での意思決定前においても、ステージ 1 に留まるか、ステージ 0 に移行するか 2 つの選択肢がある。ステージ 1 では生産することにより $P_t - c$ のキャッシュフローが発生し、ステージ 0 に移行する場合は撤退コストが必要なので、ステージ 1 での意思決定前の価値 $V_B(P_t, 1)$ は

$$V_B(P_t, 1) = P_t - c + \max(V_A(P_t, 1), V_A(P_t, 0) - K_0), \quad (4)$$

と書ける。したがって、 $V_A(P_t, 1) \geq V_A(P_t, 0) - K_0$ ならばステージ 1 に留まり、 $V_A(P_t, 1) < V_A(P_t, 0) - K_0$ ならばステージ 0 に移行する。

ここで、価格が格子モデルに従っているとすると、(2) 式は時点 T から後退的に求めることで計算できる場合がある。しかし、本研究のようにシミュレーションベースでアプローチするときは、この期待値をどのように求めるかが問題となる。そのため 2.3 節において、シミュレーションベースでの期待値計算の方法を説明する。

2.3 期待値の導出

本研究では、(2) 式で表される期待値の算出に Longstaff and Schwartz [3] で提案されている最小二乗モンテカルロ法（以下、LSM と記す）を用いる。LSM はシミュレーションによるアメリカンオプションの価格評価法として提案された手法である。LSM ではアメリカンオプションの価値が最大となる時点を求めることを目的としており、将来のキャッシュフローの期待値を各時点の原資産の状態から近似し本源的価値と比較することで行使時点を決定する。詳しくは Longstaff and Schwartz [3] を参照すると良い。以下に、本研究において LSM の考えを用いた期待値算出のアルゴリズムをまとめる。

期待値算出のアルゴリズム

- (i) 初期時点から満期時点まで、各時点での商品の価格パスを L 本発生させる。

- (ii) 各パス ω_i ($i = 1, 2, \dots, L$) の時点 t , ステージ j での意思決定前の価値を $V_B(P_t(\omega_i), j)$, 意思決定後の価値を $V_A(P_t(\omega_i), j)$ と書く. まず各パスについて, 満期時点 T では 2.2 節で示したように,

$$\begin{aligned} V_A(P_T(\omega_i), 0) &= V_A(P_T(\omega_i), 1) = 0, \\ V_B(P_T(\omega_i), 0) &= \max(V_A(P_T(\omega_i), 0), V_A(P_T(\omega_i), 1) - K_1) = 0, \\ V_B(P_T(\omega_i), 1) &= P_T(\omega_i) - c + \max(V_A(P_T(\omega_i), 1), V_A(P_T(\omega_i), 0) - K_0) = P_T(\omega_i) - c, \end{aligned}$$

と書ける.

- (iii) 次に時点 $T-1$ において意思決定後の価値 $V_A(P_{T-1}(\omega_i), j)$ を求める. ステージ 0 の場合は, $V_B(P_T(\omega_i), 0) = 0$ なので

$$V_A(P_{T-1}(\omega_i), 0) = 0,$$

である. ステージ 1 の場合は, 意思決定後の価値を求めるために, LSM の考えから P_{T-1} を用いて $E_{T-1}^Q[V_B(P_T(\omega_i), 1)]$ の値を多項式で近似する. 具体的には, 基底関数を

$$\phi(x, l) = x^l, \quad l = 0, 1, \dots, n,$$

とすると, 各パス ω_i ($i = 1, 2, \dots, L$) について,

$$\min_{a_{T-1}(l), l=0,1,\dots,n} \sum_{i=1}^L \left(e^{-r\Delta t} V_B(P_T(\omega_i), 1) - \sum_{l=0}^n a_{T-1}(l) \phi(P_{T-1}(\omega_i), l) \right),$$

を解く. そして, 回帰係数 $a_{T-1}^*(l)$ ($l = 0, 1, \dots, n$) を求め, 意思決定後の価値を

$$V_A(P_{T-1}(\omega_i), 1) = \sum_{l=0}^n a_{T-1}^*(l) \phi(P_{T-1}(\omega_i), l),$$

と近似する. したがって, 意思決定前の価値

$$\begin{aligned} V_B(P_{T-1}(\omega_i), 0) &= \max(V_A(P_{T-1}(\omega_i), 0), V_A(P_{T-1}(\omega_i), 1) - K_1), \\ V_B(P_{T-1}(\omega_i), 1) &= P_{T-1}(\omega_i) - c + \max(V_A(P_{T-1}(\omega_i), 1), V_A(P_{T-1}(\omega_i), 0) - K_0), \end{aligned}$$

を計算することが可能となる.

- (iv) 一般的に, 時点 t の場合を考える. ステージ 0 にいるとき, 意思決定後の価値 $V_A(P_t(\omega_i), 0)$ は $V_B(P_{t+1}(\omega_i), 0)$ が既知であるので

$$\min_{b_t(l), l=0,1,\dots,n} \sum_{i=1}^L \left(e^{-r\Delta t} V_B(P_{t+1}(\omega_i), 0) - \sum_{l=0}^n b_t(l) \phi(P_t(\omega_i), l) \right),$$

を解くことで

$$V_A(P_t(\omega_i), 0) = \sum_{l=0}^n b_t^*(l) \phi(P_t(\omega_i), l),$$

と近似できる. 同様にステージ 1 にいる場合も,

$$\min_{a_t(l), l=0,1,\dots,n} \sum_{i=1}^L \left(e^{-r\Delta t} V_B(P_{t+1}(\omega_i), 1) - \sum_{l=0}^n a_t(l) \phi(P_t(\omega_i), l) \right),$$

を解くことで

$$V_A(P_t(\omega_i), 1) = \sum_{l=0}^n a_t^*(l) \phi(P_t(\omega_i), l),$$

と近似できる。この意思決定後の値を用いて、意思決定前の価値

$$\begin{aligned} V_B(P_t(\omega_i), 0) &= \max(V_A(P_t(\omega_i), 0), V_A(P_t(\omega_i), 1) - K_1), \\ V_B(P_t(\omega_i), 1) &= P_t(\omega_i) - c + \max(V_A(P_t(\omega_i), 1), V_A(P_t(\omega_i), 0) - K_0), \end{aligned}$$

を計算することが可能となる。

- (v) 以上のプロセスを後退的に繰り返し、初期時点まで行う。その結果、各時点・各ステージでの価値を求めることができる。

2.4 企業の参入と撤退の境界とプロジェクトの価値

本節では、2.2 節、2.3 節の方法から企業の参入と撤退のタイミングとその境界、プロジェクトの価値を導出する。

第 1 に、参入と撤退のタイミングについては、まず L 本の価格パスを発生させる。次に、各ステージ・各時点の $V_A(P_t, j)$ を各時点の価格から近似し後退的に計算する。本研究の問題は企業の参入を考えていることから、初期時点ではステージ 0 にいるとする。したがって、各パス ω_i について初期時点から (3) 式より $V_A(P_t(\omega_i), 0)$ と $V_A(P_t(\omega_i), 1) - K_1$ を比較することで参入の時点と価格を求め、同様に (4) 式より $V_A(P_t(\omega_i), 1)$ と $V_A(P_t(\omega_i), 0) - K_0$ の比較から撤退の時点と価格を求める。参入状態か撤退状態かを判断し、以上のプロセスを繰り返すことで、参入と撤退のタイミングを求めることが可能となる。

第 2 に、参入と撤退の境界の導出を行う。参入に関しては価格が高くなったときに起こるので、パスごとに参入時点と価格を求めた結果、同じ時点において参入するパスが複数ある場合には一番低い価格を参入の境界とする。同様に、撤退に関しては価格が低くなったときに起こるので、パスごとに参入時点と価格を求めた結果、同じ時点において撤退するパスが複数ある場合には一番高い価格を撤退の境界とする。したがって、参入と撤退の境界を以下の様なアルゴリズムで導出する。

参入と撤退の境界のアルゴリズム

- (i) 全パスについて、参入と撤退の時点と価格を求める。
- (ii) 求めた時点と価格を散布図としてプロットする (図 2)。
- (iii) 参入の境界については、プロット全体の下限をつないでいくことで導出する (ただし、シミュレーションによって生じた明らかに状況に適していないプロットは除く。(iv) についても同様である。)
- (iv) 撤退の境界については、プロット全体の上限をつないでいくことで導出する (図 3, 4)。

最後に、シミュレーションによる時点 t でのプロジェクトの価値の導出法を説明する。ここで時点 t でのプロジェクトの価値とは、時点 $t + 1$ 以降に最適な意思決定をした場合の価値とする。各パス ω_i につ

図 2: 撤退のプロット例

図 3: 撤退の境界を求める例

図 4: 撤退の境界例

いて、時点 t でステージ j にいる価値を $V_B(P_t(\omega_i), j)$ とする。各時点 t での価値の平均をとることで時点 t でのプロジェクトの価値 $\bar{V}(t)$ を求めるとすると、 $\bar{V}(t)$ は

$$\bar{V}(t) = \frac{\sum_{i=1}^L (V_B(P_t(\omega_i), j))}{L}, \quad (j = 0, 1),$$

と書ける。ここで、 $\bar{V}(t)$ は時点 0 から見た時点 t でのプロジェクトの価値の期待値を意味する。したがって、全時点で $\bar{V}(t)$ を求めることでプロジェクトの価値の時間変化を導出できる。

3 数値実験

本節では 2 節で示したモデルを用いた数値実験を行う。数値実験を行う際、平均回帰過程の特徴から参入と撤退の可能性や境界は価格の初期値と長期平均に大きく依存する。なぜなら、無限期間では価格は定常状態であると考えられるが、有限期間では同様には考えられないからである。そのため、有限期間の場合、価格が定常状態に至るまでの部分も重要であり、無限期間と異なる結果を示す要因になる。本研究では、初期価格 P_0 と長期平均 θ により、プロジェクトに 4 種類の特徴が確認されたため、 P_0 と長期平均 θ に関して特徴を示す以下の 4 パターンを考える。

1. $P_0 = 1.5, \theta = 3$
2. $P_0 = 2.5, \theta = 1$
3. $P_0 = 1.8, \theta = 2.3$
4. $P_0 = 2, \theta = 1.5$

(以下、パターン 1, パターン 2, パターン 3, パターン 4 と記す。)

各パターンにおいて、最初にプロジェクトの期間の長さがプロジェクトの価値に与える影響を示す。期間が長くなるにつれて、プロジェクトの価値が高くなることは想像に難くないが、グラフを用いて確認する。次に、 κ と σ の値による、参入と撤退の頻度について検証する。頻度を見ることで、各パターンにおいて参入や撤退の起こりやすさを知ることにつながり、分析対象を明確にすることができる。最後に、(1) 式のパラメータ κ, σ が参入と撤退のタイミングに与える影響を明らかにすると同時に、平均回帰過程と幾何ブラウン運動 ($\kappa = 0$) の比較を行う。3.1 節, 3.2 節, 3.3 節, 3.4 節では各パターンでのプロジェクトの価値、参入と撤退の頻度と参入または撤退の境界の形状を示し、各パラメータがそれら

図 5: パターン 1 における満期が異なる場合のプロジェクト価値の時間変化 ($\kappa = 1, \sigma = 0.15$)

に与える影響を考察する。本節で行う数値実験では、プロジェクトの期間を N 年、モンテカルロシミュレーションによる価格パス数 L は 50,000 本、期待値計算の近似関数の次数は 15、安全利子率 $r = 0.04$ 、撤退コスト $K_0 = 2$ 、参入コスト $K_1 = 3$ 、生産コスト $c = 2$ とし、2 節同様に 1 年間では企業は 1,000 回の意思決定のタイミングの機会があるとして実験を行う。

3.1 パターン 1 ($P_0 = 1.5, \theta = 3$)

本節では $P_0 = 1.5, \theta = 3$ であるパターン 1 の分析を行う。まずは期間が長くなるに連れて、プロジェクトの価値がどのように変化するかを図 5 に示す。図 5 は期間が異なる場合のプロジェクトの価値の時間変化を表している。この図は、まず L 本のパスを一番長い期間 ($N = 2.5$) の最終時点まで発生させ、同じパスを用いて期間が異なる場合の価値を $N = 1$ に合わせ 1,000 時点までプロットしたものである。この場合では初期価格と長期平均の関係より価格が大きく上昇することから、多くの場合、企業は参入状態で満期を迎える。図 5 より、 N が大きくなるほど各時点の価値も高くなることが読み取れる。パターン 1 ではプロジェクトの期間が長いほど将来の期待キャッシュフローが大きくなるので、プロジェクトの期間が短い場合より、プロジェクトの価値も大きくなる。すなわち、有限期間の問題を無限期間を仮定したモデルで分析すると、商品の価格は同じであるにもかかわらずプロジェクトの価値を過大評価することになる。またグラフの形状として $N = 1$ から $N = 2.5$ の全てで、価値が一定に近い状態から、その後下がっていく様子が分かる。これは、一般的に満期時点に近づくにつれて価値が下がっていくことは当然であるが、価格が上昇傾向を持つパターン 1 では定常状態に至るまで価値の増加が期待されるためであると考えられる。したがって、全ての期間において、同じ時点で価値が右下がりになると言える。結果として、価値の大きさは期間に依存しているので、無限期間のモデルを有限期間の問題に用いると大きな誤差が生じる。

次に、参入と撤退の頻度について図 6 に示す。図 6 はパターン 1 における各パラメータの参入と撤退の頻度を表している。図 6 より、各パラメータでほぼ全てのパスが参入するが、撤退は起きにくいことが分かる。価値が高い値で保持されるので撤退しないことは妥当である。したがって、パターン 1 では参入の境界についてのみ議論する。

最後に、参入の境界について考察する。参入の境界について図 7 に κ が、図 8 に σ が境界に与える影

図 6: パターン 1 における各パラメータの参加と撤退の頻度

響を示す。図 7 はパターン 1 における κ が異なる場合の参加の境界の時間変化、図 8 はパターン 1 における σ が異なる場合の参加の境界の時間変化を表している。図 7, 8 の閾値がない部分は、参加が起こらなかったことを示している。これ以降の節でも、同様のことが言える。まず、図 7 より、 κ が大きくなると参加の境界は低くなることが分かる。もし価格が低い場合でも、将来のキャッシュフローが大きいと期待される場合には早いタイミングで参加する。それゆえに、 κ が大きい場合は、 κ が小さいときに比べ価格が低い状況でも参加が起こる。また境界の形状に関しては、 $\kappa = 1$, $\kappa = 2$ の場合では初期時点の近くでは右上がりであり、その後は水平になっている。これは時点が早いときは価格の上昇傾向が強いのて価格が低いときでも参加し、時点が進むにつれて価格が長期平均に近づくことで参加する値は一定に近いものになる。さらに、 $\kappa = 1$ で満期時点付近では再度右上がりになるが、満期時点付近に参加することにより参加コストを回収することが難しくなるからだと考えられる。次に、 $\kappa = 0$, つまり平均回帰性を持たない場合には、形状は水平になることはなく右上がり続けることが読み取れる。価格がある値に収束しないので、残り期間が短くなるほど得られるキャッシュフローが小さくなり、参加する条件が厳しくなるからであると言える。したがって、パターン 1 においては、 κ の増加は参加価格を下げ、境界を一定にすることにつながり参加しやすい状況を作る。無限期間のモデルでは境界が一定の値として算出されるので、 κ が小さいときに無限期間のモデルを有限期間の問題に適用することは大きな誤差を生むことになる。次に、図 8 より σ が参加のタイミングに与える影響を考察する。図 8 から σ による形状の大きな変化は見られないが、 σ が小さくなるにつれて、参加の境界が下がり参加しやすい状態になることが分かる。価格が上昇する状況のときに σ が大きいことは、上昇傾向を抑えてしまうことになる。よって、参加しづらいことになるので、境界が上がることになる。パターン 1 のように価格が大きく上がる場合には σ が小さいほど参加が起こりやすい境界であると言える。

図 7: パターン 1 における κ が異なる場合の参入の境界の時間変化 ($\sigma = 0.20$, $N = 1$)

図 8: パターン 1 における σ が異なる場合の参入の境界の時間変化 ($\kappa = 1$, $N = 1$)

3.2 パターン 2 ($P_0 = 2.5$, $\theta = 1.0$)

本節では $P_0 = 2.5$, $\theta = 1.0$ のパターン 2 の分析を行う。まずは前節同様、期間が長くなるに連れてプロジェクトの価値がどのように変化するかを図 9 に示す。図 9 は期間が異なる場合のプロジェクト価値の時間変化を表している。この図もパターン 1 と同様に、同じパスを用いて期間が異なる場合の価値を 1,000 時点までプロットしグラフ化したものである。図 9 からはパターン 2 でも N が大きくなるほど各時点での価値が高くなることが読み取れるだけでなく、撤退することにより収束していく様子も見ることができる。したがって、プロジェクトの期間が十分に長ければ無限期間のモデルを適用できる可能性はあるが、過大評価を避けるためにも有限期間の問題として分析すべきだと言える。時間変化の様子については $N = 1$ から $N = 2.5$ の全てで、価値が右下がりになっている。これは、まず初期時点付近で参入したが生産による価値が下がり続け、満期時点では価値が 0 になるからである。またパターン 2 では、時点が進むことで価格は低くなる。したがって、プロジェクトの期間が長くなったとしても、生産コストを下回るような価格では参入状態を継続し生産することは起こらない。よって、期間を長くするにつれて価値が収束していく結果になる。結論として、プロジェクトの価値が収束しないような期間が短いときに無限期間のモデルを有限期間の問題に用いる場合には注意が必要である。

次に、参入と撤退の頻度について図 10 に示す。図 10 はパターン 2 における各パラメータの参入と撤退の頻度を表している。図 10 より、各パラメータで全てのパスが参入し、そのほとんどが撤退することが分かる。初期価格が高い値に設定されているので参入することは当然であり、長期平均が小さいので結果として撤退することも妥当である。しかし、初期価格の値によりプロジェクト開始と同時に参入が起こることが大多数であるので、参入の境界は議論に値せず撤退の境界についてのみ議論する。

最後に、撤退の境界について考察する。撤退の境界について図 11 に κ が、図 12 に σ が境界に与える影響を示す。図 11 はパターン 2 における κ が異なる場合の撤退の境界の時間変化、図 12 はパターン 2 における σ が異なる場合の撤退の境界の時間変化を表している。図 11 より、 κ が小さくなると撤退の境界が下がっていくことが読み取れる。もし価格が高い状況でも、将来のキャッシュフローが小さく見積もられる場合には撤退すべきである。したがって、 κ が大きい場合は、 κ が小さいときに比べ価格が高いにもかかわらず撤退を決める。このため、 $\kappa = 2$ の境界では撤退する時点が早く、撤退する価格が高くなっている。よって、 κ が大きいほど、撤退が起こりやすい境界であると言える。また、境界の形状に

図 9: パターン 2 における満期が異なる場合のプロジェクト価値の時間変化 ($\kappa = 0.5$, $\sigma = 0.15$)

図 10: パターン 2 における各パラメータの参入と撤退の頻度

図 11: パターン 2 における κ が異なる場合の撤退の境界の時間変化 ($\sigma = 0.15$, $N = 1$)

図 12: パターン 2 における σ が異なる場合の撤退の境界の時間変化 ($\kappa = 1$, $N = 1$)

関しては、 $\kappa = 2$ と $\kappa = 1$ では初期時点付近から一旦下がり、その後は一定の値を取るようになる。ただし、満期時点付近では撤退コストの影響から、右下がりになる。このように、 κ がある値以上なら境界が一定の値になるが、平均回帰性を持たない $\kappa = 0$ では初期時点から境界は右下がりのままである。 $\kappa = 0$ では長期平均に近づくということがないので、撤退の条件は時点が進むにつれて厳しくなり続ける。したがって、 κ が小さいときには境界が一定にならないことより、無限期間のモデルを適用することは避けるべきである。次に、図 12 より σ が撤退のタイミングに与える影響を考察する。図 12 から σ による形状の大きな変化は見られないが、 σ が小さくなるにつれて、撤退の境界が上がり撤退しやすい状態になることが分かる。価格が下降する状況のときに σ が大きいことは、下降傾向を弱めてしまうことにつながる。よって、撤退が起こりにくくなるので、境界が下がることになる。パターン 2 のように価格が大きく下がる場合には σ が小さいほど撤退が起こりやすい境界となる。

3.3 パターン 3 ($P_0 = 1.8$, $\theta = 2.3$)

本節では $P_0 = 1.8$, $\theta = 2.3$ であるパターン 3 の分析を行う。まずは本節でも期間が長くなるに連れて、プロジェクトの価値がどのように変化するかを図 13 に示す。図 13 はパターン 3 における期間が異なる場合のプロジェクト価値の時間変化を表している。図 13 からはパターン 1 ほどではないが、プロジェクトの期間が長くなるにつれて各時点の価値が高くなることが分かる。パターン 1 に比べ、初期価格からの上昇幅が小さいので期間による価値の差は小さくなる。さらに、定常状態に早い時点で至るので、価値が一定の期間が短くなる様子も読み取れる。しかし、パターン 3 の場合でも依然として期間が長いときにプロジェクト価値が高いことは変わらず、無限期間を仮定したモデルで分析すると、プロジェクトの価値を過大評価することになる。したがって、パターン 3 においても無限期間と有限期間を分けて議論する意味はある。

次に、参入と撤退の頻度について図 14 に示す。図 14 はパターン 3 における各パラメータの参入と撤退の頻度を表している。図 14 より、 σ が大きいほど参入の頻度は下がり、撤退の頻度は上がることが分かる。初期価格と長期平均の関係から、参入の頻度が高くなるが、時点が進むことで参入していくので参入の境界について議論することが可能である。また、パターン 1 とは違い撤退が起こる状況であることから、撤退の境界についても考察する。

図 13: パターン 3 における期間が異なる場合のプロジェクト価値の時間変化 ($\kappa = 1, \sigma = 0.15$)

図 14: パターン 3 における各パラメータの参加と撤退の頻度

図 15: パターン 3 における κ が異なる場合の参入の境界の時間変化 ($\sigma = 0.15$, $N = 1$)

図 16: パターン 3 における σ が異なる場合の参入の境界の時間変化 ($\kappa = 1$, $N = 1$)

最後に、参入と撤退の境界について考察する。第 1 に参入の境界について図 15 に κ が、図 16 に σ が境界に与える影響を示す。図 15 はパターン 3 における κ が異なる場合の参入の境界の時間変化、図 16 はパターン 3 における σ が異なる場合の参入の境界の時間変化を表している。図 15 より κ による参入タイミングと境界の形状についてはパターン 1 に似ており、 κ が大きい場合では参入の境界は下がり、時間が経つにつれて境界の値は一定になることが分かる。パターン 3 ではパターン 1 より初期価格と長期平均の差が小さいことから、 $\kappa = 2$ においても満期時点付近で再び境界が上がり参入が起こりにくくなる。さらに、平均回帰性を持たない $\kappa = 0$ では、境界は右上がりであり平均回帰過程との参入タイミングの違いが読み取れる。また、図 16 より、パターン 1 と同様に σ が小さいときほど境界が下にあり参入が起こりやすい状態である様子が見て取れる。形状については $\sigma = 0.10$, $\sigma = 0.15$ のときは、初期時点付近で一旦上がってから一定値を取るようになり、最終時点付近で再度上がるような形状をしている。しかし、 $\sigma = 0.20$ を見て分かるように、 σ が大きいと右上がり続けるようになる。したがって、 σ により、時点が進むほど参入の境界の差が大きくなると言える。結果として 2 つの図から言えることは、パターン 3 では、参入の境界について κ の減少と σ の増加は似た働きをする、ということである。よって、参入の境界が時間によらず一定となる無限期間のモデルを κ の値が小さい場合や σ の値が大きい場合に適用すべきでない。

第 2 に、撤退の境界について考察する。図 17 に κ が、図 18 に σ が境界に与える影響を示す。図 17 はパターン 3 における κ が異なる場合の撤退の境界の時間変化、図 18 はパターン 3 における σ が異なる場合の撤退の境界の時間変化を示す。図 17 より、 κ による撤退タイミングと境界の形状について以下のことが言える。 κ による撤退タイミングについては、 κ が大きいと境界が下がり撤退が起こりにくくなるだけでなく、 $\kappa = 0$ の場合と境界が交差している。境界の形状については、満期時点付近では一定の値に収束する様子も見られるが、 κ によらず右下がりになる。 κ が大きいときは、価格の上昇率が大きくなるので撤退が起こにくくなり、撤退時の価格が低くなる。さらに、平均回帰性を持たない場合に比べ時点が早い段階では、撤退が起こにくいことから撤退時の価格は低い、時点が進むと右下がりの傾向が弱くなり、右下がりのままである $\kappa = 0$ と境界は交わる。また図 18 より、 σ に関する境界の変化についても、境界は右下がりであることが読み取れる。確かに σ がどの値でも右下がりの形状を持つが、 σ が小さいほど右下がりの傾向は弱くなり、時点が進むと各 σ による撤退時の価格に差が生じる可能性がある。結果として 2 つの図から、撤退の境界は右下がりであるが、特に κ が小さい場合と σ が大きい

図 17: パターン 3 における κ が異なる場合の撤退の境界の時間変化 ($\sigma = 0.15$, $N = 1$)

図 18: パターン 3 における σ が異なる場合の撤退の境界の時間変化 ($\kappa = 1$, $N = 1$)

場合にはその傾向が強くなり、無限期間のモデルを適用する場合には注意が必要である。

3.4 パターン 4 ($P_0 = 2.0$, $\theta = 1.5$)

本節では $P_0 = 2.0$, $\theta = 1.5$ であるパターン 4 の分析を行う。まずは期間が長くなるに連れて、プロジェクトの価値がどのように変化するかを図 19 に示す。図 19 はパターン 4 における期間が異なる場合のプロジェクト価値の時間変化を表している。他のパターンと同様に、図 19 から、プロジェクトの期間が長いときに各時点の価値が高くなることを見て取れる。グラフの形状としてはパターン 1 とパターン 2 の中間のような形状をしており、初期時点から価値が高い状態が少し続き、減少していく様子を表している。また、パターン 4 でも期間を長くするにつれてプロジェクトの価値が収束していくことが分かる。初期時点付近では、参入し生産することで価値が生まれる場合があるが、時点が進むにつれて価格が下がることにより、プロジェクトの価値は減少していく。さらに、パターン 2 のときのように、期間を長くしても商品を生産することによる利益が明らかに増えるわけではないので、価値は収束していくことになる。したがって、期間が長くなるにつれてプロジェクトの価値の差は小さくなるが、期間が長いほど価値は大きいのでパターン 4 においても無限期間のモデルを有限期間のプロジェクトに用いるときは注意しなければならない。

次に、参入と撤退の頻度について図 20 に示す。図 20 はパターン 4 における各パラメータの参入と撤退の頻度を表している。図 20 より、 σ が大きいほど参入と撤退の頻度は上がり、 κ が大きいほど参入と撤退の頻度は下がることが分かる。初期価格と長期平均の関係から、参入後に撤退することが多くなることは考えやすい。しかし、パターン 2 のように初期時点付近でのみ参入が起こるわけではないので、参入と撤退の両方の境界について議論する。

最後に、参入と撤退の境界について考察する。第 1 に参入の境界について図 21 に κ が、図 22 に σ が境界に与える影響を示す。図 21 はパターン 4 における κ が異なる場合の参入の境界の時間変化、図 22 はパターン 4 における σ が異なる場合の参入の境界の時間変化を表している。図 21 より、パターン 1 やパターン 3 とは異なる参入の境界を持つことが分かる。まず平均回帰性を持つ場合に、時点が進むにつれて参入時の価格が上がり、その後一定になることは変わらないが、 $\kappa = 1$ と $\kappa = 2$ で近い値に収束している。さらに、 κ により参入時の価格が単純に上がるだけでなく、時点 600 付近で $\kappa = 0$ と交差して

図 19: パターン 4 における期間が異なる場合のプロジェクト価値の時間変化 ($\kappa = 1, \sigma = 0.15$)

図 20: パターン 4 における各パラメータの参加と撤退の頻度

図 21: パターン 4 における κ が異なる場合の参入の境界の時間変化 ($\sigma = 0.15$, $N = 1$)

図 22: パターン 4 における σ が異なる場合の参入の境界の時間変化 ($\kappa = 1$, $N = 1$)

いる。パターン 4 では価格が下降傾向を持つので、 κ が大きいときは参入しにくいいため参入時の価格は高くなる。しかし、平均回帰性を持たない場合には、境界は右上がり続けるため、ある値に収束する平均回帰性を持つ境界と交差することになる。したがって、平均回帰性を持つときと持たないときでは、参入の境界の振る舞いが大きく異なると言える。また、図 22 より $\sigma = 0.10$, $\sigma = 0.15$ の場合は参入の境界が右上がりから平行になる様子が見られるが、 $\sigma = 0.20$ では右上がりのままであることが分かる。初期価格と長期平均の差が小さい状況では、 σ が大きいと平均回帰性を妨げてしまうことにより、右上がり続けると考えられる。図 21 と図 22 から、パターン 4 では参入の境界の形状について、 κ と σ は逆の働きをしており、無限期間のモデルを適用する場合は両方のパラメータに注意する必要がある。

第 2 に、撤退の境界について考察する。図 23 に κ が、図 24 に σ が境界に与える影響を示す。図 23 はパターン 4 における κ が異なる場合の撤退の境界の時間変化、図 24 はパターン 4 における σ が異なる場合の撤退の境界の時間変化を示す。図 23 より κ が大きいときは撤退時の価格が高く、境界の形状が平行に近くなることが読み取れる。パターン 4 のように価格が低くなっていく状況では、 κ が大きいほど将来得られるキャッシュフローが小さくなるので、早めに撤退しようとするので撤退時の価格が高くなる。逆に、 κ が小さいほど、早期撤退のインセンティブは生まれなくなり、平均回帰性を持たない $\kappa = 0$ のように右下がりの境界になっていく。したがって、パターン 4 についても平均回帰性を持つ場合と持たない場合では、撤退タイミングが異なるという結果になる。また図 24 より、 σ が小さい場合ほど撤退時の価格が高くなり撤退が起こりやすくなることが読み取れる。価格が下降傾向にあるときは、 σ が小さく平均回帰性の影響を強く受けることにより撤退しやすくなることから、撤退時の価格が上がる。加えて $\sigma = 0.15$ と $\sigma = 0.20$ を見ると、初期時点付近では撤退時の価格の差は小さいが、徐々に差が広がることも分かる。よって、 σ が大きいほど、撤退が起こりにくい境界を持つ。よって、図 23, 24 から撤退の境界についても κ が小さい場合や σ が大きい場合には、無限期間のモデルを適用することは特に好ましくないと言える。

図 23: パターン 4 における κ が異なる場合の撤退の境界の時間変化 ($\sigma = 0.15$, $N = 1$)

図 24: パターン 4 における σ が異なる場合の撤退の境界の時間変化 ($\kappa = 1$, $N = 1$)

4 結論

本研究では、有限期間における企業の投資タイミングの分析を行うモデルを構築した。そしてモデルによる数値実験から、次の2点を示した。第1に、期間が有限のプロジェクトに対して無限期間のモデルを用いるのではなく、有限期間のモデルで分析することの有用性を明らかにした。平均回帰過程の下でのパターン分析から、全てで期間が長くなるほどプロジェクトの価値が上がるため、無限期間のモデルを使用することはプロジェクトの過大評価につながる。したがって、Tsekrekos [7] で議論されている無限期間のモデルを有限期間の問題に適用する場合には過大評価になりがちであることに注意が必要である。第2に、平均回帰性が企業の投資タイミングに与える影響と、平均回帰過程と幾何ブラウン運動との違いを明らかにした。まず、長期平均に回帰する強さである κ については、参入状態が続く場合では κ が大きくなるほど参入の決定を早める。また、参入後に撤退する頻度が高い場合では κ が大きくなるほど撤退の決定を早める。さらに、参入と撤退の境界は平均回帰過程と幾何ブラウン運動の場合で大きく異なることも確認でき、平均回帰性を持つときはある値に収束していく場合があるが、幾何ブラウン運動では単調な変化となる。また、確率項のボラティリティである σ は値が小さいときに参入と撤退が起こりやすい境界を持つ。結果として、参入と撤退のタイミングに関して、平均回帰過程と幾何ブラウン運動との違い、さらには無限期間では考慮されていない定常状態に至る過程の分析を可能にした。

今後の課題としては、以下の2点がある。第1に、本研究のモデルは平均回帰過程の場合以外でも分析することが可能であるので、解析的なアプローチが難しい他の確率過程に従う問題を考えることである。第2に、平均回帰過程に従うとされる実データを用いて企業の投資タイミングの評価を行うことである。

A 意思決定が与える影響について

本研究では連続型のモデル構築を目標としており、1年間において1,000回の意思決定をできるとしたならば、連続的な意思決定が十分に近似可能であると考えた。その理由として、意思決定を1,000回とすれば、それより意思決定の回数を多くした場合の価値との差は非常に小さいことを数値実験で確認した。表1は、3節のプロジェクトの価値の算出に用いたパラメータにおいて、各パターンと各意思決

表 1: 各パターンと各意思決定回数におけるプロジェクト価値の変化率

		パターン 1	パターン 2	パターン 3	パターン 4
意思決定回数 (回)	700	−0.25%	−0.22%	−0.59%	−0.32%
	750	−0.16%	−0.12%	0.24%	3.62%
	800	−0.21%	−0.39%	−0.08%	0.80%
	850	−0.23%	0.04%	−0.16%	4.02%
	900	−0.22%	−0.08%	0.06%	0.20%
	950	−0.20%	0.06%	−0.05%	0.16%
	1,000	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	1,050	−0.32%	0.05%	−0.56%	1.55%
	1,100	−0.20%	0.04%	−0.15%	1.27%
	1,150	0.02%	0.07%	−0.26%	3.74%
	1,200	−0.22%	0.13%	−0.21%	3.63%
	1,250	0.01%	0.27%	−0.45%	2.58%
	1,300	−0.10%	0.08%	−0.22%	1.56%
意思決定回数が 1,000 回の場合の プロジェクト価値		148.94	214.50	57.43	5.94

定回数について 50,000 本のサンプルパスから期間が 1 年間のプロジェクトの価値を求めることを 10 回
行い、その平均値と意思決定の回数が 1,000 回の平均値との変化率を表している（例えば、意思決定回
数が n 回の場合のプロジェクト価値の平均値を V_n とすると、表の値は

$$\frac{V_n - V_{1000}}{V_{1000}} \times 100,$$

として算出される）。表 1 は各パターンと各意思決定回数におけるプロジェクト価値の変化率を示す。表
1 より、いずれのケースにおいても意思決定回数が 1,000 回との差は非常に小さくなることが読み取れ、
十分に連続的な意思決定の近似と考えられると判断した。

謝辞

本稿を作成するに当たり、査読者の方々や編集委員の方から有益なコメントを頂きました。この場を借
りて深くお礼を申し上げます。なお本研究は、科研費基盤研究 B (YK5B02) の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Bessembinder, H., Coughenour, J. F., Seguin, P. J. and Smoller, M. M. (1995): Mean reversion
in equilibrium asset prices: Evidence from the futures term structure, *Journal of Finance*, **50**,
361–375.
- [2] Dixit, A. (1989): Entry and exit decisions under uncertainty, *Journal of Political Economy*, **97**,
620–638.

- [3] Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (2001): Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach, *Review of Financial Studies*, **14**, 113–147.
- [4] McDonald, R. L. and Siegel, D. (1986): The value of waiting to invest, *Quarterly Journal of Economics*, **101**, 707–727.
- [5] Metcalf, G. E. and Hassett, K. A. (1995): Investment under alternative return assumptions comparing random walks and mean reversion, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **19**, 1471–1488.
- [6] Sarkar, S. (2003): The effect of mean reversion on investment under uncertainty, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **28**, 377–396.
- [7] Tsekrekos, A. E. (2010): The effect of mean reversion on entry and exit decisions under uncertainty, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **34**, 725–742.
- [8] 今井潤一 (2004): 「リアル・オプション: 投資プロジェクト評価の工学的アプローチ」, 中央経済社.
- [9] 諸田崇義 (2010): “コモディティ価格変動の特徴とプライシング・モデルの展開”, 金融研究, **29**, 27–72.