Brownian Dynamics Simulation of FENE Dumbbell Model for Dilute Polymer Solutions in Extensional Flow: Effect of Distribution of FENE Parameter and Relaxation Time

Kunji CHIBA*, Kanji TERAOKA**, Yuji IOKITO**, and Kiyoji NAKAMURA**

*Faculty of Education, Shiga University, Otsu, Shiga

**Department of Mechanophysics Engineering, Graduate School of Engineering,
Osaka University, Suita, Osaka

Brownian dynamics (BD) simulations of the steady and transient rheological behaviors of FENE dumbbell model for dilute polymer solutions in uniaxial extensional flow are reported. The simulations include examination of the effects of distributions of maximum allowable extension (FENE parameter b) and of relaxation time parameter α .

Stretch-thickening and strain-hardening behaviors, which can be often observed in polymer solutions, are confirmed in the simulations either with or without the distribution of b or α . However, overshoot phenomenon in a start-up extensional flow can never be observed unlike the situation in a start-up shear flow. Curves of transient extensional viscosity vs. strain clearly show that the extensional viscosity is independent of the stretch rate in the regime of $\alpha\lambda_0 \dot{\epsilon} > 1 \sim 2$ where polymer solutions exhibit significant strain-hardening.

Furthermore, it is found that the distribution of b has little influence on extensional flow properties while the distribution of α can affect both the steady and transient extensional flow properties under the distribution condition used in the simulations. BD simulation can precisely predict the extensional viscosity even in the low stretch rate region.

Key Words: Brownian dynamics simulation / FENE dumbbell model / Extensional flow properties / Distribution of maximum extension / Distribution of relaxation time.

FENE dumbbellモデルを用いた希薄高分子溶液の伸長流動特性の ブラウン運動学シミュレーション： FENEパラメータおよび緩和時間の分布の影響

千葉 訓司*¹, 寺岡 寛二*², 五百旗頭祐二*², 中村喜代次*²

(原稿受理：1998年8月10日)

1. ま え が き

前報¹⁾の「1.まえがき」で、連続体的手法に代わって分子モデルを用いた高分子液体のレオロジー特性に関する従来の研究については詳細に述べている。本報では、前報のせん断流動特性に関する報告に引き続いて伸長流動特性についてBD simulationにより得られた結果を報告する。そこで、分子モデルを用いた従来の伸長流動特性の研究について簡単に概説する。

最も単純なHookean dumbbellモデルを用いると、伸長流れでは有限の伸長速度でdumbbellの長さが無限大になるため、伸長粘度は無限に増大する²⁾。一方、Hookean springの代わりにFENE (Finitely Extensible Nonlinear Elastic) spring³⁾

を用いると、Hookean springモデルの欠点の幾つかが解消される。第一の改良点はバネの伸びが一定値に抑えられることであり、このため、有限の伸長粘度が得られる^{2), 4)}。

更に、dumbbellモデルより実際の分子に近いモデルとしてchainモデル (FENE chain) が提案された。しかし、実用的にはその複雑さを低減するための近似としてPeterlin⁵⁾が提案したFENE-P chainが用いられている。FENE-P chainの場合、応力を計算するために連立して解かなければならない方程式の数が多いたことが欠点である。そこで、支配方程式の数を減らす工夫がWedgwoodら⁶⁾によりなされ (FENE-PM chain) FENE-PM chainを用いて定常伸長流動特性を計算し、FENE-P chainの結果とほぼ一致することを確認している。

一方、BD simulationによる伸長流動特性の研究としては次のものがある。van den Brule⁷⁾はFENE chain, FENE-P chainおよびFENE-PM chainについて定常ならびに過渡的伸長流動特性を計算した。FENE chainと比較してFENE-P

*1 滋賀大学教育学部

〒520-0862 大津市平津2-5-1

*2 大阪大学大学院工学研究科機械物理工学専攻

〒565-0871 吹田市山田丘2-1

chainとFENE-PM chainの場合、スタートアップ流れにおいて定常値に到達する直前の伸長粘度の変化に幾分違いが認められるが、伸長特性を十分に表すことができることを示した。FetskoとCummings⁹⁾ はFENE chainとFENE-PM chainの定常ならびに過渡的伸長流動特性を計算し、流体力学的相互作用、排除体積、chainの長さの影響を調べた。chainの長さが短い場合には流体力学的相互作用および排除体積が定常流動特性に大きな影響を及ぼすことを明らかにした。更に、HerrchenとÖttinger⁹⁾ は単純伸長流動特性に関して、BD simulationにより求めたFENE dumbbellの結果と構成式から計算したFENE-P dumbbellおよびFENE-CR (Chilcott-Rallison version¹⁰⁾) dumbbellの結果を比較した。定常流動特性はほぼ一致するが、過渡的流動特性には大きな差が見られることを報告している。

上述した従来の研究では、分子量分布がない場合の高分子溶液のレオロジー特性に関する研究が大部分である。ところが、実際の高分子溶液では分子量が分布しており、これがレオロジー特性に大きく影響することが知られている。そこで、本研究は、FENE dumbbellの希薄懸濁液でモデル化した希薄高分子溶液を対象として、そのレオロジー特性に及ぼす分子の最大伸長長さの分布ならびに緩和時間の分布の影響について調べることを目的としている。

ここで対象にしたレオロジー特性は、単純伸長流れにおける定常流動特性とスタートアップ流動特性である。これらの特性をBD simulationにより求め、分子の最大伸長長さおよび緩和時間が分布しない場合の結果と比較する。更に、計算により得られる分子の長さおよび配列の変化から高分子液体特有のレオロジー特性の発生メカニズムについて考える。

以上の伸長特性の数値解析に対して、最近では、従来測定不可能であった高分子溶液の過渡的伸長粘度がfilament stretching rheometerを用いて盛んに測定されている^{11~15)}。また、その流動過程の数値解析^{16~18)}も行われている。これにより、せん断流れと伸長流れが同時に発生する場合の粘弾性流体特有の複雑な流れのメカニズムの解明が一層期待される。本報では、これらの測定結果との比較も一部行うことにする。

2. レオロジー特性の計算法

ここでは、(a) 定常伸長流動特性、(b) スタートアップ伸長流動特性、について計算を行う。

基礎理論、BD simulationの方法ならびに計算手順については前報¹⁾で詳細に述べているのでここでは省略する。また、前報同様流体力学的相互作用の影響については考えない。

本報に関連する無次元量を次に示す。

$$\begin{aligned} r_i &= Q_0 r_i^*, & Q &= Q_0 Q^*, & t &= \lambda_0 t^*, \\ \kappa &= \kappa^* / \lambda_0, & \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^* / \lambda_0, \\ \sigma &= nk_B T \sigma^*, & \bar{\eta} &= nk_B T \lambda_0 \bar{\eta}^*, \\ b &= \frac{H Q_0^2}{k_B T}, & a &= \frac{\lambda_H}{\lambda_0} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 λ_0 はdumbbellの基準となる緩和時間、 $\lambda_H = \zeta / 4H$ は

個々のdumbbellの緩和時間である。ここで、FENE dumbbellの特性を表す無次元量としてFENEパラメータ b および λ_H と λ_0 の比で定義される緩和時間パラメータ α を導入した。 b あるいは α を分布させてレオロジー特性の計算を行うことによりdumbbellの最大伸長長さの分布および緩和時間の分布の影響を調べる。

FENEパラメータ b および緩和時間パラメータ α の分布は、前報で示したようにこれらの値の10を底とした対数値が正規分布するように定めた。なお、計算は前報と同じくTable Iに示す5つの条件で行った。

Table I Parameter conditions for BD simulations.

Condition	FENE parameter b	Relaxation time parameter α	Average	Variance
A	distribution	1.00	$\langle b \rangle = 192$ $\langle \log b \rangle = 2$	0.5
B	100	distribution	$\langle \alpha \rangle = 1.92$ $\langle \log \alpha \rangle = 0$	0.5
C	192	1.00	-	-
D	100	1.92	-	-
E	100	1.00	-	-

3. 単純伸長流れ特性

Fig.1に示すように x 方向を流れ方向とする単純伸長流れにおいて、速度勾配テンソル κ^* は次式ようになる。

$$\kappa^* = \dot{\epsilon}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}^*$ は伸長速度である。

単純伸長流れ特性は、伸長粘度、dumbbellの長さおよび配向で示すことにする。また、dumbbellの3次元配向は、Fig.1に示すように xy 面、 yz 面、 zx 面への正投影を基にして配向楕円を用いて表す。なお、配向は x 方向に対して軸対称になるので、 xy 面と yz 面の配向楕円で表すことにする。伸長粘度 $\bar{\eta}^*$ は次式により求められる。

$$\bar{\eta}^* = \frac{\sigma_{xx}^* - \sigma_{yy}^*}{\dot{\epsilon}^*} \quad (3)$$

Fig.1 Coordinate system in a uniaxial extensional flow.

3.1 定常特性

ここでは、FENEパラメータの分布と緩和時間パラメータの分布が定常特性に及ぼす影響について示す．計算に用いたdumbbellの個数はパラメータが分布している場合（condition A, B）は $m = 2400$ ，一定の場合（condition C, D, E）は $m = 300$ である．また、十分に定常になった後、0.01時間毎の100点について時間平均をとった．このような計算を100回行い、その平均値と標準偏差（誤差棒）を計算結果に示した．

伸長粘度，dumbbellの長さの2乗平均のルートについて、 b および α が分布している場合の結果をそれぞれFig.2, Fig.3に示す．比較のために b および α が分布していない場合、 $b = 10, 100, 1000$ ($\alpha = 1$) の結果と、 $\alpha = 0.1, 1, 10$ ($b = 100$) の結果をFig.4, Fig.5に示す．また、dumbbellの配向状態をFig.6に示す．

Fig.2 Effect of the distribution of FENE parameter in a steady extensional flow.

Fig.2(a), Fig.3(a) からFENE dumbbellモデルでは、パラメータが分布している場合にも伸長速度の増加に伴い伸長粘度は増大し、stretch thickening性を示すことが分かる．更に、FENE springの有限伸長性により、伸長速度の増加に伴い伸長粘度はある値に漸近している．Birdら²⁾ によると低伸長速度と高伸長速度の極限において、伸長粘度はそれぞれ次のようになることが示されている．

$$\lambda_0 \dot{\epsilon} \rightarrow 0; \quad \frac{\bar{\eta} - 3\eta_s}{3nk_B T \lambda_0} = \frac{b}{b+5} \quad (4a)$$

$$\lambda_0 \dot{\epsilon} \rightarrow \infty; \quad \frac{\bar{\eta} - 3\eta_s}{3nk_B T \lambda_0} = \frac{2b}{3} \quad (4b)$$

次に分布の影響について示すと、 b が分布している場合には、伸長粘度にはほとんど分布による影響が見られない．これに対して、 α が分布している場合には、分布している方がより小さい伸長速度からstretch thickening性が現れ始める．

Fig.3 Effect of the distribution of relaxation time parameter in a steady extensional flow.

(a) Extensional viscosity

(b) Root-mean-square of dumbbell length

Fig. 4 Steady extensional properties for FENE parameters $b = 10, 100$ and 1000 .

また、分布している方がなだらかに最大値に漸近している。このような伸長粘度の変化は、Fig. 3(b) の condition B と condition D の結果を比較すると、 α が分布していない condition D の場合にはdumbbellの長さは急激に変化しているが、condition B の場合にはなだらかに最大値に漸近していることから推定できる。更に、Fig. 5 から、小さい伸長速度からstretch thickening性が現れるのは緩和時間の大きい分子による影響であり、なだらかに最大値に漸近するのは緩和時間の小さい分子による影響であることが分かる。

なお、単分散系では、伸長粘度ならびに伸長速度の無次元化の方法からFig. 5(a) の伸長粘度の場合には α の値の大きい曲線を右下の方向に平行移動すれば α の値の小さい曲線に重ねることが分かる。また、Fig. 5(b) のdumbbellの長さについては横軸に平行に移動すれば重ねる。単分散系における緩和時間の効果はこのような平行移動で得られることになる。これは、Fig. 3のcondition D とEについても当然成り立つ。

dumbbellの配向については、Fig. 6において一軸伸長流で

あるため配向の主方向は常に流れ方向であり、伸長速度の増加に伴い配向の程度が良好になる。

前報で述べたように、せん断流れの場合には、下流側に位置するbeadの速度が上流側のbeadの速度より小さくなるときがありflip-overが生ずる。しかし、伸長流れでは、Fig. 7に示すようにブラウン運動によりdumbbellは揺らいでいるが、常に下流側のbeadの速度が大きくなるのでdumbbellには溶媒から伸長力が作用する。このためdumbbellはflip-overを起こさず流れ方向に良好に配向する。

なお、前報においてせん断速度が非常に小さい領域 ($\lambda_0 \dot{\epsilon} < 0.1$) ではブラウン運動が支配的になるためにせん断レオロジー特性に大きなばらつきが生じた。これに対して、Figs. 2~5において伸長速度の非常に小さい領域でも、伸長粘度はほとんどばらついていない。これは、上述したように流動様式が異なることに起因するdumbbellの運動の違いによると思われる。

(a) Extensional viscosity

(b) Root-mean-square of dumbbell length

Fig. 5 Steady extensional properties for relaxation time parameters $\alpha = 0.1, 1$ and 10 .

Fig.6 Variation of dumbbell orientation with stretch rate for conditions A, B, C and D.

Fig.7 Orientation of dumbbell in an extensional flow.

3.2 スタートアップ流動特性

dumbbellの個数はパラメータが分布している場合 (condition A, B) には $m = 5000$, 一定の場合 (condition C, D) には $m = 2000$ である . このような計算をパラメータが分布している場合には30回 , 一定の場合には20回行い , その平均値と標準偏差 (誤差棒) を計算結果に示した .

伸長粘度 , dumbbellの長さの2乗平均のルートについて , b

(a) Extensional viscosity

(b) Root-mean-square of dumbbell length

 Fig.8 Effect of the distribution of FENE parameter in a start-up extensional flow, at $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.1, 0.3, 0.6$ and 1.0 , for conditions A and C.

および α が分布している場合の結果をそれぞれFig.8 , Fig.9に示す . また , 比較のためにパラメータが分布していない場合 , $b = 10, 100, 1000$ ($\alpha = 1$, $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.6$) と $\alpha = 0.1, 1, 10$ ($b = 100$, $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.1$) の伸長粘度の結果をFig.10に示す .

b あるいは α が分布している場合にも , 分布していない場合にも , 伸長流れのスタートアップ流動特性には , せん断流れの場合に見られたovershoot 現象は見られなかった . この現象は , TirataatmadjaとSridhar⁽¹²⁾ がfilament stretching rheometerを用いて行った高分子溶液の伸長粘度測定においても観察されなかった .

この原因は , せん断流れと伸長流れでdumbbellが溶媒から受ける力が異なるためである . 平衡状態のdumbbellが突然大きなせん断流れにさらされると , 下流側に位置するbeadと上

(a) Extensional viscosity

(a) FENE parameters \$b=10, 100\$ and \$1000\$

(b) Root-mean-square of dumbbell length

(b) Relaxation time parameters \$\alpha = 0.1, 1\$ and \$10\$

Fig.9 Effect of the distribution of relaxation time parameter in a start-up extensional flow, at $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.1, 0.3, 0.6$ and 1.0 , for conditions B and D.

Fig.10 Time evolution of the start-up extensional viscosity for (a) $\alpha = 1$, $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.6$, $b = 10, 100$ and 1000 ; (b) $b = 100$, $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.1$, $\alpha = 0.1, 1$ and 10 .

流れ側に位置するbeadの速度差によりdumbbellは急激に伸ばされ、流れ方向に配向していく。ところが、dumbbellの配向方向が流れ方向に近づくと、二つのbeadsの速度差は減少していくためdumbbellが溶媒から受ける力は小さくなる。これに対して、伸びた状態にあるFENE springには大きな復元力が働いている。従って、急激に伸ばされたdumbbellが急激に縮むことになるので、せん断流れではレオロジー特性ならびにdumbbellの長さにovershoot現象が見られる。

一方、平衡状態のdumbbellに突然大きな伸長をかけると、dumbbellは溶媒からの伸長力により急激に伸ばされ、流れ方向に配向していくが、dumbbellが伸びれば伸びるほどdumbbellに働く溶媒からの伸長力も大きくなる。このため、dumbbellはFENE springの復元力と溶媒からの伸長力が釣り

合うまで伸びることになる。従って、伸長流れではovershoot挙動を示さない。

また、Fig.11からdumbbellは時間の経過とともにランダムな配向状態から流れ方向に配向していき、定常状態に達することが分かる。

次に分布による影響について示す。 b が分布している場合には $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.6$ のときに分布している方が伸長粘度が定常値に達するのに長い時間を要している。Fig.10(a)より、これは b の大きいdumbbellの影響であると考えられる。このように中程度の伸長速度で b の分布の影響が現れた原因として次のように考えられる。伸長速度が小さい領域では、定常伸長長さは小さく、全てのdumbbellが短時間のうち($t/\lambda_0 \approx 5$)に定常値に到達できる。また、伸長速度が大きい領域では、伸長力

が大きくなるため、どのdumbbellも短時間のうち ($t/\lambda_0 \approx 10$) に最大長に近い状態になるので分布の影響が見られない。従って、中程度の伸長速度で伸長粘度に及ぼすの分布の影響が最も顕著に現れる。

Fig.11 Time evolution of the orientation ellipse of dumbbell in a start-up extensional flow, at $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.1, 0.3, 0.6$ and 1.0 , for condition A.

一方、 α が分布している場合には、伸長速度が小さいほど伸長粘度に分布の影響が顕著に現れるが、 $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 1.0$ に近づくとほとんど見られなくなる。これは緩和時間の大きい分子の影響であると考えられる (Fig.10(b) 参照, α が大きいほど伸長粘度の成長速度が大きくなる)。また、伸長速度が大きくなるにつれて分布の影響が小さくなるのは、dumbbell が短時間のうちに最大長に近い状態になるからである。また、伸長粘度およびdumbbellの長さともに伸長速度が小さいほど定常状態になるのに長い時間を要することも分かる。

しかし、ここで用いた分布条件の場合には、 b の分布が過渡的伸長粘度に及ぼす影響は α の分布の影響に比べてほとんど無視できる程度である。

これまでは伸長粘度の時間に対する発達状態について考察し、FENE dumbbellの希薄懸濁液はstrain-hardening性を呈することが分かった。strain-hardening挙動は溶液中での分子の配向と伸長に起因し、 $\lambda_H \dot{\epsilon} = 1$ を越えると顕著になることが分子のcoil-stretch transitionの議論から明らかにされている^{19), 20)}。更に、TirtaatmadjaとSridhar¹²⁾ がfilament stretching rheometerによる伸長粘度測定で得た結果、即ち、顕著なstrain-hardeningの領域では伸長ひずみ $\epsilon = \dot{\epsilon} t$ と過渡的伸長粘度の関係が伸長速度に関係なく一致する傾向にあることが示されており、ここでもこの傾向が見いだされるかどうか調べる。Fig.12にcondition Aとcondition Bの $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.6, 1.0$ の結果を示す。測定では、溶液の種類にもよるが $\epsilon \approx 6$ 程度で定常値に

Fig.12 Transient viscosity against strain in a start-up extensional flow, at $\lambda_0 \dot{\epsilon} = 0.6$ and 1.0 , for conditions A and B.

達している。これに比べて本研究では、大きな緩和時間を有するcondition Bの場合には比較的小さいひずみで定常状態に達しているが、緩和時間の小さいcondition Aの場合には定常値に達するのに必要なひずみが極めて大きいことが分かる。また、ここで用いた計算条件の範囲内ではcondition Bの場合には、測定に見られるような伸長速度に関わらず過渡的伸長粘度が伸長ひずみの関数として表されるという傾向が見られるが、condition Aの場合にはほとんど見られない。condition Bの場合 $\alpha = 1.92$ で緩和時間の平均値がcondition Aの場合の2倍程度あるため、同じ伸長速度で比べるとcondition Bの方がstrain-hardening性が顕著となる。しかも、condition Aの場合 $b = 192$ と大きいためdumbbellが十分に伸長されるのに要する時間が長い。これもcondition Aの場合strain-hardening性が顕著に現れにくい原因となっている。

Figs.2(a), 3(a) から伸長速度と定常伸長粘度の関係は次の3つの領域に分割できる。すなわち、 $\alpha \lambda_0 \dot{\epsilon} > 0.2 \sim 0.3$ の領域はニュートン流体の性質が現れる線形領域、 $0.2 \sim 0.3 < \alpha \lambda_0 \dot{\epsilon} <$

1~2の領域は急激に粘度が増大する遷移領域, $\alpha\lambda_0\dot{\epsilon} > 1 \sim 2$ の領域は伸長粘度が飽和して一定となる領域である。そして, 第3の領域において定常状態になるまで伸長すると, dumbbellはほぼ最大長まで伸びしかも流れ方向に配列することが分かる (Figs.2(b), 3(b), Fig.6参照)。更に, この第3の領域ではstrain-hardening挙動が顕著に現れ (Figs.8(a), 9(a)参照), 伸長ひずみと過渡的伸長粘度の関係が伸長速度に関係なく一つのマスターカーブで表される。Fig.12に示す condition Aの条件は, 第2の遷移領域に属するためマスターカーブに重ならないことになる。また, condition Bの場合でもFig.9(a)に示す $\lambda_0\dot{\epsilon} = 0.1, 0.3$ の条件ではマスターカーブから外れることが確かめられている。従って, condition Aの場合でも伸長速度を大きくして $\alpha\lambda_0\dot{\epsilon} > 1 \sim 2$ の条件で計算すれば当然マスターカーブが得られる。

4. ま と め

希薄高分子溶液を FENE dumbbellの希薄懸濁液でモデル化し, BD simulationにより伸長流動特性に及ぼすdumbbellの最大伸長長さ (FENEパラメータ) の分布と緩和時間の分布の影響について調べた。

FENEパラメータや緩和時間が分布している場合でも, 一般に高分子溶液で観察される特徴であるstretch-thickening性 (定常特性) およびstrain-hardening挙動 (過渡特性) などを確認することができた。

伸長流動特性に及ぼすパラメータの分布の影響は以下の通りである。

- (1) 定常特性: 伸長粘度にはFENEパラメータの分布の影響がほとんど見られない。これに対して, 緩和時間が分布している場合には, 一定の場合と比べてより小さい伸長速度からstretch thickening性が現れ始め, また, ゆっくり最大値に近づく。
- (2) スタートアップ流動特性: FENEパラメータあるいは緩和時間が一定の場合にも, 分布している場合にも, 伸長流れのスタートアップ流動特性には, せん断流れの場合に見られたovershoot現象は見られなかった。このovershoot現象は, TirtaatmadjaとSridhar¹²⁾がfilament stretching rheometerを用いて行った高分子溶液の伸長粘度測定においても観察されていない。また, 緩和時間が分布している場合には, 伸長速度が小さいほど伸長粘度に分布の影響が顕著に現れるが, 伸長速度の増加に伴いほとんど見られなくなる。一方, dumbbellは時間の経過とともにランダムな配向状態から流れ方向に配向し定常状態に達する。
- (3) 伸長ひずみと過渡的伸長粘度の関係: 定常状態まで伸長するときdumbbellがほぼ最大長まで伸びしかも流れ方向に配列する条件 ($\alpha\lambda_0\dot{\epsilon} > 1 \sim 2$) では, strain-hardening性が顕著となり, 伸長ひずみと過渡的伸長粘度の関係が伸長速度に関わらずほぼ一つのマスター

カーブで表される。従って, ゆっくり伸長しても急速に伸長しても, 同一の伸長ひずみで生じる伸長粘度の値は同じである。

従って, ここで用いたような分布の場合には, 伸長流動特性に及ぼすFENEパラメータの分布の影響はほとんど見られないが, 緩和時間の分布は定常特性ならびに過渡特性に影響を及ぼすことが明らかになった。なお, 前報でせん断速度の小さい領域 ($\lambda_0\dot{\gamma} < 0.1$) ではせん断特性に大きなばらつきが見られた。しかし, 伸長粘度は, 伸長速度の非常に小さい領域でもほとんどばらついていない。

参 考 文 献

- 1) 千葉訓司, 寺岡寛二, 五百旗頭祐二, 中村喜代治, 日本レオロジー学会誌, 27, 31 (1999).
- 2) Bird RB, Curtiss CF, Armstrong RC, Hassager O, "Dynamics of Polymeric Liquids: Kinetic Theory", Vol.2, 2nd ed. (1987), John Wiley and Sons, New York.
- 3) Warner HR, *Ind Eng Chem Fundam*, **11**, 379 (1972).
- 4) Bird RB, Dotson PJ, Johnson NL, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **7**, 213 (1980).
- 5) Peterlin AJ, *J Polym Sci, Polym Lett*, **4B**, 287 (1966).
- 6) Wedgewood LE, Ostrov DN, Bird RB, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **40**, 119 (1991).
- 7) van den Brule BHAA, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **47**, 357 (1993).
- 8) Fetisko SW, Cummings PT, *J Rheol*, **39**, 285 (1995).
- 9) Herrchen M, Öttinger HC, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **68**, 17 (1997).
- 10) Chilcott MD, Rallison JM, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **29**, 381 (1988).
- 11) Sridhar T, Tirtaatmadja V, Nguyen DA, Gupta RK, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **40**, 271 (1991).
- 12) Tirtaatmadja V, Sridhar T, *J Rheol*, **37**, 1081 (1993).
- 13) Spiegelberg SH, Ables DC, McKinley GH, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **64**, 229 (1996).
- 14) Spiegelberg SH, McKinley GH, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **67**, 49 (1996).
- 15) van Nieuwkoop J, Muller von Czernicki MMO, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **67**, 105 (1996).
- 16) Sizaïre R, Legat V, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **71**, 89 (1997).
- 17) Kolte MI, Rasmussen HK, Hassager O, *Rheol Acta*, **36**, 285 (1997).
- 18) Yao M, McKinley GH, *J Non-Newtonian Fluid Mech*, **74**, 47 (1998).
- 19) DeGennes PG, *J Chem Phys*, **60**, 5030 (1974).
- 20) Hinch EJ, *Phys Fluids*, **20**, S22 (1977).