ノ ー ト

The Consideration for Penetrating a Rod into a Powder Mass —When a Weight is Dropped on the Rod—

by

Akira TAKAMI

Yamawaki Gakuen Junior College, Akasaka,
Minato-ku, Tokyo 107

The penetration depth of a rod perpendicular to a surface of powder mass was measured by Yuasa et al. as a function of impulse of falling weight on top of the rod for beads of styrene resin and glass. Regarding to the measurements, the author derived a theoretical equation relating the potential energy of the rod and the friction of the powder. The equation shows that the penetration depth increases with increasing falling height and falling weight. The theoretical result seems to agree with the experimental results.

棒を粉体層へ挿入する場合の考察 —錘を所定の高さから落下させる場合—

高 見 昭*

(原稿受理: 1986年1月23日)

1. は し が き

棒を粉体層へ挿入するということは、粉体工学における粉体輸送機や混合機などを設計する上に必要な基礎概念を与えるものである。これが粉体物性の重要な評価を得る貫入試験の本質であって、¹⁾ 雪、土質、月面土壌、鋳型表面などそれぞれの場合に応じた装置がある。また、鳴り砂の性質を調べる場合、基本的にはこのような装置の原理を応用している。²⁾

粉体の場合、棒の形状、半径、荷重などと挿入深さとの関係が発表されていて、³⁾ その考察を既に発表した⁴⁾ 本報では錘を所定の高さから落下させた場合⁵⁾ について、ランキン係数を静動両状態に区別して考察しよう。

2. 測 定 例

湯浅ら⁵⁾の用いた測定装置 (Fig. 1)、試料、方法の概略を以下に述べる。容器に粉体を充填し、自由表面を水平にする。次に、棒を粉体層上へ静かに載せて、このときの目盛 h_0 を読み、質量 M の錘を棒上面へ落下距離 H から落下させ、目盛 h_d を読み、そ

れによって挿入深さ $h = h_d - h_0$ を知る。使用した棒はラワン材で直径 5.5cm、長さ 15cm、重量 180g、錘は炭素鋼で、直径 4cm、高さ 0.95, 2.05, 3.25, 4.2, 5.3cm の円柱で、それぞれの重量は 90, 200, 315, 405, 515g であり、使用した試料はスチレン樹脂

Fig. 1 Experimental apparatus,

* 山脇学園短期大学 〒107 東京都港区赤坂4-10-36

Fig. 2 Relationship between penetration depth h and falling height H . (a), beads of styrene resin, $d=0.359\text{mm}$; (b), beads of styrene resin, $d=2.605\text{mm}$; (c), glass beads, $d=0.180\text{mm}$; (d), glass beads, $d=2.030\text{mm}$. Weight in grams; $\bullet$: 90, $\circ$: 200, ∇ : 315, $\square$: 405, $\triangle$: 515

球（直径 0.359, 2.605mm），ガラス粒（直径 0.180, 2.030mm）である。以上の方法により、それぞれの場合の測定を行って、得られた測定曲線を示す（Fig. 2~4）。

3. 方程式

簡単のために、次の仮定をする。

- 1) 棒は側面と先端から粉体の抵抗を受けるが、先端抵抗は深さに関係しない。
- 2) 棒の挿入は錘が自由落下して棒上面にあたる衝撃によるためである。
- 3) 棒自身の重さは錘より小さくて、無視できるものとする。
- 4) 棒は常に鉛直状態にあるとする。

いま、錘が自由落下距離 H を経て、棒の上面に落下したために棒を通して粉体へ与える仕事は、

$$MgH \quad (1)$$

となる。粉体の自由表面から深さ l における粉体の圧力 P は、Janssen によれば

$$P = \frac{R\rho g}{2\mu_w k} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\mu_w k l}{R}\right) \right] \quad (2)$$

で与えられる。⁶⁾ ただし、 R は容器の半径、 ρ は粉体密度、 k はランキン係数、 μ_w は容器壁面摩擦係数である。いま、棒が挿入する深さが表面から比較的浅く、 $l \rightarrow 0$ とすれば、

Fig. 3 Relationship between penetration depth h and falling weight M . (a), beads of styrene resin, $d=0.359\text{mm}$; (b) beads of styrene resin, $d=2.605\text{mm}$; (c) glass beads, $d=0.180\text{mm}$; (d), glass beads, $d=2.030\text{mm}$. Falling height in centimeters; $\bullet$: 5, $\circ$: 10, ∇ : 20, $\square$: 30, $\triangle$: 40, $\blacktriangle$: 50

Fig. 4 Relationship between h and H . (a), beads of styrene resin, $d=0.359\text{mm}$ (emery paper AA60); (b), glass beads, $d=0.180\text{mm}$ (emery paper AA60). The symbols are the same as in Fig. 2.

$$\exp\left(-\frac{2\mu_w k l}{R}\right) \approx 1 - \frac{2\mu_w k l}{R} \quad (3)$$

と置けるので、式(3)を式(2)へ代入すれば、

$$P \approx \rho g l \quad (4)$$

が得られる。静止状態にある棒が錘の衝撃を受けて粉体へ挿入、すなわち動的状态を呈した後、再び棒は静止状態にもどるので、棒には静的状態と動的状态の両状態が存在する。一方、ランキン係数にも静動両状態による差異があり、粉体の内部摩擦角を ϕ とし、静的ランキン係数 k_s は、

$$k_s = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (5)$$

で与えられ、動的状态のランキン係数 k_d は、

$$k_d = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (6)$$

で与えられる。また、静動両状態のランキン係数 k_s, k_d は棒の速度などを介して連続的に変化すると考えられるが、錘が棒に当たった最初の状態、すなわち $l=0$ で、動的状态のランキン係数 $k=k_d$ 、棒が $l=h$ まで挿入して静止した状態、すなわち $l=h$ で、静的ランキン係数 $k=k_s$ とし、更にランキン係数 k は深さ l に関し直線的に変化すると仮定すれば (k は l の一次関数)、

$$k = \frac{k_s - k_d l}{h} + k_d \quad (7)$$

が得られる。

粉体の内部でランキンの法則が成立するとすれば、粉体が棒の側面に与える摩擦力は棒が深さ l まで挿入している時点では、

$$\int_0^l 2\pi r \mu \left(\frac{k_s - k_d l}{h} + k_d \right) \rho g \xi d\xi = \pi r \mu \left(\frac{k_s - k_d l}{h} + k_d \right) \rho g l^2 \quad (8)$$

となる。ここに r は棒の半径、 μ は棒の側面摩擦係数、 ξ は粉体表面からの深さである。なお、棒の先端抵抗は仮定1)から、

$$\delta g \pi r^2 \quad (9)$$

で与えられる。ただし、 δ は抵抗係数である。式(8)、(9)はそれぞれ棒が深さ l にある場合の側面摩擦力、先端抵抗力を表す。実際上は、 $l=0$ で錘が当たり、棒が挿入される。次に、棒は $l=h$ で静止するわけであるから、 $l=0 \sim h$ の仕事量は式(8)、(9)からそれぞれ

$$\int_0^h \left(\pi r \mu \frac{k_s - k_d}{h} \rho g l^3 + \pi r \mu k_d \rho g l^2 \right) dl = \frac{1}{4} \pi r \mu (k_s - k_d) \rho g h^3 + \frac{1}{3} \pi r \mu k_d \rho g h^3 \quad (10)$$

$$\int_0^h \delta g \pi r^2 dl = \delta g \pi r^2 h \quad (11)$$

で与えられる。式(10)の右辺において、

$$\frac{1}{4} \pi r \mu (k_s - k_d) \rho g h^3 + \frac{1}{3} \pi r \mu k_d \rho g h^3 = \frac{1}{12} \pi r \mu \rho g h^3 (3k_s + k_d) \quad (12)$$

と変形されるので、

$$\frac{1}{12} (3k_s + k_d) = K \quad (13)$$

と置いて、式(13)を式(12)へ代入すれば、結局式(10)は

$$\int_0^h \left(\pi r \mu \frac{k_s - k_d}{h} \rho g l^3 + \pi r \mu k_d \rho g l^2 \right) dl = \pi r \mu K \rho g h^3 \quad (14)$$

となる。

ここで、式(1)の MgH が式(14)と式(11)との和に等しいと置き、

$$MgH = \pi r \mu K \rho g h^3 + \delta g \pi r^2 h \quad (15)$$

が得られる。式(15)を書き直して、

$$h^3 + \left(\frac{\delta r}{\mu K \rho} \right) h + \left(-\frac{MH}{\pi r \mu K \rho} \right) = 0 \quad (16)$$

なる三次方程式となる。式(16)を解いて、

$$h = \left\{ \frac{1}{2} \frac{MH}{\pi r \mu K \rho} + \left[\left(\frac{1}{2} \frac{MH}{\pi r \mu K \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \frac{\delta r}{\mu K \rho} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{1}{2} \frac{MH}{\pi r \mu K \rho} - \left[\left(\frac{1}{2} \frac{MH}{\pi r \mu K \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \frac{\delta r}{\mu K \rho} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} \quad (17)$$

が得られる。式(17)において $\delta \rightarrow 0$ とすれば、

$$h = \left(\frac{1}{\pi r \mu K \rho} MH \right)^{1/3} \quad (18)$$

となり、式(18)は先端抵抗を考慮しない場合に相当する。ここで M を一定にすれば、式(18)は

$$h = \left(\frac{M}{\pi r \mu K \rho} H \right)^{1/3} \equiv \alpha_1 H^{1/3} \quad (19)$$

となる。ただし、

$$\alpha_1 = \left(\frac{M}{\pi r \mu K \rho} \right)^{1/3} \quad (20)$$

である。また、 H を一定とすれば式(18)は、

$$h = \left(\frac{H}{\pi r \mu K \rho} M \right)^{1/3} \equiv \alpha_2 M^{1/3} \quad (21)$$

となる。ただし、

$$\alpha_2 = \left(\frac{H}{\pi r \mu K \rho} \right)^{1/3} \quad (22)$$

である。

4. 検 討

前報⁴⁾では、棒の側面と先端の両抵抗において、先端抵抗を無視したが、本報では仮定1)のように先端抵抗をも考慮した。

仮定2)で、棒は錘の落下距離 H による衝撃により挿入するとしたが、実際には落下後の錘はそのまま棒上面に載って h まで挿入している。したがって、このような場合には錘の効果は MgH でなく、 $Mg(H+h)$ となるが、 $h \sim M$ 曲線 (Fig. 3) などから H が h よりかなり大きいことが知られるので、 MgH と近似的に置いた。

棒の挿入に対する先端抵抗は、先端の形や表面の滑らかさに支配されるだろうが、先端におけるエメリーペーパーのはりつけが $h \sim H$ 曲線に余り影響しない (Fig. 2 (a), (c), Fig. 4)。したがって、先端抵抗を無視してよいならば、式(17)の代わりに式(18)、(19)、(21)が用いられよう。式(19)、(21)から h はそれぞれ $H^{1/3}$ 、 $M^{1/3}$ に比例することが知られるが、ここで $h \sim H^{1/3}$ 曲線、 $h \sim M^{1/3}$ 曲線が直線になることを確認する代わりに、Fig. 2, 3 から読み取った値を用いて $h/H^{1/3}$ 、 $h/M^{1/3}$ の値を求めると、 $h/M^{1/3}$ より $h/H^{1/3}$ の方が一定になる傾向が見られた。スチレン樹脂球、ガラス粒についての一例を示す (Table I, II)。この $h/H^{1/3}$ (式(19)の α_1)、 $h/M^{1/3}$ (式(21)の α_2) が一定になる傾向は顕著ではなく、 H 、 M に依存性があるようである。これは落下距離 H と挿入深さ h との相対関係、摩擦係数やランキン係数などに対する取り扱い、方程式を誘導するまでの諸仮定によると考えられるが、更に討議を必要としよう。

湯浅らの測定³⁾では、棒が 180g、錘が 90, 200, 315, 405, 515g であり、一方、以上の考察では棒自身の重さは錘より小さい (仮

Table I. Values of $h/H^{1/3}$. Beads of styrene resin, $d=0.359\text{mm}$.

$H(\text{cm})$ $M(\text{g})$	10	20	30	40	50
200	1.3	1.2	1.1	1.2	1.1
315	1.7	1.8	1.7	1.6	1.6
406	2.0	2.1	2.1	2.1	1.9
515	2.5	2.7	2.6	2.4	2.3

Table II. Values of $h/H^{1/3}$. Glass beads, $d=0.180\text{mm}$.

$H(\text{cm})$ $M(\text{g})$	10	20	30	40	50
200	0.5	0.7	0.6	0.6	0.7
315	1.0	1.0	1.0	1.1	1.1
406	1.3	1.3	1.4	1.3	1.4
515	1.5	1.5	1.6	1.8	1.7

Table III. Values of $h/M^{1/3}$. Beads of styrene resin, $d=0.359\text{mm}$.

$M(\text{g})$ $H(\text{cm})$	200	315	406	515
10	0.5	0.5	0.6	0.7
20	0.5	0.7	0.8	0.9
30	0.6	0.8	0.9	1.0
40	0.7	0.8	1.0	1.0
50	0.7	0.9	1.0	1.1

Table IV. Values of $h/M^{1/3}$. Glass beads, $d=0.180\text{mm}$.

$M(\text{g})$ $H(\text{cm})$	200	315	406	515
10	0.2	0.3	0.4	0.4
20	0.3	0.4	0.5	0.5
30	0.4	0.5	0.6	0.6
40	0.4	0.6	0.6	0.8
50	0.4	0.6	0.7	0.9

定3)としているので, 90g の場合の $h/H^{1/3}$ には触れていない (Table I, II). 仮定4)で棒は常に鉛直であるとしたが, 棒が粉体層内に鉛直挿入している場合だけの測定値を採用しているからである.

5. あとがき

錘を所定の高さから棒に落下させて, 棒が粉体層へ挿入する場

合について方程式を導き, 挿入深さ h と錘, および錘の落下距離 H との関係として式(7), (8)を得た. 更に, 錘を一定にした場合に式(9), 落下距離 H を一定にした場合に式(10)が得られた.

一般に, 棒を粉体層へ挿入する場合, 粉体表面が水平状態でなく, 盛り上がり, 落ち窪みなどを示すが, そのような影響が顕著でない場合を対象にした.

粉体の充填には疎密があるので (本報の測定は疎充填), 疎充填, 密充填の場合の理論的解析を要する. 更に, (a)動的・静的の両状態を表現するランキン係数として式(7)を用いたこと. (b)粉体の密度, 圧力などを一定として取り扱ったこと (実際には粉体のいたる所でこれらの値は一定ではない) などについて考察が必要であろう.

(1985年10月10日, 第33回レオロジー討論会(米沢)にて発表)

使用記号

- ρ 密度 $[\text{g}/\text{cm}^3]$
- k ランキン係数 $[-]$
- k_s ランキン係数 (静的) $[-]$
- k_d ランキン係数 (動的) $[-]$
- R 容器半径 $[\text{cm}]$
- μ_w 容器壁面摩擦係数 $[-]$
- μ 棒の側面摩擦係数 $[-]$
- r 棒の半径 $[\text{cm}]$
- d 粉体粒子直径 $[\text{mm}]$
- h_0 挿入前深さ $[\text{cm}]$
- h_d 挿入後深さ $[\text{cm}]$
- h 挿入深さ $h=h_d-h_0$ $[\text{cm}]$
- H 落下距離 $[\text{cm}]$
- l 挿入中深さ $[\text{cm}]$
- ξ 挿入中任意深さ $[\text{cm}]$
- M 錘質量 $[\text{g}]$
- g 重力加速度 $[\text{cm}/\text{sec}^2]$
- δ 棒先端抵抗係数 $[-]$
- ϕ 粉体内部摩擦角 $[\text{deg}]$

文 献

- 1) 同志社大学工学部粉体工学研究室, 粉体と工業, **4**, 48 (1981).
- 2) 沢路雅夫, 松井滋樹, 木谷英章, 昭和52年度秋期粉体工学研究会例会講演要旨集, 18 (1977).
- 3) 山城光雄, 湯浅泰伸, 第25回材料研究連合講演会要旨集, 69 (1981).
- 4) 高見 昭, 日本レオロジー学会誌, **11**, 95 (1983).
- 5) Yamashiro, M., and Y. Yuasa, *Powder Technol.*, **43**, 55 (1985).
- 6) Janssen, H.A., *V.D.I.*, **39**, 1045 (1895).