学会受賞講演

Flow of Non-Newtonian Fluids

by

Yukio TOMITA

Faculty of Science and Technology, Science University of
Tokyo, 2641 Yamazaki, Noda, Chiba 278

非ニュートン流体の流動

富田 幸雄*

(原稿受理：1987年9月3日)

1. はじめに

以前に本学会誌の巻頭言¹⁾で述べたように、筆者が研究らしきことを始めたのは1951年からであり、最初は相似則を利用した浅底水流による高速気流の研究であった。研究テーマをレオロジー関係に変えたのは1957年頃で、それもレオロジーのことは何も知らないで闇雲に始めたという状態であった。それから30年、レオロジー関係の他、種々の流体力学に関する研究も行ってきたが、筆者の能力不足が原因して、研究期間の最も長いレオロジー関係についてもまとまった成果は挙げられなかったと思う。それが今回、はからずも受賞の榮に浴したのは、優れた先輩、共同研究者の賜物によること極めて大きく、心より感謝申し上げる。以下に筆者の行ってきたレオロジーに関する研究の概要を述べる。

2. 非ニュートン粘性流体の流れ

1955年当時は非ニュートン流体の流れの相似則については、まだ余り組織的な研究が進んでいなかった。伊藤四郎氏（現東京工業大学名誉教授）は、Bingham 流体の流れの研究²⁾において、見掛け相似の法則という興味ある提案を行った。自由表面のない幾何学的に相似な境界のまわりの Bingham 流体の二つの流れが相似になるためには、

$$Re = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} : \text{Reynolds 数}, N_B = \frac{\text{降伏力}}{\text{粘性力}} : \text{Bingham 数}$$

なる二つの無次元数が、それぞれ同時に等しくなればよい。しかし、このようにすると実験の手数が多くなり、かつ一般的に見通しが悪くなる。そこで伊藤はこれを、

$$Re^* = \frac{\text{単位時間に一定の境界内に入る全運動エネルギーの代表量}}{\text{単位時間に失われるエネルギーの代表量}}$$

という一つの無次元数によって、工学的に重要な管内流れの圧力損失や攪拌動力の問題を処理するという、いわゆる見掛け相似の法則を提案した。筆者はこの問題に興味を持ち、異なった角度から検討した結果、管内流れにおいては、層流、乱流を通じて圧力損失を一つの無次元数で整理するという見掛け相似の法則は、厳密な意味での成立が困難であることを示した³⁾。さらに速度分布の考察から、伊藤と同一の無次元数 Re^* および管摩擦係数を導いた。伊藤が示したように、この両者の関係は近似的にニュートン流体のそれらの関係と同一になる。また、乱流における摩擦損失を混合距離理論を用いて解析した結果、ニュートン流体における Kármán-Prandtl の式と同形の式を得た³⁾。

さて工学的に重要な流れの場の解析に対しては、三次元構成方程式が必要である。単純な流動における純粘性非ニュートン流体の構成方程式は、いくつか提案されているが、工学的には実験結果をかなり良く表現できれば、若干の矛盾があっても、解析的に処理し易い式が望ましい。そこで最も簡単な2個の物質定数を含むべき乗則モデルを取り上げ、これを三次元化してべき乗則流体の運動方程式を導いた⁴⁾。この方程式は、べき指数 $n=1$ と置けば、ニュートン流体に対する Navier-Stokes の方程式となるが、かなり複雑なので一般的には解析的に処理し難い。そこで実用的に重要と考えられる慣性項が無視できる遅い流れに対して、粘性による散逸エネルギーを最小にする速度分布は運動方程式を満足する、という変分原理が成立することを示した。そして球の抗力の近似式を求めた⁴⁾。この変分原理は、もっと一般的な形をもつ非ニュートン流体に拡張され、散逸エネルギー最小という解釈は、べき乗則流体以外の純粘性非ニュートン流体に対しては成立しないことが示されている^{5,6)}。さらに球の抗力についても、より精密な解が多くの人々によって得られている。Bingham 流体に対する変分原理は吉岡⁷⁾によって示され、この場合の球の抗力も求められている。

* 東京理科大学理工学部 〒278 野田市山崎2641

べき乗則流体および Bingham 流体の管内流熱伝達の解析および実験は、平井^{8,9)}によって行われたが、一般的には、これらの流体に対する熱伝達の相似則は確立されているとは言えなかった。そこで筆者は基礎方程式系を無次元化することによって、べき乗則流体と Bingham 流体に対する熱伝達の相似則を誘導した¹⁰⁾。また、細管粘度計などに関連して重要となる助走区間の流れ¹¹⁾、および鋭いかどの入口を持つ場合におけるクリープ流れの入口損失¹²⁾について解析した。前者は壁面に沿って発達する境界層流れに対して運動量積分方程式を適用して、助走区間の長さおよび圧力損失を解析的に求めた。後者は入口部分の流れを二つの領域に分けて、それぞれの部分における速度分布を適当に仮定し散逸エネルギーを計算して入口損失を近似的に求めた。

さてニュートン流体の速い流れ、すなわち Reynolds 数の大きい流れの解析には、境界層理論が大きな力を持っている。筆者はべき乗則流体の流れにも Reynolds 数が大きければ境界層論的取り扱いが可能であることを示し、かつ境界層厚さのオーダーを表す式を提示した。さらに変分的手法を用いて、円管内助走区間の流れを境界層論的取り扱いにより解析した¹³⁾。ほぼ同時期にべき乗則流体の速い流れに対して Schowalter¹⁴⁾ が相似解の存在条件を明らかにし、Acrivos ら¹⁵⁾ が平板に沿う境界層流れを解析して摩擦抗力を求めている。ところで、非ニュートン流体の輸送に際して使用される遠心ポンプその他の回転機器において、その動力推定に回転円板の摩擦抵抗を知ることが必要である。そこで筆者は、回転円板まわりに生じる境界層がそれぞれ層流、乱流の場合について解析し、摩擦抵抗を求めた¹⁶⁾。

3. 粘弾性流体の流れ

3・1 高分子融液および濃厚溶液の流れ

1951年頃から高分子融液の粘弾性的流動を研究していた荒井定吉氏（現慶応義塾大学名誉教授）と筆者とは、研究室が近かったのでお互いによく研究の話をしたが、氏の研究の中で円管押出法における管長補正¹⁷⁾に興味を持ち、これに関連した研究¹⁸⁾を発表した。これが筆者の粘弾性流体の流動に関する最初の研究である。粘性の大きい粘弾性流体が容器から短い細管に流入する場合、助走区間は極めて短く、管内で失われる圧力損失に比較して管入口の付加的な圧力降下が無視できなくなり、管長の補正をしなければならなくなる。この管長補正係数は大きい値を持つ上に、見掛けずり速度の増加関数になることが Bagley¹⁹⁾、荒井ら¹⁷⁾によって詳細に実験的に調べられ、補正係数を実験的に求める方法も提示されている。筆者はこの問題を組合せモデル（弾性論から得られる応力とひずみの関係と、非ニュートン粘性に関するべき乗則を組合せた力学的モデル）を用いて、以前に行ったと同様なエネルギー論的手法で解析を行い、補正係数が見掛けずり速度の関数として表される近似式を導いた。

1959年頃からウィスコンシン大学の R.B. Bird 教授と文通があり、その後 Bird 教授が京都大学および名古屋大学にフルブライト交換教授として来日されている間、何度かお会いし留学したい希望を伝えた。その結果、1963年9月から1年間 Bird 教授のところで研究することになった。この当時、Bird 教授の研究室には多くの大学院生がおり、工学上重要な流れ場の解析、純粘性流体および粘弾性流体の現象論的な構成方程式の誘導ならびにそれらの検証のための解析、実験を行っていた。また J.D. Ferry 教

授の研究室のメンバー、その他のレオロジー研究者らとかなりひんぱんに研究発表会を開催していた。筆者の仕事は主として解析的研究であったが、Bird 教授はほとんど何も束縛せず、かなり自分勝手なことをやらせて戴き感謝すると共に申訳なく思っている。しかしこの1年間は、多くのレオロジー研究者と会うことができ非常に有意義であった。帰国後、留学中の研究結果を整理して発表した。その一つは粘弾性流体の円管内層流助走区間の流れの問題である。すなわち、この流れを組合せモデルを用いて解析し、圧力損失に及ぼす弾性の効果を近似的に明らかにした²⁰⁾。

ところで1963年頃から、東京都立大学工学部の加藤宏氏（現東京都立大学教授）が粘弾性流体の研究に来ておられた。そこで Maxwell & Scalora²¹⁾によって開発された法線応力効果を利用する粘弾性ポンプ（あるいはねじなし押出機）の性能解析を研究対象として取り上げ、これを解析的、実験的に詳細に調べた^{22,23)}。ただしこのポンプ（押出機）は、狭い隙間の中で流体をずり流動させるので混練効果は極めて良いが、法線応力効果を利用するため押出圧力は低く、実用上は普通の押出機と併用するのが良いかも知れない。

1965年頃より大学院生が急激に増加し、筆者らの研究室にもレオロジー関係で、小林東和君（現三菱レイヨン株式会社中央研究所）、長谷川富市君（現新潟大学教授）、白樫正高君（現長岡技術科学大学助教授）らが在学していた。1962年 Sakiadis²⁴⁾は、円管内流動を利用して第1および第2法線応力差を求める興味ある方法を発表した。彼はポリビニールアルコール水溶液を用いて実験を行ったが、その結果は第2法線応力差の値が第1法線応力差の値の約70%という、他の研究者の結果には見られない大きな値となっており、White²⁵⁾が指摘しているようにこの結果にはかなり疑問がある。そこで小林と共にこの問題を調べて見ることにした²⁶⁾。まず法線応力差を求める際に必要となる境界条件、および管より流出するジェットの挙動が、法線応力差に及ぼす影響を解析的に検討し、次いでヒドロキシエチルセルロース（HEC-WP 4400）の3%水溶液を用いて実験を行った。それらの結果として、Sakiadisの方法では第2法線応力差を求めることができないこと、並びに第1法線応力差の値は管出口の圧力に大きく依存することを明らかにした。さらに管出口付近の圧力は、流量のある値のところで極大値を持ち、それより流量が増加すると逆に圧力が低下するという異常現象を見いだした。一方、これまで粘弾性流体の助走区間に関する実験的研究はほとんど行われていなかったもので、小林と共に助走区間内における圧力降下を実験的に検討することにした²⁷⁾。使用流体はニュートン流体としてタービン油、純粘性非ニュートン流体としてポリエチレンオキシド（PEO）2%水溶液、粘弾性流体として HEC-WP4400 の1.8%水溶液および Guar Gum 1.8%水溶液を用いた。PEO 水溶液は一般的に粘弾性流体であるが、高いずり速度を繰り返して受けると性質が変化し、粘度が著しく減少すると共に法線応力効果は全く失われる。そこで測定を開始する前に PEO 水溶液を長時間循環し、性状が安定した状態で実験した。ところで Metzner ら²⁸⁾によって、構成方程式を仮定せず応力成分で境界層方程式を表す方法が提案されているが、これを用いて助走区間内の流れを非ニュートン粘性および法線応力効果を考慮して解析した。実験的に得られた助走区間における圧力降下を解析結果と比較すると、ニュートン流体、純粘性非ニュートン流体両者はよく一致する。しかし粘弾性流体で

は、法線応力効果を考慮した解析結果でも実験値よりは小さい。そこでさらに比較的簡単な微分形構成方程式に、記憶効果を表すパラメータを導入したモデルを用いて解析した。その解析結果は HEC 水溶液の実験値と一致したが、Guar Gum 水溶液に対しては一致させることができなかった。Guar Gum 水溶液のように記憶効果の強い流体では、円管入口までの圧力降下が大きくなり、容器内での流体の挙動を考慮しなければならない。また助走区間内の流れのように、Reynolds 数が高く Lagrange 的に非定常性の強い粘弾性流体の流動の解析に対しては、構成方程式として積分形の方程式を用いる必要があるのかも知れない。

さて上述の助走区間内の流れなどと異なって、一般に高分子融液や濃厚溶液の工業上重要な流れは、Reynolds 数の小さい遅い流れである場合が多い。工学的にはこのような場合の流れの解析に便利な構成方程式を検討する必要がある。Langlois & Rivlin²⁹⁾は Rivlin-Ericksen モデルを用いてくさび形流路内のクリープ流れを解析した。その結果、純粘性非ニュートン流体の狭まり流れにおける流線は、頂点に向う放射線となるが、粘弾性流体の場合は、頂点付近で循環二次流れの生ずることを明らかにしている。また Kaloni³⁰⁾も 6 定数 Oldroyd モデルを用いて解析し、同様に二次流れの生ずることを示している。小林と筆者³¹⁾は、工学的に便利な構成方程式として Denn モデルを取り上げ、これを用いてくさび形流路内のクリープ流れを解析し、一般的には放射状流れが存在し得ないことを示した。しかし十分遅い流れで、かつ頂点の極めて近くを除けば、近似的に放射状流れで近似できるとして、摂動法を用いて流れの状態を調べた。Adams ら³²⁾は、ポリスチレンの 12% Aroclor 溶液を用いて、くさび形流路内の応力状態を流動複屈折の方法を用いて実験的に求め、Coleman-Noll モデルによる解析結果と比較している。小林らの結果は Coleman-Noll モデルによる結果よりもやや実験値との一致が良いようである。

3・2 不安定現象

高分子融液や濃厚溶液を細管から押し出す場合、あるずり速度以上になると、それまで滑らかに流出していた噴流が、その表面に波形を生じ形状も不規則になる不安定現象が生じる。この現象は一般的に melt fracture³³⁾と呼ばれているが、不安定現象と呼ぶ方が適切のように思われる。この不安定現象の発生は成形品の機械的強度を低下させるので、その発生臨界ずり速度以下で成形加工を行うことが必要である。このために生産量が制約されることになり、工業的に重要な問題となっている。そこでこの現象を解明するため多くの研究が行われているが、現在までのところ未だ不明の点が多い。筆者ら³⁴⁾は、高密度ポリエチレンおよびポリプロピレンを用いて不安定現象の実験を行い、二つの無次元数によってこの現象を近似的に捉えることができることを示した。しかし、高分子融液によるよりも高分子濃厚溶液による実験の方が容易であり、測定の精確さも期待でき、かつ流れの可視化が簡単であるなどの利点を有するので、筆者ら³⁵⁾は PEO 水溶液を用いて不安定現象の詳細な実験的研究を行った。そして次元解析的考察より、不安定現象を支配するパラメータとして Denn モデルを用いた場合、Reynolds 数、Weissenberg 数、Deborah 数、幾何学的因子、二つの物質定数（べき指数）の 6 個の無次元数により実験結果を整理し得ることを示し、これより不安定現象の発生点を求める実験式を提示した。この不安定現象、すなわち細管出口から不規則な流動を示す現象を、一次不安定現象と呼ぶことに

する。ところでこの一次不安定現象の発生臨界ずり速度の 10 倍位のずり速度になると、細管出口で Barus 効果を示さずば管内径と等しい太さで流出し、出口からある距離においてふくらみ、かつ一次不安定のように不規則な流れとなる。そして概略的に言えば、この距離は時間と共に周期的に変化する。このような不安定現象を二次不安定現象と名付ける。筆者ら³⁶⁾は PEO 2.0, 2.5% 水溶液およびポリアクリルアミド (SEP) 3.5, 4.0% 水溶液を用いて二次不安定現象に関する実験を行い、出口からふくらむまでの距離の変化と管入口付近の圧力変動の間には、強い相関があることを明らかにしている。また進邦ら³⁷⁾は、管出口付近の流速分布が、十分に発達した定常流の流速分布と非常に異なることを、トレーサ法を用いて実験的に明らかにした。そして管出口付近の圧力が流量増加に対して極大値を持つことを、この流速分布の測定値を表す実験式と Denn モデルを用いて解析的に明確に示した。

3・3 希薄高分子溶液の流れ

3・3・1 抗力の低減 Toms³⁸⁾は 1948 年 オランダで開催された第 1 回国際レオロジー会議において、ポリメタクリル酸メチル・モノクロールベンゼン溶液の管内流における乱流摩擦損失が、溶媒であるモノクロールベンゼンのそれより低減するという結果を発表した。これが希薄高分子溶液において乱流摩擦抵抗が減少するという現象の最初の研究報告と言われ、以後この異常現象を Toms 効果と呼んでいる。1963 年、第 4 回国際レオロジー会議で Fabula³⁹⁾が 11~600ppm の希薄なポリエチレンオキシド水溶液を用いて円管内乱流の実験を行い、管摩擦損失が著しく減少することを発表した。このように少量の水溶性添加物により、摩擦抗力の著しい減少が得られるという事実は多くの流体工学者の注目を浴び、以後多数の研究者によって実験が行われるようになった。この当時（1963~1964 年）、在米していた筆者はこの問題に興味を持ち理論的な考察を行い、その結果を Bird 教授主催のセミナーで発表した。一般に乱流においては、流体粒子の混合運動が生じるため運動量輸送による Reynolds 応力、すなわち乱流粘性が分子粘性に加わるため、摩擦損失が層流の場合より大きくなる。しかし希薄高分子溶液では、法線応力効果のため流体粒子の混合運動が制約を受け、その結果 Reynolds 応力が減少し、摩擦抗力が低減するという考え方である。希薄高分子溶液のレオロジー的挙動を表す構成方程式として、組合せモデルを用いての上述の考え方に基づく円管内乱流に対する摩擦抗力の解析結果は、ニュートン流体に対する Kármán-Prandtl の式と、純粘性非ニュートン流体に対する Dodge-Metzner の式を特別の場合として含んでいる⁴⁰⁾。その後、長谷川と共に HEC 水溶液を用いて種々の管径を持つ管路に対して Reynolds 数、ずり速度を広範囲に変化させて Toms 効果の実験を行った。その実験結果は、上述の解析的取り扱いを少し改良した結果によって良く整理できることを明らかにした⁴¹⁾。ところで多くの研究者による、希薄高分子溶液の層流から乱流にかけての管摩擦係数の実験結果を大別すると、二つの形に分けられる。その一つは層流から乱流への移行過程がニュートン流体と同様であり、遷移領域における特異性はない形である。他の一つは、変った遷移現象で、濃度が比較的高い場合や管径が小さい場合に多く見られるようである。すなわち、Reynolds 数に対する管摩擦係数の線図において、Reynolds 数の増加と共に層流管摩擦係数を表す線から徐々に上方にずれる準備領域と見ら

れる領域を経て遷移が起こり、乱流に移行していく形である。

この後者の遷移過程について、長谷川ら⁴²⁾は詳細な実験を行った。すなわち、遷移過程における管摩擦損失を精度良く測定すると共に、細管より流出する噴流形状が、Reynolds 数の増加に対して、ニュートン流体の場合には見られない特異な形状を示すことを見いだした。そしてこの噴流形状の変化と圧力変動ならびに管摩擦損失の関連を調べ、それらの相関を明らかにした。これより噴流形状によって、遷移への移行過程を知ることができることを示した。また、準備領域における攪乱流を Denn モデルを用いて近似的に解析し、実験結果と一致する管摩擦係数の式を導いた⁴²⁾。この頃、大学院生として持丸義弘君（現東京工業大学助教授）が筆者らの研究室に入り、レオロジー関係の研究を行うことになった。そこで管内流から離れて、流体輸送に使用される遠心ポンプなどの動力低減に関連して重要となる、回転円板の乱流摩擦抵抗に関する Toms 効果を、境界層論的手法を用いて解析的に調べた⁴³⁾。

3・3・2 種々の流れの解析と計測 希薄高分子溶液の物体まわりの流れについて、いくつかの研究を持丸と共に行った。その一つは、層流から乱流への遷移過程の機構解明に重要となる、平板に沿う層流境界層の安定性の問題である。ニュートン流体については、Tollmien, Schlichting, Lin, Shen らにより線形安定理論を用いて中立安定曲線が計算され、その正しさが実験的に検証されている。そこで希薄高分子溶液の層流安定性を調べるために、構成方程式として Denn モデルを用い、微小攪乱の増幅、減衰を支配する線形方程式を導き、これより平板に沿う層流境界層に対する中立安定曲線を求めた。その結果、流体の弾性は流れを不安定化させ、非ニュートン粘性は流れを安定化させることを明らかにした⁴⁴⁾。次に希薄高分子溶液の一樣流中に置かれた円柱周りの二次元層流における速度場、温度場、強制対流熱伝達を解析的に調べた⁴⁵⁾。円柱周りの二次元流は各種の熱伝達や、速度測定に対する熱線流速計の使用の可否などに関連する基本的問題であるが、いままで余り研究されていないので調べてみることにした。解析は低 Reynolds 数、中程度の Reynolds 数および高 Reynolds 数の各場合について行った。その結果、抗力係数が溶媒のそれより増加してはく離を伴う流れでは、はく離点が後方に移動する。また、熱線流速計の場合のように比較的低 Reynolds 数では、熱伝達が減少するが、高 Reynolds 数の場合には余り大きな変化はないことなどが明らかになった。

さて、Toms 効果を示す希薄高分子溶液の流動の内部機構を明らかにするためには、流れの可視化、流速測定、速度変動の測定などが必要となる。ピトー管によって流速測定を行う場合には、ニュートン流体の場合と異なり、探子そう入の影響の大きいことが、Metzner ら⁴⁶⁾、その他によって定性的に予測されている。そこでこの問題を解析的、実験的に検討し、溶液の粘弾性的挙動がピトー管特性に与える影響を明らかにした⁴⁷⁾。ところで高分子濃厚溶液の法線応力差は、レオゴニオメーター、流動複屈折などの方法によって測定可能であるが、粘弾性挙動が著しくは現れない希薄高分子溶液の場合には、これらの方法は検出精度などの点で使用が困難となる。そこで円管より流出するジェットを利用するジェットスラスト法⁴⁸⁾などが使用されている。持丸ら^{49,50)}および長谷川⁵¹⁾は、流出ジェットの細管に及ぼす反力を利用する方法を用い、ppm オーダーの種々の希薄高分子溶液の第1法線応力差

の測定を可能にする新たな実験装置を開発し、その測定原理を明らかにすると共に、測定に際して生ずる問題点などを、実験的、解析的に詳細に調べた。一方、水素気泡法による流れの可視化を行う場合、細線の後流を詳細に知る必要がある。希薄高分子溶液中では、その粘弾性効果のため、後流特性が著しく変化することが指摘されている。そこでこの後流特性を解析的に調べ、水素気泡法を使用する際の問題点を解明している⁵²⁾。

4. おわりに

以上が非ニュートン流体の流動に関して筆者の行ってきた研究概要であるが、かなりばらばらで統一の見解がないように思われるかも知れない。しかし筆者としては、流動、攪拌、輸送、混合、伝熱、成形加工などに関連して、これまで主として経験的、定性的に処理されてきた非ニュートン流体の流れ挙動の解明に、レオロジ的、並びに流体力学的手法を取り入れて、これらに対して一貫した定量的方法を提供する、非ニュートン流体力学の確立を目的としたわけであるが、筆者の能力不足のためほとんど成果は挙げられなかった。しかし、レオロジーは学問分野として独立以来60年程度の歳月しか経ておらず、その上、対象物質が多岐にわたると共にそれらは極めて複雑な力学的挙動を示すため、手法確立にはまだかなりの時間がかかるかも知れない。今後は分子論的な基礎研究との融合をはかるなど、広い角度からの研究により、一日も早く有力な手法となるべき非ニュートン流体力学の確立されることを希望するものである。

文 献

- 1) 富田幸雄, 日本レオロジー学会誌, **14**, 1 (1986).
- 2) 伊藤四郎, “塑性流体の流れ”, 日刊工業 (1957).
- 3) 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **24-141**, 288 (1958); *Bull. JSME*, **2-5**, 10 (1959).
- 4) 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **25-149**, 17 (1959); *Bull. JSME*, **2-7**, 469 (1959).
- 5) Bird, R.B., *Phys. Fluids*, **3**, 539 (1960).
- 6) Johnson, M.W., *Phys. Fluids*, **3**, 871 (1960); *Trans. Soc. Rheol.*, **5**, 9 (1961).
- 7) 吉岡直哉, 足立毅太郎, 石村秀一, 化学工学, **35**(10), 1144 (1971).
- 8) 平井英二, 化学工学, **20**(8), 440 (1956).
- 9) 平井英二, 化学工学, **21**(1), 17 (1957).
- 10) 富田幸雄, 化学工学, **23**(2), 66 (1959).
- 11) 富田幸雄, 化学工学, **23**(8), 525 (1959).
- 12) 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **25-157**, 938 (1959).
- 13) 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **26-165**, 675 (1960); *Bull. JSME*, **4-13**, 77 (1961).
- 14) Schowalter, W.R., *AIChE J.*, **6**, 24 (1960).
- 15) Acrivos, A., M.J. Shah and E.E. Petersen, *AIChE J.*, **6**, 312 (1960).
- 16) 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **27-174**, 184 (1961); *Bull. JSME*, **4-16**, 671 (1961).
- 17) 荒井定吉, ゴム協会誌, **30**(12), 993 (1957).
- 18) 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **27-183**, 1700 (1961); *Bull. JSME*, **5-19**, 443 (1962).

- 19) Bagley, E.B., *J. Appl. Phys.*, **28**, 624 (1957).
- 20) 富田幸雄, 山根隆一郎, 日本機械学会論文集, **32-234**, 250 (1966); *Bull. JSME*, **9-36**, 730 (1966).
- 21) Maxwell, B. and A. Scalora, *Mod. Plast.*, **37**(2), 107 (1959).
- 22) 富田幸雄, 加藤 宏, 日本機械学会論文集, **32-241**, 1409 (1966); *Bull. JSME*, **10-39**, 507 (1967).
- 23) 加藤 宏, 日本機械学会論文集, **32-241**, 1409 (1966); *Bull. JSME*, **10-39**, 516 (1967).
- 24) Sakiadis, B.C., *AIChE J.*, **8**, 317 (1962).
- 25) White, J.L., *AIChE J.*, **9**, 559 (1963).
- 26) Tomita, Y. and T. Kobayashi, *Proc. 5th. Inter. Congr. Rheol.*, **4**, 365, Japan (1970).
- 27) 小林東和, 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **36-287**, 1109 (1970); *Bull. JSME*, **14-69**, 208 (1971).
- 28) Metzner, A.B. and J.L. White, *AIChE J.*, **11**, 324, 989 (1965).
- 29) Langlois, W.E. and R.S. Rivlin, Technical Report 3, Army Ordnance R & D Project TB2-0001, Brown University, Providence, R.I. (1959).
- 30) Kaloni, P.N., *J. Phys. Soc. Japan*, **20**, 132, 610 (1965).
- 31) 小林東和, 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **37-298**, 1187 (1971); *Bull. JSME*, **15-80**, 236 (1972).
- 32) Adams, E.B., J.C. Whitehead and D.C. Bogue, *AIChE J.*, **11**, 1026 (1965).
- 33) Tordella, J.P., *J. Appl. Phys.*, **27**, 454 (1956).
- 34) 富田幸雄, 土屋 健, 日本機械学会論文集, **29-198**, 245 (1963); *Bull. JSME*, **6-24**, 709 (1963).
- 35) Tomita, Y. and T. Shimbo, *Appl. Polym. Symp.*, **20**, 137 (1973).
- 36) Tomita, Y., T. Shimbo and Y. Ishibashi, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **5**, 497 (1979).
- 37) 進邦紀夫, 富田幸雄, 横山俊雄, 日本レオロジー学会誌, **11**, 142 (1983).
- 38) Toms, B.A., *Proc. Inter. Congr. Rheol.*, **II**, 135, North Holland Publ. Co., Amsterdam (1949).
- 39) Fabula, A.G., *4th Inter. Congr. Rheol.*, Brown Univ. (1963).
- 40) 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **32-234**, 242 (1966); *Bull. JSME*, **9-36**, 730 (1966).
- 41) 長谷川富市, 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **35-274**, 1277 (1969).
- 42) 長谷川富市, 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **39-321**, 1542 (1973); *Bull. JSME*, **17-103**, 73 (1974).
- 43) 持丸義弘, 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **38-310**, 1416 (1972); *Bull. JSME*, **16-92**, 291 (1973).
- 44) 持丸義弘, 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **39-319**, 869 (1973); *Bull. JSME*, **16-101**, 1683 (1973).
- 45) 持丸義弘, 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **40-329**, 217 (1974); *Bull. JSME*, **17-111**, 1172 (1974).
- 46) Metzner, A.B. and G. Astarita, *AIChE J.*, **13**, 550 (1967).
- 47) 持丸義弘, 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **40-332**, 1013 (1974); *Bull. JSME*, **17-114**, 1594 (1974).
- 48) Oliver, D.R., *Canad. J. Chem. Eng.*, **44**, 100 (1966).
- 49) 持丸義弘, 富田幸雄, 長谷川富市, 日本機械学会論文集, **42-354**, 564 (1976).
- 50) Tomita, Y. and Y. Mochimaru, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **7**, 237 (1980).
- 51) 長谷川富市, 日本機械学会論文集, **44-381**, 1606 (1978).
- 52) 持丸義弘, 富田幸雄, 日本機械学会論文集, **44-377**, 101 (1978); *Bull. JSME*, **21-159**, 1364 (1978).