論文

Laminar Flow and Pressure Loss of Power-Law Fluids in Pipes with an Axisymmetric Sudden Contraction

by

Motoyoshi TACHIBANA, Nobuyoshi KAWABATA, and Masaru SAKAMOTO

*Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,
Fukui University, Bunkyo 3-9-1, Fukui 910*

A steady laminar flow of an incompressible non-Newtonian fluid (inelastic power-law fluid; $n < 1$) in pipelines with an axisymmetric sudden contraction was studied by experiments on pressure drops and a theoretical analysis using the finite difference methods. The main results obtained are as follows:

- (1) The sudden contraction loss decreases with increase in Reynolds number. The effects of the power-law index and the diameter ratio are small in the laminar flow and within experimental error in the range of the present experiments.
- (2) The present numerical method based on Kawamura's finite difference scheme and curvilinear grid points developed by Thompson et al. is useful for the contraction pipe flow in the range of $10^2 \sim 10^3$ of Reynolds number.
- (3) The pressure at pipe wall has a minimum right after the sudden contraction section and through the recovery process, it becomes to decrease monotonously. In this monotonous region, the pressure under the same Reynolds number increases with decrease of the power-law index.
- (4) The pressure at pipe axis varies approximately as the pressure at pipe wall does. As Reynolds number becomes sufficiently small, the minimum right after the sudden contraction section disappears.
- (5) The velocity profile does not have a monotonous shape in the corner region of upstream side and in the separation region of downstream, and the maximum velocity at non-axial position appears in the downstream side of contraction pipe.
- (6) The vortex region in the corner of upstream side becomes larger with increase in Reynolds number. As Reynolds number becomes sufficiently large, the separation vortex region appears in the downstream side.

Key words: Power-law fluids / Laminar flow / Pressure drop / Axisymmetric sudden contraction / Velocity profile

指数則流体の円管急縮小部を通る層流と損失

立花 規良・川端 信義・坂本 勝*

(原稿受理: 1987年2月26日)

1. 緒言

円管路における急縮小部を通る流れは、流れが層流である場合には、細管粘度計や各種の加工機械における入口流れとして知ら

れ¹⁾、流れが十分に速い場合には、急拡大損失に関する Borda-Carnot の公式を準用するエネルギー損失問題のときに遭遇する^{2,3)}。現在までこの種の流れは、主に低レイノルズ数域における理論解析と高レイノルズ数域における実験により解明されてきた。従来の諸研究のうち、層流域における主要なものをまとめた

* 福井大学工学部機械工学科 〒910 福井市文京3-9-1

Table 1 Main investigations on laminar flow in pipes with an axisymmetric sudden contraction.

Author	Year	Fluid	Contraction Ratio $A=d_1/d_2$	Reynolds Number Re_2'	Theoretical	Experimental	Remarks
Astarita-Greco ⁴⁾	1969	Newtonian	2.49	20-1700		Pressure	
Astarita et al. ⁵⁾	1968	Power law (elastic)	2.49	1-300		Pressure	
Carter ⁶⁾	1969	Newtonian Power law	1.2-4.0 1.2-4.0	0.01-200 0.01-50	Streamline etc. Pressure etc.		Finite difference Finite difference
Burke-Berman ⁷⁾	1969	Newtonian	4.65	65-400		Velocity	Laser Doppler
Sylvester-Rosen ⁸⁾	1970	Newtonian Power law (elastic)	8.0 8.0	6-2000 0.3-2000		Pressure Pressure	
Kaye-Rosen ⁹⁾	1971	Newtonian	1.22-6.11	4-1000		Pressure	
Schmidt-Wimmer ¹⁰⁾	1971	Newtonian	2.0	50-1000	Velocity etc.		Finite difference
RamaMurthy-Boger ¹¹⁾	1971	Power law	2.0	20-1942		Velocity	Streak photography
Boger-RamaMurthy ¹²⁾	1972	Power law (elastic)	2.0	1-250		Velocity	Streak photography
Christiansen et al. ¹³⁾	1972	Newtonian	1.05-6.0	0.01-200	Velocity etc.		Finite difference
Seyer-Catania ¹⁴⁾	1972	Power law (elastic)	4.91, 5.81	100-2000		Pressure	
Vrentas-Duda ¹⁵⁾	1973	Newtonian	1.5-4.0	0-200	Streamline etc.		Finite difference
Duda-Vrentas ¹⁶⁾	1973	Powell-Eyring	1.5-4.0	0	Streamline etc.		Finite difference
Cable-Boger ¹⁷⁾	1978/79	Viscoelastic	2.0, 4.0	0.2-200		Flow pattern etc.	
Perera-Strauss ¹⁸⁾	1979	Oldroyd	4.0	24.8	Streamline etc.		Finite difference
RamaMurthy-McAdam ¹⁹⁾	1980	Newtonian Power law (elastic)	13.2 13.2	0.057-0.95 10^{-4} - 10^{-2}		Velocity etc. Velocity etc.	Laser Doppler Laser Doppler
Monnet et al. ²⁰⁾	1982	Newtonian	2.26	0.1-22		Flow pattern	
Kim et al. ²¹⁾	1983	Carreau	2.0-4.65	0-100	Velocity etc.		Finite element
Durst-Loy ²²⁾	1985	Newtonian	1.87	42-2294	Velocity etc.	Velocity etc.	Finite difference Laser Doppler
Tachibana et al.	Present	Power law	1.94, 4.06	100-2300	Pressure etc.	Pressure	Finite difference

のが、Table 1 である^{4~22)}。この表から、非ニュートン流体の円管急縮小部流れの解明が、ニュートン流体の場合に比べ遅れており、遅い流れ近似域（レイノルズ数 <1 ）を除くと、Carter による指数則流体⁶⁾と Kim らによる Carreau 流体²¹⁾の流れ場解析、Astarita ら⁵⁾、Sylvester-Rosen⁸⁾および Seyer-Catania¹⁴⁾による圧力降下、並びに Boger グループによる速度分布^{11,12)}および流れ模様¹⁷⁾に関する実験的研究が、主なものであることが見いだされる。さらに、流れを支配するレイノルズ数 Re の大きさについて考えると、解析 ($Re: \sim 10^2$) と実験 ($Re: \sim 10^3$) の間に隔たりが存在することが検出される。

そこで、直径比が 2 と 4 の二種類の円管路において、ニュートン流体と指数則流体の圧力降下実験を行い、流れ方向に沿う圧力分布を測定し、急縮小による損失が流れのレイノルズ数、流体の非ニュートン性および円管路の直径比により、どのような影響を受けるかを検討する。次いで、最近開発された高レイノルズ数流れの数値解析で有効な河村の差分近似法²³⁾を用いて、指数則流体の直径比 2 の円管急縮小部流れの数値解析を行い、圧力降下実験の結果と比較検討し、差分数値解の有効性を確認し、数値計算結果に基づき、流れ場に及ぼす流れのレイノルズ数と流体の非ニュートン性の影響を明らかにする。

Fig. 1 Arrangement of experimental apparatus.

2. 実 験

2・1 装置と方法

実験装置の概略を Fig. 1 に示した。供試液体は、主タンク⑦からねじポンプ①によりオーバーフロータンク②に汲み上げられ、一定液頭の下で、貯液槽③から試験円管路④を流れ、その流量を計量タンク⑤と台ばかり⑥で測定された後、主タンクに戻る。

Fig. 4 Coordinate system and contraction pipe flow.

面が同心的に急縮小する場合を考える。この流れ場を支配する運動方程式と連続方程式は、等温、軸対称、非旋回の流れを仮定すると、無次元形で次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{2}{Re} \left[F(\mathcal{A}) \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) + 2 \frac{\partial F(\mathcal{A})}{\partial R} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial F(\mathcal{A})}{\partial Z} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial R} \right) \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial T} + U \frac{\partial W}{\partial R} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{2}{Re} \left[F(\mathcal{A}) \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) + \frac{\partial F(\mathcal{A})}{\partial R} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial R} \right) + 2 \frac{\partial F(\mathcal{A})}{\partial Z} \cdot \frac{\partial W}{\partial Z} \right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU) + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (5)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{r}{r_1}, \quad Z = \frac{z}{r_1}, \quad T = \frac{t \cdot \bar{w}}{r_1} \\ U &= \frac{u}{\bar{w}}, \quad W = \frac{w}{\bar{w}}, \quad P = \frac{p}{\rho \bar{w}^2} \\ Re &= \frac{\rho \cdot (2r_1) \cdot \bar{w}}{\mu_n}, \quad F(\mathcal{A}) = \frac{\mu(\mathcal{A})}{\mu_n}, \quad \mu_n = m \left(\frac{\bar{w}}{r_1} \right)^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)の $\mu(\mathcal{A})$ は、指数則流体では

$$\mu(\mathcal{A}) = m \cdot \mathcal{A}^{\frac{n-1}{2}}, \quad \mathcal{A} = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] \quad (7)$$

である。圧力は、式(3)~(5)から構成されるポアソン方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} = & - \left[\left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{U}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right)^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial Z} \cdot \frac{\partial W}{\partial R} \right] \\ & + 4 \left[\frac{\partial F(\mathcal{A})}{\partial R} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) + \frac{\partial F(\mathcal{A})}{\partial Z} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 F(\mathcal{A})}{\partial R^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 F(\mathcal{A})}{\partial R \partial Z} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 F(\mathcal{A})}{\partial Z^2} \frac{\partial W}{\partial Z} \right] + E \quad (8) \\ E = & - \frac{\partial D}{\partial T}, \quad D = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU) + \frac{\partial W}{\partial Z} \end{aligned}$$

により決定した。ただし、式(8)の E は数値計算に伴う修正項で、式(5)より恒等的に零となる量であるが、誤差の集積を防ぐために、その一部を残すことにした。

基礎式(3)~(8)は、流れ場の対称性を考慮し、Fig. 4 のような領域において、境界条件

$$\left. \begin{aligned} \text{円管路入口断面 } Z=Z_1 \dots U=0, \quad \frac{\partial W}{\partial Z}=0, \quad P=P_{in} \\ \text{円管路出口断面 } Z=Z_2 \dots U=0, \quad \frac{\partial W}{\partial Z}=0, \quad P=P_{out} \\ \text{円管路軸上 } R=0 \dots U=0, \quad \frac{\partial W}{\partial R}=0, \quad \frac{\partial P}{\partial R}=0 \\ \text{円管路壁面上流側 } Z \leq 0, \quad R=R_1 \dots U=0, \quad W=0, \quad \frac{\partial P}{\partial N}=0 \\ \text{縮小部 } Z=0, \quad R_2 \leq R \leq R_1 \dots U=0, \quad W=0, \quad \frac{\partial P}{\partial N}=0 \\ \text{下流側 } Z \geq 0, \quad R=R_2 \dots U=0, \quad W=0, \quad \frac{\partial P}{\partial N}=0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし、 N は一般座標 $\eta = \text{const.}$ の線 (Fig. 5 参照) の垂直方向を示す。

のもとに、差分法により数値的に解いた。

数値計算に際しては、格子を円管路壁の境界付近で細かくとるため、一般座標

$$\xi = \xi(Z, R, T), \quad \eta = \eta(Z, R, T) \quad (10)$$

を導入した。さらに、本計算では座標系は時間に独立であるとするので、 Z と R は

$$Z = Z(\xi, \eta), \quad R = R(\xi, \eta) \quad (11)$$

と表現され、この関係に基づき、各種の導関数の変換を行った。

さらに、格子生成は Thompson らの方法²⁴⁾を応用した。本計算に用いた格子図を Fig. 5 に示した。格子の諸元は、

$$R_1 = 1.0, \quad R_2 = 0.5, \quad Z_1 = -3.0, \quad Z_2 = 5.0$$

$$\text{流れ方向格子数 } M_\xi = 78, \quad \text{半径方向格子数 } M_\eta = 38$$

である。ただし、流れ方向格子数のうち、壁上では $i=1 \sim 21$ は上流側、 $i=21 \sim 35$ は縮小部、 $i=35 \sim 78$ は下流側とした。数値計算の概略の流れ図を Fig. 6 に示した。なお、計算法の詳細は他に譲り、省略する²⁵⁾。

4. 結果と検討

供試円管路 (縮小管 No. 1) の流れ方向に沿う圧力分布の測定結果の一例を Fig. 7(a, b) に示した。Fig. 7 の (a) 図は全体図で、(b) 図は (a) 図の破線で囲まれた急縮小部付近の拡大図で、図中に数

Fig. 5 General coordinate system and curvilinear grid points.

Fig. 6 Procedure of calculation.

値解析領域を記入した。圧力分布は、一般に管摩擦による損失が存在する図中の直線で示されるようなものとなるが、急縮小部付近ではこの直線からの逸脱が生ずる。そこで、急縮小部から十分離れたところで、円管内流れの摩擦損失を評価し、この損失を考慮に入れて、急縮小部で急縮小損失を決定した。さらに、急縮小部付近での流れ場を数値解析し、実験結果と比較し、検討を加えた。

4・1 損失

Fig. 7の(a)図のように、供試円管路の急縮小部から十分離れたところの圧力分布直線から、直径 d 、長さ l の円管内流れ（平均流速 $\bar{w}$ ）における摩擦損失 H_f を評価し、摩擦係数 λ を

$$\lambda = \frac{H_f}{l \cdot \frac{\bar{w}^2}{2g}} \quad (12)$$

により算出し、レイノルズ数 Re'

(a) whole view

(b) part view

Fig. 7 Typical result of pressure distribution.

Fig. 8 Friction factor of power-law fluid.

$$Re' = \frac{8^{1-n}}{\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n} \cdot \frac{\rho \bar{w}^{2-n} d^n}{m} \quad (13)$$

に対し図示した。その一例が Fig. 8 で、このように実験結果は理論式と十分な精度で一致する。そこで、このような圧力分布直線を急縮小部まで延長し、Fig. 7の(a)図に示すように、急縮小損失 H_c を決定し、急縮小損失係数 ζ_c を

$$\zeta_c = \frac{H_c}{\frac{\bar{w}_2^2}{2g}} \quad (14)$$

Fig. 9 Sudden contraction factor of Newtonian fluid for $A=1.94$. Fig. 10 Sudden contraction factor of Newtonian fluid for $A=4.06$.

により算定し、下流側のレイノルズ数 Re_2'

$$Re_2' = \frac{8^{1-n}}{(3n+1)^n} \cdot \frac{\rho \bar{w}_2^2 d_2^n}{m} \quad (15)$$

に対し図示した。ニュートン流体の ζ_c と Re_2 の関係を、Fig. 9 (縮小管No 1) と Fig. 10 (縮小管No 2) に示した。 ζ_c は層流域では、 Re_2 の増加と共に減少し、 $Re_2=2500 \sim 3000$ の遷移域で急減し、乱流域では Re_2 の増加と共に、層流域より弱い Re_2 への依存性を示し、さらに十分に大きい Re_2 で、 Re_2 に独立な一定値をとるようになる。この傾向は、Seyer-Catania¹⁴⁾の実験結果と一致している。次に、領域を層流域に限定すると、実験結果はばらつきはあるが、

$$\zeta_c = \frac{\alpha}{Re_2^\beta} \quad (16)$$

と代表直線表示が可能で、 α と β を

縮小管No 1 $\alpha=4.365$, $\beta=0.0978$, $300 < Re_2 < 2000$

縮小管No 2 $\alpha=4.075$, $\beta=0.0922$, $200 < Re_2 < 2000$

と決定し、図中に併記した。この実験式によれば、同じ Re_2 の下で、縮小管No 1 ($A=2$) の ζ_c は、No 2 ($A=4$) の ζ_c より 3～4%大きい、実験結果のばらつきを考えると、 ζ_c に有意な差異が存在するとはみなしえない。これは、直径比が余り変えられていないためと思われる。次に、指数則流体の ζ_c と Re_2' の関係を Fig. 11 と Fig. 12 に示し、また図中にニュートン流体の実験式を併記した。これらの図より、 ζ_c への n の影響は小さく、今回の n の変化 ($n=0.92 \sim 0.68$) では、 n の効果は Re_2' の中に入めることができることがわかる。また、ニュートン流体の ζ_c を比

Fig. 11 Sudden contraction factor of power-law fluid for $A=1.94$. Fig. 12 Sudden contraction factor of power-law fluid for $A=4.06$.

べると、同一の相関式でほぼ表されることがわかる。

4・2 圧力分布

急縮小部の上流側と下流側の直径比が2 (実験1.94, 解析2.00) の円管路の壁面での圧力分布 ($P \sim Z$) の実験結果を, Fig. 13 (a, b, c) に図示し, それぞれの解析結果を実線で記入した。図

Fig. 13 Pressure distribution at pipe wall.

Fig. 14 Pressure distribution at pipe wall. Effect of power-law index.

中の Z の $0 \sim 0$ は, 急縮小部の R 方向変化 ($R_1 \rightarrow R_2$) を表し, P は上流側の値から下流側の値へ移行する。この図より, 解析結果は実験結果と満足すべき一致をみせることが見いだされる。Fig. 13 の(b)図の円管路急縮小部下流側 ($Z > 0$) における解析結果が

Fig. 15 Pressure distribution at pipe wall. Effect of Reynolds number.

Fig. 16 Pressure distribution at pipe axis. Effect of power-law index.

Fig. 17 Pressure distribution at pipe axis. Effect of Reynolds number.

Fig. 18 Development of velocity profile of power-law fluid. Effect of power-law index.

波打っているのは、 Re_2' が 2,420 と高く、流れが遷移域に入っているためと考えられる。このような比較から、本解析は満足すべき流れ場の解を与えているものと判定できる。

4.3 流れ場

円管路に直径比が 2 の急縮小部が存在するとき、急縮小部付近の流れ場の諸量がどのように変化するかを、数値例により検討する。壁面と軸上の圧力分布への流体の非ニュートン指数 n と流れのレイノルズ数 Re_2' の影響を図示したのが、Fig. 14~Fig. 17 である。これらの図より、(1)上流側での差はほとんどなく、下流側では急縮小部からある程度離れると、同一の Re_2' の場合は n の減少と共に、また同一の n の場合には Re_2' の増加と共に P は増加し、 $|dP/dZ|$ は小さくなる。(2)壁面での P は、急縮小部下流側に存在するはくり渦の影響を受けるため極小値を持つが、軸上での P は、 Re_2' が小さくなると極小値が消失し、単調に減少することが見いだされた。次に、速度分布の変化を示したのが、Fig. 18 と Fig. 19 である。速度分布は、 n の減少や Re_2' の増加と共により扁平となり、その状態を保持しながら変化しているのが

Fig. 19 Development of velocity profile of power-law fluid. Effect of Reynolds number.

わかる。また、下流側で速度分布に非軸最大点の存在が検出され、Fig. 18 のニュートン流体の結果は、Durst-Loy²²⁾の結果と、定性的によい一致をみせる。Fig. 20 は、等圧線図で急縮小部、特に突角部で圧力が急激に低下している様子がわかる。Fig. 21 は、流線図で上流側角部の渦域は Re_2' の増加と共に増大し、 Re_2' が十分大きくなると、下流側にはくり渦域が出現する。等渦度線図を Fig. 22 に示した。

5. 結 論

指数則流体の円管急縮小部を通る流れを、圧力降下実験と層流数値解析により調べ、次の結果を得た。

- (1) 急縮小損失は、レイノルズ数の増加と共に減少し、層流域における流体の非ニュートン指数 n や円管の直径比 A の効果は、本実験条件 ($n: 0.92 \sim 0.68$, $A: 4 \sim 2$) では小さく、これらによる差は実験結果のばらつきに含まれ、有意な差異は検出しない。
 - (2) 河村の差分スキムとトンプソンらの一般曲線座標格子に基づく本数値解析法は、レイノルズ数が $10^2 \sim 10^3$ の円管急縮小部流れの解析に有効である。
- さらに、数値計算の結果、以下のことが明らかになった。
- (3) 円管壁面の圧力は、急縮小部の直後で極小値を示し、以後、回復過程をへて単調な減少を示すようになり、この単調減少域では、圧力は同一レイノルズ数のもとで、流体の非ニュートン指数の減少と共に増大する。
 - (4) 円管軸上の圧力は、円管壁面の圧力と同じ傾向を示すが、レイノルズ数が小さくなると、急縮小部直後の極小値が消失し、上流から下流にわたる全域で、流れの進行と共に減少する。

Fig. 20 Equipressure lines of power-law fluid.

- (5) 速度分布は、急縮小部の前後の上流側角部と下流側はくり部で、単調な形状でなくなり、急縮小部以後に非軸最大速度が出現する。
- (6) 上流側角部の渦域は、レイノルズ数の増加と共に増大し、レ

Fig. 21 Stream lines of power-law fluid.

Fig. 22 Equivorticity lines of power-law fluid.

イノルズ数が十分大きくなると、下流側にはくり渦域が出現する。

おわりに、実験に協力された近藤正幸、東山彰良、小栗 学、竹中美志樹の諸君に謝意を示します。

(1986年10月30日、第34回レオロジー討論会において発表)

文 献

- 1) B.V. Boger, "Advances in Transport Processes", Vol. 2, A.S. Mujumdar and R.A. Mashelkar ed., (1982), Wiley Eastern Ltd., p. 43.
- 2) R.P. Benedict, "Fundamentals of Pipe Flow", (1980), John Wiley & Sons Inc., Chap. 10, p. 383.
- 3) A.J. Ward-Smith, "Internal Fluid Flow", (1980), Clarendon Press, Oxford, p. 373.
- 4) Astarita, G., and G. Greco, *I & EC Fund.*, **7**, 27 (1968).
- 5) Astarita, G., G. Greco, and L. Peluso, *I & EC Fund.*, **7**, 595 (1968).
- 6) T.R. Carter, "Laminar Fluid Flow from a Reservoir upto and through a Tube-Entrance Region", Ph. D. thesis, (1969), Univ. of Utah.
- 7) Burke, J.P., and N.S. Berman, *Paper 69-WA/FE-13*, (1969-11), ASME Winter Annual Meeting, Los Angeles.
- 8) Sylvester, N.D., and S.L. Rosen, *AIChEJ.*, **16**, 964, 967 (1970).
- 9) Kaye, S.E., and S.L. Rosen, *AIChEJ.*, **17**, 1269 (1971).
- 10) Schmidt, F.W., and K. Wimmer, *AIChEJ.*, **17**, 1248 (1971).
- 11) RamaMurthy, A.V., and D.V. Boger, *Trans. Soc. Rheol.*, **15**, 709 (1971).
- 12) Boger, D.V., and A.V. RamaMurthy, *Rheol. Acta*, **11**, 61 (1972).
- 13) Christiansen, E.B., S.J. Kelsey, and T.R. Carter, *AIChEJ.*, **18**, 372 (1972).
- 14) Seyer, F.A., and P.J. Catania, *Can. J. Chem. Eng.*, **50**, 31 (1972).
- 15) Vrentas, J.S., and J.L. Duda, *Appl. Sci. Res.*, **28**, 241 (1973).
- 16) Duda, J.L., and J.S. Vrentas, *Trans. Soc. Rheol.*, **17**, 89 (1973).
- 17) Cable, P.J., and D.V. Boger, *AIChEJ.*, **24**, 869 (1978); **24**, 992 (1978); **25**, 152 (1979).
- 18) Perera, M.G.N., and K. Strauss, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **5**, 269 (1979).
- 19) RamaMurthy, A.V., and J.C.H. McAdam, *J. Rheol.*, **24**, 167 (1980).
- 20) Monnet, P., C. Menard, and D. Sigli, *Appl. Sci. Res.*, **39**, 233 (1982).
- 21) Kim, M.E., R.A. Brown, and R.C. Armstrong, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **13**, 341 (1983).
- 22) Durst, F., and T. Loy, *Computers & Fluids*, **13**, 15 (1985).
- 23) Kawamura, T., and K. Kuwahara, *Paper AIAA-84-0340*, (1984-1), AIAA 22nd Acrospace Sciences Meeting, Reno.
- 24) Thompson, J.F., F.C. Thames, and C.W. Mastin, *NASA CR-2729* (1977).
- 25) 坂本 勝, "非ニュートン流体の円管内流れと急縮小損失", 修士論文, (1986), 福井大学.