論文

Analysis of Thermal Expansion Coefficients of Composites Reinforced with Plane-Randomly Oriented Discontinuous Carbon Fibers

Hogyu YOON and Kiyohisa TAKAHASHI

*Department of Materials Science and Engineering, Nagoya Institute of Technology,
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466, Japan*

Thermal expansion coefficients (TEC) of composites reinforced with orientation-distributed carbon fibers have been theoretically analyzed. A solution procedure is formulated according to Eshelby's equivalent inclusion method (E.I.M.) which takes into account the orientation distribution and the interaction of fibers. A procedure based on the lamination theory (L.T.) is also developed and compared with the E.I.M. TEC are calculated for carbon fiber and glass fiber composites with several types of fiber orientation distribution. The difference between the TEC predicted by the E.I.M. and the L.T. can be attributed to an interaction between fibers in the different laminae which was not considered in L.T. While the E.I.M. is consistent for glass fiber composites, a theoretical contradiction occurs for the prediction of the TEC of composites with orientation-distributed carbon fibers, when the volume fraction of fibers approaches to 100%. In a range of low fiber volume fraction, the difference between the predictions by the E.I.M. and by the L.T. is smaller for carbon fiber composites than for glass fiber composites. And the difference is small compared with errors expected in the measurements. Both of the E.I.M. and the L.T. may be used for the prediction of TEC of composites filled with orientation-distributed carbon fibers in the range of low fiber volume fraction less than about 40%.

Key words: Thermal Expansion Coefficient / Discontinuous Carbon Fiber / Plane-Random Orientation / Equivalent Inclusion Method / Lamination Theory

平面ランダム配向非連続炭素繊維複合材の熱膨張係数の解析

尹 昊 圭・高 橋 清 久*

(原稿受理：1990年1月10日)

1. 緒 言

炭素繊維複合材は軽量で高い剛性と強度をもち、耐疲労、耐摩耗性に優れ、熱および電気伝導性、X線透過性がよい点から航空宇宙機器、自動車部品、電気部品などに応用されている。特に、炭素繊維複合材は熱膨張係数が著しく小さい特長をもち、寸法安定性が要求される宇宙機器への用途が検討されている^{1),2)}。

複合材料の熱膨張係数は、Eshelby の等価介在物法³⁾を用いて解析できる^{4),5)}。Takahashi et al.⁴⁾ は等価介在物法を繊維の配向

分布と繊維間相互作用を考慮できるように拡張し、ガラス複合材の熱膨張係数を予測した。Takao⁶⁾ は同じく等価介在物法を用いて、複合材の熱膨張係数に及ぼす繊維配向の乱れの影響を考察した。しかし、複合材料の熱膨張係数に関するこれらの理論的研究は等方性繊維に関するものがほとんどである。強化繊維が弾性率および熱膨張係数に異方性をもつ場合に関する理論も報告されているが^{5),7)~9)}、繊維が一軸配向している複合材に限られる。

複合材料の熱膨張係数は積層理論を用いても解析できる。積層理論を用いて、Craft and Christensen¹⁰⁾ は等方性複合材料の2次元および3次元の熱膨張係数を予測し、Uemura et al.¹¹⁾ は斜交積層板の熱膨張係数及び残留応力を積層角の関数として導出し

* 名古屋工業大学材料工学科 〒466 名古屋市昭和区御器所町

た。

等価介在物法を用いた熱膨張係数の理論的研究では、炭素繊維が配向分布している場合には矛盾が生じることが知られている¹²⁾。これは炭素繊維の非常に大きい異方性のためと考えられるが、どの程度の誤差があるかを考察した報告はない。そこで、本報告では異方性の繊維が配向分布している場合の複合材の熱膨張係数を、Eshelby の等価介在物法および積層理論を用いて解析し、比較検討する。

本報告の解析は非連続炭素繊維複合材にも適用することを目的とする。種々の方向に配向した短繊維マットに樹脂を含浸した複合材料、及び短繊維を充填したナイロンや PBT などのペレットを射出、または押し出し成形する場合がこれに相当する。このため繊維形状を回転楕円体で近似し、強化繊維のアスペクト比、弾性率と熱膨張係数の異方性、配向分布および繊維間相互作用を考慮に入れた等価介在物法による計算手順を一般的な形に定式化する。比較のため積層理論による解析法も示す。数値計算では炭素繊維を横等方性と仮定し、一軸配向、斜交積層板、平面ランダムおよび平面内での配向の乱れの影響を検討する。最後に、配向分布している炭素繊維複合材料の熱膨張係数を予測するための、等価介在物法と積層理論の適用可能性について考察する。

2. 解 析

2・1 等価介在物法

本節の熱膨張係数解析では、繊維の配向分布と繊維間相互作用を考慮に入れた Takahashi et al.⁴⁾ の解析を基礎とし、繊維の異方性も考慮する。まず、等価介在物法について簡単に説明する。

無限大等方等質物体 D 中の一つの領域 V (これを等価介在物と呼ぶ) に、応力を伴わない eigen 歪 ϵ_{ij}^* が生じる場合を考える。 V はそのまわりの領域 ($D-V$, これをマトリックスと呼ぶ) によって自由な変形が拘束され、拘束歪 ϵ_{ij}^c が発生する。領域 V を Fig. 1 (a) のように楕円体と仮定すると、 ϵ_{ij}^c は V 中の位置によらず一定となり次式で与えられる³⁾。

$$\epsilon_{ij}^c = T_{ijkl} \epsilon_{kl}^* \quad (1)$$

ここで、 T_{ijkl} は Eshelby のテンソルと呼ばれ、強化繊維のアスペクト比 $\rho = c/a$ (Fig. 1 (a) 参照) とマトリックスのポアソン

Fig. 1 (a) Ellipsoidal inclusion.
(b) Transformation of coordinates.

比によって決まる定数である (付録参照)。以上は無有限大マトリックス中に 1 個の等価介在物が存在する場合であるが、有限の大きさをもつ物体中に多数の等価介在物が存在する場合は、自由表面の存在と介在物間相互作用によって付加的な弾性歪 ϵ_{ij}^m が発生する。

以上の関係を複合材の熱膨張係数の計算に適用する。強化繊維の熱膨張係数 α_{ij}^* 、マトリックスのそれを α とし、弾性率をそれぞれ C_{pqij}^* , C_{pqij} とする。まず、等価介在物 (弾性率、熱膨張係数はマトリックスと等しく、eigen 歪 ϵ_{ij}^* をもつ) について考える。等価介在物の全歪は ϵ_{ij}^* に起因する歪 ($\epsilon_{ij}^c + \epsilon_{ij}^m$) と温度上昇による熱膨張 $\alpha \Delta T \delta_{ij}$ の和となっている。ここで、 ΔT は温度変化、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。このうち、弾性歪は $(\epsilon_{ij}^c + \epsilon_{ij}^m - \epsilon_{ij}^*)$ であり、応力 σ_{pq} は $C_{pqij}(\epsilon_{ij}^c + \epsilon_{ij}^m - \epsilon_{ij}^*)$ である。

実際の強化繊維がこれと全く同じ応力と歪をもつならば、マトリックスとの界面における応力と変位の連続性を保ったまま、等価介在物と実際の強化繊維との置き換えが可能である。実際の強化繊維の全歪を等価介在物の全歪 ($\epsilon_{ij}^c + \epsilon_{ij}^m + \alpha \Delta T \delta_{ij}$) と等しくおく。このとき、実際の強化繊維の弾性歪は $(\epsilon_{ij}^c + \epsilon_{ij}^m + \alpha \Delta T \delta_{ij} - \alpha_{ij}^* \Delta T \delta_{ij})$ であり、応力は $C_{pqij}(\epsilon_{ij}^c + \epsilon_{ij}^m - (\alpha_{ij}^* - \alpha) \Delta T \delta_{ij})$ となる。したがって、

$$C_{pqij}(\epsilon_{ij}^c + \epsilon_{ij}^m - \epsilon_{ij}^*) = C_{pqij}(\epsilon_{ij}^c + \epsilon_{ij}^m - (\alpha_{ij}^* - \alpha) \Delta T \delta_{ij}) \quad (2)$$

が成り立てば、実際の強化繊維と等価介在物との置き換えが可能となる。歪 ϵ_{ij} 上の丸印は強化繊維の主軸と平行に設定した座標系における歪であることを示す。

強化繊維を等価介在物で置き換えた均質物体では、 ΔT の温度上昇によって $\alpha \Delta T \delta_{ij}$ だけ膨張し、さらに等価介在物の eigen 歪 ϵ_{ij}^* によって物体全体として $V_f \langle \epsilon_{ij}^* \rangle$ だけ歪む。ここで、 V_f は強化繊維の体積分率である。実際の複合材料は温度変化 ΔT によってこれと全く同じ変形を示すことになり、見かけの熱膨張係数 α_{ij}^{**} は

$$\alpha_{ij}^{**} = \alpha \delta_{ij} + V_f \langle \epsilon_{ij}^* \rangle / \Delta T \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 ϵ_{ij}^* は式(2)の解 ϵ_{ij}^* を試料中に固定した座標系 (x_1, x_2, x_3) (Fig. 1 (b)) に変換した歪を表し、 $\langle \rangle$ は試料中のすべての介在物に関する平均を意味する。

2・1・1 ϵ_{ij}^* の計算

以下の記述では、歪と応力を 6 行 1 列のベクトルで表示する。強化繊維の主軸と平行に設定した座標系 ($\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$) と、試料中に固定した座標系 (x_1, x_2, x_3) との関係を、Fig. 1 (b) を参照して次式で定義する。

$$\begin{cases} x_1 = \hat{x}_1 \cos \theta - \hat{x}_3 \sin \theta \\ x_2 = \hat{x}_2 \\ x_3 = \hat{x}_1 \sin \theta + \hat{x}_3 \cos \theta \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 \cos \theta + x_3 \sin \theta \\ \hat{x}_2 = x_2 \\ \hat{x}_3 = -x_1 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{cases} \quad (5)$$

この関係より、歪の座標変換マトリックス X_{ij} および Y_{ij}

$$\begin{cases} \epsilon_i = X_{ij} \epsilon_j \\ \sigma_i = Y_{ij} \sigma_j \end{cases} \quad (i, j = 1 \sim 6) \quad (6)$$

は次式で与えられる。

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 & \sin^2 \theta & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & 0 & \cos^2 \theta & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & 0 & \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$Y_{ij} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 & \sin^2 \theta & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & 0 & \cos^2 \theta & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta & 0 & -\sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

式(1)を式(2)に代入して e_{ij}^* について解く。その解を (6×1) のベクトルで表示すると、

$$e_i^* = D_{ij} e_j^m - E_{ij} Q_j \Delta T \quad (9)$$

と表すことができる。ここで、

$$\begin{cases} Q_j = C_{jk}^* (\alpha_k^* - \alpha) & j=1 \sim 3 \\ Q_j = 0 & j=4 \sim 6 \end{cases} \quad (10)$$

とおいた。式(9)を、式(6)を用いて試料中に固定した座標系に変換すると、

$$e_i^* = H_{ij} e_j^m - H'_{ij} Q_j \Delta T \quad (11)$$

を得る。ここで、

$$H_{ij} = Y_{ik} D_{kl} X_{lj}, \quad H'_{ij} = Y_{ik} E_{kj} \quad (12)$$

である。

一方、式(1)は座標変換により

$$e_i^c = M_{ij} e_j^m - M'_{ij} Q_j \Delta T \quad (13)$$

と表すことができる。ここで、

$$M_{ij} = Y_{ik} T_{kl} D_{lm} X_{mj}, \quad M'_{ij} = Y_{ik} T_{kl} E_{lj} \quad (14)$$

である。

e_i^* および e_i^c を求めるとき使う行列 H_{ij} , M_{ij} および H'_{ij} , M'_{ij} は充填材の配向角 θ の関数となっており、充填材が配向分布している場合には、 H_{ij} , M_{ij} , H'_{ij} および M'_{ij} を全ての充填材に関して平均した $\langle H_{ij} \rangle$ および $\langle M_{ij} \rangle$ 等を式(11), (13)に代入して $\langle e_{ij}^* \rangle$ および $\langle e_{ij}^c \rangle$ を計算する。平均値 $\langle H_{ij} \rangle$ および $\langle M_{ij} \rangle$ 等は、例えば充填材が $-\beta \leq \theta \leq \beta$ の範囲で一様分布している場合、

$$\langle H_{ij} \rangle = \frac{1}{2\beta} \int_{-\beta}^{\beta} H_{ij}(\theta) d\theta \quad (15)$$

$$\langle M_{ij} \rangle = \frac{1}{2\beta} \int_{-\beta}^{\beta} M_{ij}(\theta) d\theta \quad (16)$$

で与えられ、 $\langle H'_{ij} \rangle$ および $\langle M'_{ij} \rangle$ も同じ方法で計算できる。

2・1・2 e_i^m の計算

ここまでの計算では、 e_i^m は未知数のまま残っている。この e_i^m を試料中の場所によらず一様と仮定すると、均質物体では内部応力場だけによって生ずる弾性歪の平均値は、ゼロであることから次式が成り立つ。

$$(1 - V_f) e_i^m + V_f (\langle e_i^c \rangle - \langle e_i^* \rangle) = 0 \quad (17)$$

この式から

$$e_i^m = -V_f (\langle e_i^c \rangle - \langle e_i^* \rangle) \quad (18)$$

を得る。式(11), (13)の平均値を(18)に代入すると、

$$e_i^m = -V_f \{ \langle M_{ij} \rangle - \langle H_{ij} \rangle \} e_j^m - \{ \langle M'_{ij} \rangle - \langle H'_{ij} \rangle \} Q_j \Delta T \quad (19)$$

となり、ここでそれぞれ

$$\begin{cases} \langle M_{ij} \rangle - \langle H_{ij} \rangle = \langle N_{ij} \rangle \\ \langle M'_{ij} \rangle - \langle H'_{ij} \rangle = \langle N'_{ij} \rangle \end{cases} \quad (20)$$

とおくと、

$$e_i^m = -V_f (\langle N_{ij} \rangle e_j^m - \langle N'_{ij} \rangle Q_j \Delta T) \quad (21)$$

を得る。ここで、

$$\delta_{ij} + V_f \langle N_{ij} \rangle = \langle P_{ij} \rangle \quad (22)$$

とおくと、式(21)は

$$\langle P_{ij} \rangle e_j^m = V_f \langle N'_{ij} \rangle Q_j \Delta T \quad (23)$$

となり、結局

$$e_i^m = V_f \langle P_{ij} \rangle^{-1} \langle N'_{jk} \rangle Q_k \Delta T \quad (24)$$

を得る。この解を式(11)に代入して e_{ij}^* を求め、その平均値 $\langle e_{ij}^* \rangle$ を式(3)に代入すると、最終的に複合材料の熱膨張係数 α_{ij}^{**} が求められる。

2・2 積層理論

積層板を構成する各層（一方向炭素繊維複合材）は見かけ上横等方性であり、平面応力状態での歪-応力関係は次のように示される。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (25)$$

ここで、 S_{ij} はコンプライアンスであり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (26)$$

式(25)の歪-応力関係を応力について解くと、

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (27)$$

となる。繊維の主軸が試料中に固定した座標と傾いているとき、

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (28)$$

となる。ここで、 $\bar{Q}_{ij}$ は transformed reduced stiffness であり、種々の文献^{(13),(14)}に記述されている。

一方、温度変化をもつ場合の応力-歪関係は、

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = [\bar{Q}_{ij}] \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{pmatrix} \quad (29)$$

で与えられ、 N 層の一方方向 CFRP を中央面に関して対称に貼り合わせた場合の熱膨張係数は、式(9)を厚さ方向に積分した合力から得られる。対称積層板のそりはゼロであり、合力 N_i は

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{pmatrix} \epsilon_x & - & \alpha_x \Delta T \\ \epsilon_y & - & \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} & - & \alpha_{xy} \Delta T \end{pmatrix} dz \\ = [A_{ij}] \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{pmatrix} \Delta T (z_k - z_{k-1}) \quad (30)$$

で与えられる。ここで、 A_{ij} は $\bar{Q}_{ij}$ を厚さ方向に積分した extensional stiffness, z_k は中央面からの距離であり、添字 k は k 番目の層を表す。

対称積層板の歪は中央面の歪で代表され、合力はゼロになることから、

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = [A_{ij}]^{-1} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{pmatrix} \Delta T (z_k - z_{k-1}) \quad (31)$$

と表現できる。この歪が積層板の熱膨張係数を表す。

3. 数値計算例

3.1 一方方向複合材料

繊維が一軸配向している場合の等価介在物法による数値計算結果

Fig. 2 Thermal expansion coefficient of unidirectional carbon fiber composite as a function of volume fraction of carbon fiber. ● : experimental data by Bowles¹⁵⁾.

Table I. Properties of constituents.

	Young's modulus (GPa)		Shear modulus (GPa)	Poisson's ratio		Thermal expansion coefficient (10 ⁻⁶ /°C)	
	E_L	E_T	G_{LT}	ν_{LT}	ν_{TT}	α_L	α_T
carbon fiber	233	23	9	0.2	0.4	-0.54	10.08
epoxy	4.3		1.6	0.37		43.92	

果を Fig. 2 に示す。ただし、計算に用いた定数および実験データは Bowles¹⁵⁾ から引用し、Table I に示した。

アスペクト比が無尽大のとき、繊維方向の熱膨張係数 (α_L) は繊維方向の高い弾性率の影響を大きく受け、体積分率が40%以上になると、繊維自体の熱膨張係数とほぼ等しくなり、著しく低い値を示す。さらに、体積分率が60%以上になると、アスペクト比が20以上の場合、熱膨張係数はアスペクト比に依らずほぼ等しい値を示す。図中の黒丸は Bowles¹⁵⁾ の実験データであり、アスペクト比無限大の計算値とほぼ一致している。

以下の積層理論で用いる単層板 (一方方向 CFRP) の熱膨張係数と弾性率は等価介在物法から求めた。

3.2 斜交積層板^{11), 16)}

積層板表面が xy 面に平行であり、積層角が x 軸に対して $\pm \theta$ の斜交積層板 (Fig. 3 参照) に関して、 x 方向の熱膨張係数を積層角 θ の関数として Fig. 4 に表す。ただし、計算に用いた定数および実験データは、参考文献¹¹⁾を参照されたい。

積層理論から求めた熱膨張係数は積層角全範囲にわたって実験データと良く一致しているが、等価介在物法では同一のラミナの

Fig. 3 The angle-ply laminate and the definition of fiber orientation θ . The $\pm \theta$ laminae are stacked parallel to the xy plane.

Fig. 4 Thermal expansion coefficients, α_x , in an angle ply laminate as a function of helical winding angle θ . ○ : experimental data¹¹⁾.

中に $+\theta$ と $-\theta$ の層が含まれていると考えており、斜交積層板の実験データとはあまり良い一致はみられない。しかし、両方共にほぼ同様の傾向を示しており、特に $\theta=10\sim40^\circ$ で負の値を示していることに注意されたい。これは繊維自体の繊維軸方向の熱膨張係数が負であり、繊維が大きな異方性をもつためと考えられる。

3.3 平面ランダム配向

Fig. 5, 6 は、それぞれ積層理論及び等価介在物法から求めた平面ランダム配向積層板の熱膨張係数である。体積分率の増加によって熱膨張係数は減少している。アスペクト比1の場合を除いて、体積分率が高くなると、繊維自体の繊維軸方向の熱膨張係数に近い値を示している。これは横方向に比べ繊維軸方向の弾性率が著しく高いためと考えられる。アスペクト比による変化も、体積分率によって異なるが、ある程度のアスペクト比を越えると熱膨張係数はほぼ一定となる。しかし、等価介在物法から求めた熱

膨張係数 (Fig. 6) は、体積分率の増加とともに積層理論による値と段々差がでてきて、 $V_f=100\%$ では球の場合高い値を、繊維の場合は低い値を示す。特に、 $V_f=80\%$ 以上では繊維自体の熱膨張係数 ($-0.54\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) より低い値が現れている。これが等価介在物法を、炭素繊維が配向分布をもつ場合に適用するときの矛盾であり、適用限界は体積分率に依存すると考えられる。

次に、繊維の方向が Fig. 7 (a) のように $-\beta\leq\theta\leq\beta$ の間に分布しており、さらにこの分布が $-\beta$ から $+\beta$ にわたって Fig. 7 (b) のように一定である場合を考える。短繊維複合材を射出または押し出し成形する場合、このような繊維配向の乱れが考えられる。この場合、分布限界 β の関数として、炭素繊維複合材の熱膨張係数を積層理論を用いて Fig. 8 に示す。Fig. 4 の斜交積層板でも述べたように、 x 方向 (Fig. 3, 7 参照) の熱膨張係数は、繊維自体の繊維軸方向の小さくて負の熱膨張係数および炭素繊維

Fig. 5 Thermal expansion coefficient of composite in which carbon fibers are plane-randomly oriented predicted by lamination theory : (a) as a function of volume fraction of fiber ; (b) as a function of aspect ratio of fiber.

Fig. 6 Thermal expansion coefficient of composite in which carbon fibers are plane-randomly oriented predicted by equivalent inclusion method : (a) as a function of volume fraction of fiber ; (b) as a function of aspect ratio of fiber.

Fig. 7 (a) Fiber orientation limit angle β , and (b) the probability of orientation distribution.

Fig. 8 Thermal expansion coefficient of composite as a function of orientation limit angle β calculated by lamination theory.

の熱膨張係数と弾性率の異方性（横等方性）のため、 β の増加とともに最初減少してから増加する。 β が 30° 以下の場合、アスペクト比が大きいと、横（ y ）方向の膨張はより大きくなるが、 β がある臨界値を越えると、アスペクト比の増加とともに低い値を示す。 $\beta=0^{\circ}$ の場合は一軸配向の熱膨張係数と同じで、 $\beta=90^{\circ}$ の場合は Fig. 5 に示した平面ランダム配向と同じになる。積層理論および等価介在物法から求めた熱膨張係数を β の関数として Fig. 9 に比較する。ここでは繊維のアスペクト比 $\rho=c/a$ (Fig. 1 参照) を100とした。 α_x , α_y は $\beta > 40^{\circ}$ で積層理論の方が高い値を示している。この差は、等価介在物法は全ての繊維の間の相互作用を考慮しているのに対して、積層理論は異なる層の繊維間の相互作用を無視しているため生じたものと考えられる。Fig. 9 の α_z は、等価介在物法から求めた値である。

配向分布している複合材の熱膨張係数を等価介在物法から予測する様々の理論では、繊維を等方性と仮定し、炭素繊維複合材には言及していない。これは炭素繊維の大きな異方性のため、Fig. 6 のような結果が生ずるためと考えられる。そこで、まず理論的にはなんら矛盾を生じない等方性のガラス繊維について、積層理論と等価介在物法から複合材の熱膨張係数を予測しそれらと比較する。Fig. 10 は等方性のガラス繊維が平面ランダム配向している場合の計算結果である。積層理論による熱膨張係数（実線： α_L^P ）と等価介在物法による熱膨張係数（破線： α_E^P ）との差は、体積分率およびアスペクト比によって異なる。その差（ $\alpha_L^P - \alpha_E^P$ ）を繊維の体積分率の関数として Fig. 11 に比較した。Fig. 11 でガラス複合材の場合（実線）、体積分率60%付近に最大値をもつが、炭素繊維複合材の場合（破線）はほぼ直線的に増加して

Fig. 9 Thermal expansion coefficient of composite reinforced with carbon fiber of aspect ratio $\rho=100$ as a function of orientation limit angle β . — : Lamination theory, ---- : equivalent inclusion method.

いる。しかし、その差は $V_f=80\%$ 程度まで炭素繊維複合材の方が小さい。

すなわち、一方向繊維複合材を積層した複合材と、同一層中の繊維が配向分布をもつ複合材との差は、ガラス複合材について Fig. 10 によって与えられる。これに対して炭素繊維複合材の場合、等価介在物法と理論的に矛盾を含まない積層理論による予測値との差 (Fig. 5 と 6 及び Fig. 9) は、ガラスの場合と比べて小さく、熱膨張係数を測定するときの誤差を考慮すると、この差は無視できる。したがって、繊維体積分率が小さい範囲（例えば、Fig. 9 の 20, 40%）では、炭素繊維が同一層中で配向分布をもつ

Fig. 10 Thermal expansion coefficient of a glass fiber/epoxy composite as a function of volume fraction of glass fiber.

Fig. 11 Difference between the thermal expansion coefficients of the composites reinforced with plane-randomly oriented fibers predicted by lamination theory (α_L^P) and by equivalent inclusion method (α_E^P) as a function of volume fraction of fiber.

複合材料の熱膨張係数は、実用的には積層理論または等価介在物法によって近似できるといえる。

4. 結 論

本報告では、任意のアスペクト比をもつ強化繊維が配向分布している繊維複合材料について、等価介在物法による熱膨張係数解析法を一般的に定式化し、積層理論による予測と比較検討した。

積層理論^{13),14)}は、単層板の性質から積層板の性質を予測するために有効であり、等価介在物法^{3)~6)}は繊維とマトリックスの性質から複合材料の性質を予測するために有効である。したがって、一方向繊維複合材（単層板）の熱膨張係数⁶⁾と弾性率¹⁷⁾を等価介在物法によって予測し（Fig. 2）、それを種々の方向に積層した積層複合材料の熱膨張係数は積層理論によって予測できる（Fig. 3）。すなわち、積層理論は繊維の配向分布を一方向繊維複合材（単層板）の配向分布で近似するものである。一方、等価介在物法は同一層中の繊維が配向分布をもつ場合にも適用できる（Fig. 10）。ただし、炭素繊維のように大きな異方性をもつ繊維が配向分布している場合には、繊維体積分率が大きくなると矛盾が生ずる（Fig. 6）。

積層理論と等価介在物法による熱膨張係数予測値の差（ $\alpha_L^P - \alpha_E^P$ ）は、配向の異なる繊維間の相互作用によるものである。この差は、理論的に正しい予測を与える等方性のガラス繊維の場合（Fig. 10, Fig. 11 実線）と比べて、繊維体積分率80%以下では炭素繊維複合材（Fig. 11 破線）の方が小さい。したがって、繊維体積分率が小さい場合（例えば、Fig. 9 に示した $V_f = 0.2, 0.4$ の場合）、積層理論と等価介在物法との差は比較的小さく、熱膨張係数の測定精度を考慮すると、積層理論、等価介在物法ともに十分実用的な予測を与えるものと考えられる。

文 献

- 1) 村山和永, 田中豊喜, 材料, **25**, 417 (1976).
- 2) Ishikawa, T., and H. Fukunaga, "Proceedings of the Third Japan-U.S. Conference on Composite Materials", Tokyo, p. 701 (1986).

- 3) Eshelby, J.D., *Proc. Roy. Soc., London*, **A241**, 376 (1957).
- 4) Takahashi, K., K. Harakawa, and T. Sakai, *J. Compos. Mater.*, **14**(supplement), 144 (1980).
- 5) 京野哲幸, 高橋清久, 材料, **38**, 307 (1989).
- 6) Takao, Y., *Report of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.*, Vol. **31**, No. 97, 15 (1983).
- 7) Ishikawa, T., K. Kojima, and S. Kobayashi, *J. Compos. Mater.*, **12**, 153 (1978).
- 8) Takao, Y., and M. Taya, *J. Appl. Mech.*, **52**, 806 (1985).
- 9) Takao, Y., and M. Taya, *J. Compos. Mater.*, **21**, 140 (1987).
- 10) Craft, W.J., and R.M. Christensen, *J. Compos. Mater.*, **15**, 2 (1980).
- 11) Uemura, M., H. Iyama, and Y. Yamaguchi, *J. Thermal Stresses*, **2**, 393 (1979).
- 12) Takao, Y., private communication.
- 13) Jones, R.M., "Mechanics of Composite Materials" (1975), McGraw-Hill, New York, Chap. 2.
- 14) Mallick, P.K., "Fiber-Reinforced Composites" (1988), Dekker, New York & Basel, Chap. 3.
- 15) Bowles, D.E., and S.S. Tompkins, *J. Compos. Mater.*, **23**, 370 (1989).
- 16) Fahmy, A.A., and A.N. Ragai, *J. Appl. Phys.*, **41**, 5112 (1970).
- 17) 高橋清久, 原川和久, 伴菊夫, 酒井哲也, 繊維学会誌, **39**, 349 (1983).

付録 Eshelby のテンソル

ここでは、Eshelby のテンソルを6行6列で表示する。Fig. 1 (a) のように充填材を回転楕円体、

$$\frac{\hat{x}_1^2}{a^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{a^2} + \frac{\hat{x}_3^2}{c^2} \leq 1 \quad (\text{A } 1)$$

とすると、Eshelby のテンソル T_{ij} は次式で与えられる。ただし、 ρ は楕円体のアスペクト比 ($\rho = c/a$)、 ν はマトリックスのポアソン比を表す。

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= T_{22} = \{ [-4(1-2\nu)\rho^2 + 13-8\nu]K \\ &\quad + (10-8\nu)\rho^4 - (19-8\nu)\rho^2 \} / M \\ T_{33} &= 8 \{ [2(2-\nu)\rho^2 - 1 + 2\nu]K \\ &\quad - (5-2\nu)\rho^2 + 2(1-\nu) \} / M \\ T_{12} &= T_{21} = \{ [4(1-2\nu)\rho^2 - 1 + 8\nu]K \\ &\quad - (2-8\nu)\rho^4 - (1+8\nu)\rho^2 \} / M \\ T_{13} &= T_{23} = 4 \{ -[2(1+\nu)\rho^2 + 1-2\nu]K \\ &\quad + 2\nu\rho^4 + (3-2\nu)\rho^2 \} / M \\ T_{31} &= T_{32} = 4 \{ -[2(1-2\nu)\rho^2 + 1+4\nu]K \\ &\quad + (3-4\nu)\rho^2 + 4\nu \} / M \\ T_{44} &= T_{55} = 8 \{ -(1+\nu)\rho^2 + 2-\nu \\ &\quad + (1-\nu)\rho^4 + 3\nu\rho^2 + 4(1-\nu) \} / M \\ T_{66} &= 2 \{ -[4(1-2\nu)\rho^2 - 7+8\nu]K \\ &\quad + (6-8\nu)\rho^4 - (9-8\nu)\rho^2 \} / M \end{aligned} \right\} (\text{A } 2)$$

ここで,

$$K = \begin{cases} \rho \cosh^{-1} \rho / \sqrt{\rho^2 - 1} & (\rho > 1) \\ \rho \cos^{-1} \rho / \sqrt{1 - \rho^2} & (\rho < 1) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$M = 16(1 - \nu)(\rho^2 - 1)^2 \quad (\text{A.4})$$

である. また, 充填材が球 ($a=c$) の場合には,

$$\left. \begin{aligned} T_{11} = T_{22} = T_{33} &= \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)} \\ T_{12} = T_{13} = T_{21} = T_{23} = T_{31} = T_{32} &= -\frac{1-5\nu}{15(1-\nu)} \\ T_{44} = T_{55} = T_{66} &= \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

となる.