論文

**Numerical Simulation on the Flow of a Viscoelastic Fluid
through an Axisymmetric Abrupt Contraction
—Effect of Elongational Flow Characteristics on
Vortex and Entrance Pressure Drop—**

Toshihisa KAJIWARA, Yoshifumi KUWANO, and Kazumori FUNATSU

*Department of Chemical Engineering, Kyushu University,
6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812, Japan*

The flow of a viscoelastic fluid through a 4:1 axisymmetric abrupt contraction was studied by means of the finite element method. The effects of elongational viscosity on vortex and entrance pressure drop were investigated in detail using the viscoelastic models which have different values of elongational viscosity by varying the model parameters. The Phan Thien-Tanner (PTT) type and the Giesekus type models with a single relaxation time were used as the constitutive equations. It is found that the vortex grows with the recoverable strain and the model with higher elongational viscosity predicts a larger and more intensive vortex. It seems that the vortex becomes more intensive as recoverable strain becomes larger if elongational viscosity curves coincide. The model with higher elongational viscosity gives larger values for the entrance correction in the PTT type model, while the Giesekus type model gives the opposite prediction. It seems that the magnitude of entrance correction can not be explained only from the elongational viscosity.

Key words: Re-entrant corner vortex / Entrance correction / Elongational viscosity / Viscoelastic fluid / Finite element method

**円管急縮小部を通る粘弾性流体の流動シミュレーション
—渦及び入口圧損に対する伸長流動特性の影響—**

梶原 稔 尚・桑 野 善 文・船 津 和 守*

(原稿受理: 1990年5月11日)

1. 緒 言

高分子成形加工における製品の高品質化, 高機能化にともない, 金型設計や成形条件の決定を計算機シミュレーションにより迅速かつ最適に行うことが, 製品の納期の短縮化, 低コスト化などの面から望まれている。しかし, 高分子溶液や高分子溶融体は粘性の性質と弾性の性質を有する粘弾性流体であり, Newton 流体とは大きく異なった特異な挙動を示す。このため, シミュレーションには高分子流体の構成方程式が重要となるが, 広い剪断速度範囲にわたって高分子流体の挙動を十分定量的に表現できる構成方

程式は未だ確立されていない。また, 高分子流体を表す構成方程式は一般に非線形であるため, 等温系の定常流れという比較的単純な流れ系でも, 高い剪断速度領域まで解を得ることが難しい。最近, 幾つかの高分子流体の構成方程式を用いたシミュレーションの試みがなされているが, モデルの流動特性と種々の流れの関係を詳細に検討した報告はあまり多くなく, 不明な点が多く残っている。そこで種々の流れ系においていろいろな構成方程式を用いた解析を行い, 構成方程式を検討する多くの知見を得ることが必要である。

急縮小部の流れは形状が単純であるにもかかわらず, Newton 流体と粘弾性流体の流動の違いを顕著に示す流れ系であるため重要な研究対象となっている。この流れの特徴の一つに上流側コー

* 九州大学工学部化学機械工学科 〒812 福岡市東区箱崎 6 丁目10 番 1 号

ナーでの渦の発生がある。これまで、高分子溶液及び高分子溶融体の渦の発生や成長について、数多くの実験的研究が行われ、渦の大きさとレオロジー特性との相関が試みられてきた。Ballengerら^{1),2)}は、数種類の高分子溶融体を用いて渦の成長について調べ、 $\Delta P_0/\tau_w$ (ΔP_0 : 入口圧力損失, τ_w : キャピラリー内の壁剪断応力) の値で相関することを試みた。彼らは渦の成長を流体の流入角度 (渦の接線のなす角) で表し、 $\Delta P_0/\tau_w$ の値が大きくなると流入角度が小さくなる (渦が成長する) ことを報告した。Cableら³⁾は、ポリアクリルアミド水溶液を用いて渦の大きさとワイゼンベルグ数 We との相関を行った。彼らは、 We を Maxwell モデルの緩和時間 λ ($=N_1/2\tau\dot{\gamma}$, N_1 : 第一法線応力差, τ : 剪断応力, $\dot{\gamma}$: 剪断速度) を用いて、 $We=\lambda\langle u \rangle/R\langle u \rangle$: 下流における平均流速, R : 下流の管半径) で定義し、 We の増加とともに渦が成長することを報告した。Nguyenら⁴⁾は、一定粘度で弾性を有する Boger 流体を用い、shear-thinning 粘度と弾性の影響を分けて検討を行った。彼らも同様に We を Maxwell モデルの緩和時間を用いて定義し、渦の大きさと We の関係について相関したところ、 We の増加とともに渦が成長することを報告した。また、同じ粘度を持つ Newton 流体の実験結果との比較から、弾性により渦が発生し、shear-thinning 粘度によりその挙動が強くなると報告した。以上のように、当初は流体の弾性の強さを剪断流動特性から得られるパラメータで評価し、これと渦の関係が考察されてきた (ただし、 ΔP_0 には伸長特性が含まれている可能性がある)。これに対して、Whiteら⁵⁾は、shear-thinning 粘度と弾性の両方を持つ高分子溶融体でも、低密度ポリエチレンやポリスチレンは渦を示すのに対し、高密度ポリエチレンは渦を示さないという実験結果を示した。この結果より、渦の発生や成長は流体の剪断流動特性から得られるパラメータだけでは相関できないということが示された。そこで伸長流動特性を考慮する必要が生じた。つまり、急縮小部では伸長流動が生じており、伸長流動特性が渦の発生に大きく影響しているのではないかと予想された。Cogswell⁶⁾は、入口流れの解析ではじめて伸長粘度と渦の発生の関係を考察し、渦を発生する高分子溶融体は伸長変形速度とともに増加する伸長粘度を持つことを見いだした。また Whiteら⁷⁾は、定常伸長粘度が伸長変形速度とともに増大し極大値を示すような高分子溶融体では渦が発生し、極大値を示さないものでは渦が発生しないと報告した。

また、急縮小部の流れのもう一つの特徴に入口圧損がある。これまで多くの研究者により小孔及び細管に流入する際の圧力損失について研究が行われてきた。一般に高分子流体などの粘弾性流体では入口圧損が Newton 流体のそれよりも大きくなり、特に入口部に渦をともなう高分子流体では入口圧損が非常に大きくなるといわれている。しかし、渦を生じないある種の高分子希薄溶液 (例えばポリエチレンオキサイド (PEO) 希薄溶液) では、入口圧損が Newton 流体のそれよりも小さくなるという報告もなされている⁸⁾。このように入口圧損については、未だに統一された見解は出されていないのが現状である。

以上のことから、流動特性と渦や入口圧損との関係を検討することが重要であると考えられる。最近では、高分子流体の流動特性をよく表す構成方程式である Phan Thien-Tanner モデル^{9),10)} (以後 PTT モデルと省略する)、Giesekus モデル^{11),12)}、Leonov モデル¹³⁾などを用いて、急縮小部その他の流れについてのシミュ

レーションが多くの研究者によって試みられている^{14)~16)}。しかし、伸長流動特性の面から詳細に検討した解析例は少ないようである。

本論文では、構成方程式として単一緩和モードの PTT 型モデル、Giesekus 型モデルを用い、4:1 急縮小流れの粘弾性流動を有限要素法により解析した。特に、縮小部に発生する渦及び入口圧損に及ぼす伸長流動特性の影響について考察を行った。

2. 支配方程式

等温系の定常流れを考え、流体は非圧縮性とする。慣性項、重力項を無視すると、連続の式、運動方程式はそれぞれ次のように表せる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ は速度ベクトル、 p は等方性圧力、 $\boldsymbol{\tau}$ は異方性応力テンソルである。用いた構成方程式は PTT 型モデルと Giesekus 型モデルである。まず、異方性応力 $\boldsymbol{\tau}$ を次のように表す。

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_0 \mathbf{D} + \mathbf{E} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{D}$ は変形速度テンソル、 η_0 は零剪断粘度、 s は零剪断粘度と第二ニュートン粘度の比を表すパラメータである。 $\mathbf{E}$ は各粘弾性モデルに従う応力であり、単一緩和モードの PTT 型モデルと Giesekus 型モデルではそれぞれ式(4)、(5)で表される。

$$\left. \begin{aligned} \lambda \hat{\mathbf{E}} + [1 + (\varepsilon/G) \text{tr} \mathbf{E}] \mathbf{E} &= 2\eta_1 \mathbf{D} \\ \hat{\mathbf{E}} &= (1 - \xi/2) \mathbf{E} + (\xi/2) \hat{\mathbf{E}} \quad (0 \leq \xi \leq 2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\lambda \hat{\mathbf{E}} + \mathbf{E} + (\alpha/G) \mathbf{E}^2 = 2\eta_1 \mathbf{D} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (5)$$

ここで、 λ は緩和時間、 G は緩和弾性率 ($G = \eta_1/\lambda$)、 ε , ξ , α は無次元のモデルパラメータである。また、 ∇ , Δ の記号はそれぞれ式(6)、(7)で定義される upper-convected 時間微分と lower-convected 時間微分を表す。

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} - (\nabla \mathbf{v})^t \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{v})^t \quad (7)$$

ここで、 $\nabla \mathbf{v}$ は速度勾配テンソルである。また、上付き添字の t はテンソルの転置を表す。

3. 解析方法

前述の支配方程式を連立させ、速度 $\mathbf{v}$ 、圧力 p 、応力 $\mathbf{E}$ を変数として、ガラーキン有限要素法により解析した。要素には四角形要素を用い、速度、応力については 9 節点二次の補間関数を、圧力については 4 節点一次の補間関数を用いた。得られた連立方程式は非線形であるので、ニュートン・ラプソン法により解を求めた。Fig. 1 に解析に用いた軸対称流路の要素分割図を示す。流れは対称流であるので断面の半分だけを示している。このメッシュは過去の研究¹⁵⁾において高い We まで計算できたものを参考に

Fig. 1 Finite element mesh.

Fig. 2 Boundary conditions.

して作成した。ただし、この図は解析領域全体を示すために長さ方向に縮めて示しているため、縦軸と横軸の比率が異なっている。また、Fig. 2 に計算に用いた境界条件を示す。

4. 解析に用いたモデル流体の流動特性

Figs. 3, 4 に解析に用いた PTT 型モデル, Giesekus 型モデルの流動特性曲線を示す。伸長流動特性の影響を考察するために、Fig. 3 に示すように両モデルで伸長粘度の値をほぼ等しくした 3 種類のモデルを設定した。それぞれのモデルで伸長粘度が高い順にモデル I, モデル II, モデル III と呼ぶことにする。このときのそれぞれのモデルの剪断流動特性を Fig. 4 に示す。PTT 型モ

Fig. 3 Steady elongational viscosity for the PTT type model(—) and the Giesekus type model(---) used in the calculation.

Fig. 4 Steady shear viscosity and the primary normal stress difference for the PTT type model(—) and the Giesekus type model (---) used in the calculation.

Table I. Values of model parameters.

	PTT type model		Giesekus type model	
I	$\epsilon=0.013$	$\xi=0.2$ $s=1/9$	$\alpha=0.017$	$s=1/9$
II	$\epsilon=0.08$		$\alpha=0.1$	
III	$\epsilon=0.4$		$\alpha=0.5$	

デルでは 3 種類のモデルで剪断粘度, 第一法線応力差ともにはほぼ等しく, 高剪断速度域では第一法線応力差は一定となっている。これに対し, Giesekus 型モデルでは伸長粘度が高いモデルほど剪断粘度, 第一法線応力差ともが大きくなっている。Table I にこの場合のモデルパラメータの値を示す。PTT 型モデルについては ϵ を, Giesekus 型モデルについては α を変えて伸長粘度を変えている。また, PTT 型モデルでは第一法線応力差に対する第二法線応力差の比が $-\xi/2$ となり, $\xi=0.2$ はこの比が通常言われている -0.1 になることを意味している。両モデルで導入している s は, 零剪断粘度と第二ニュートン粘度の比を表すパラメータであり, 他の研究者^{14)~16)}の結果と比較するために彼らと同じ $1/9$ を用いた。このため, 第二ニュートン領域が実際より剪断速度の低いところで現れているが, 実際の高分子では s の値は $0.001 \sim 0.01$ 程度である。また, PTT 型モデルにおいて高剪断速度で第一法線応力差が増加するためには多モードのモデルを用いなければならない。本研究では, 計算容量の問題で単一モードモデルの計算しかできなかったが, 高剪断速度域での検討を行うには計算手法を工夫して多モードモデルでの計算を可能にしなければならない。

5. 結果及び考察

5.1 We の定義

粘弾性流体の弾性の強さを表すパラメータとしてはいろいろなものがあるが, 本研究では次式で定義される We を用いた。

$$We = \frac{\lambda \langle u \rangle}{R} \quad (8)$$

ここで, $\langle u \rangle$ は下流側の管内平均流速, R は下流側の管半径である。この We は支配方程式を無次元化した場合に構成方程式中の弾性項に現れる無次元数である。また, 下流の完全発達流れでのみかけの壁剪断速度 $\dot{\gamma}_w$ を用いて表すと次式のようにになる。

$$We = \frac{\lambda \dot{\gamma}_w}{4} \quad (9)$$

つまり, We の 4 倍が $\lambda \dot{\gamma}_w$ に対応することになる。

この We は, Maxwell モデルや Oldroyd-B モデルなどの線形モデルでは第一法線応力差と剪断応力の比, すなわち回復性ひずみ $S_R (= N_1/2\tau_{12})$ を表すことになるが, PTT モデルや Giesekus モデルなどの非線形モデルでは We と S_R は一致しない。今回計算に用いたモデルの We と S_R の関係を求めると, Fig. 5 に示すようにある We で S_R にピークが現れるようになる。このようにピークを持つ理由は, 高剪断速度で剪断応力は両モデルとも剪断速度に比例 (剪断粘度一定) するのにに対し, 第一法線応力差は PTT 型モデルでは一定となり, Giesekus 型モデルでは剪断速度の $1/2$ 乗に比例するためである。このためピークは Giesekus 型モデルでは緩やかに, PTT 型モデルでは急激に発生している。よって, We の高いところでは We の増加が流体の弾性の増加を

Fig. 5 Recoverable strain as a function of the Weissenberg number for the PTT type model (—) and the Giesekus type model (---).

表していないことになり、モデルの流動特性が現実の流体を表していないことになる。そこで本研究では、このピークが発生する前までで比較を行うことにする。

計算では We を 0 から徐々に増加させていき、解が収束しなくなるまで繰り返し計算を行った。Table II にそれぞれのモデルについて計算できた限界の We の値を示す。Giesekus 型モデル I では、 We が 1.5 で解が発散したので、高い We での結果の比

Table II. Convergence limit values of the Weissenberg number in the calculation.

	PTT type model	Giesekus type model
I	8.2	1.49
II	5.55	9.85
III	15.0	6.3

較は行えなかった。

5.2 流線及び渦

Fig. 6 に $We=1(\lambda\dot{\gamma}_w=4)$ の時の PTT 型モデル、Giesekus 型モデルの流線を示す。ただし、これらの図は Fig. 1 のメッシュ図とは異なり、縦横等倍で縮小部付近のみを示している。また、流線関数の値は壁を 0、中心軸上を 1 として正規化している。この場合 6 種類すべてのモデルで渦の大きさは小さく、強さはかなり弱い。この場合の縮小部における伸長速度 $\lambda\dot{\epsilon}$ を中心軸上での速度勾配から概算すると、どのモデルの場合も最大約 0.6 であり、Fig. 3 からこの伸長速度域では伸長粘度が立ち上がる前の領域に入っていることがわかる。よって、小さく弱い渦しか現れないものと考えられる。

Fig. 7 は $We=4(\lambda\dot{\gamma}_w=16)$ の時の両モデルの流線である。PTT 型モデルではモデル III、モデル II、モデル I の順に渦の大きさ、強さが増大しているのがわかる。Giesekus 型モデルの場合はモデル I の結果は得られていないが、モデル II の方がモデル III よりも大きくて強い渦を示している。また、同じ伸長粘度を

Fig. 6 Streamlines for (a) the PTT type model and (b) the Giesekus type model at $We=1.0(\lambda\dot{\gamma}_w=4)$.

Fig. 7 Streamlines for (a) the PTT type model and (b) the Giesekus type model at $We=4.0(\lambda\dot{\gamma}_w=16)$.

もつ PTT 型モデルと Giesekus 型モデルの渦を比較してみると、大きさ、強さともに同程度であることがわかる。この場合の縮小部における伸長速度 $\lambda\dot{\epsilon}$ を先ほどと同様に概算すると、モデルにより多少異なるが最大約 3~6 であり、Fig. 3 から伸長粘度が大きく立ち上がる伸長速度域に入っているのがわかる。両モデルとも伸長粘度が大きく立ち上がるモデルほど大きく強い渦を示している。

Fig. 8 は We と渦の強さとの関係について示したものである。ここで渦の強さは渦の中心における流線の値の絶対値とした。両モデルともある We のところで渦の強さにピークが発生しているので、ピークが発生する前までの We で比較を行うことにする。Giesekus 型モデル I を除き、PTT 型、Giesekus 型それぞれのモデルで伸長粘度が高いほど渦の強さは強くなっている。Giesekus 型モデルについては剪断流動特性も大きく異なっているので、この結果だけでは渦の違いが伸長粘度による影響と断定することはできないが、PTT 型モデルについては剪断流動特性もほぼ一致しているので、伸長粘度が大きく立ち上がるモデルほど強い渦を示すものと考えられる。また、 We の高いところで渦が弱くなっているが、これは Fig. 5 に示すように We の高いところで S_R が減少しているためではないかと思われる。つまり、渦の強さには伸長粘度だけではなく回復性ひずみも関係しており、伸長粘度曲線が同じならば、 S_R が大きくなるほど渦も強くなるものと考えられる。しかし、現段階では伸長粘度と回復性ひずみのどちらが支配的かということは断定できない。伸長粘度曲線がほぼ

Fig. 8 Vortex intensity as a function of the Weissenberg number for the PTT type model (—) and the Giesekus type model (---).

同じで S_R が大きく異なるモデルどうして比較を行い、さらに詳細な検討をする必要がある。

5.3 入口補正

次に、計算された圧力より入口補正 n_{en} の値を求めた。入口補正 n_{en} は次式で定義した。

$$n_{en} = \frac{\Delta P - \Delta P_U - \Delta P_D}{2\tau_w} \quad (10)$$

ここで、 ΔP は全圧力損失、 ΔP_U 、 ΔP_D はそれぞれ上流、下流における完全発達流れでの圧力損失、 τ_w は下流の完全発達流れにおける壁剪断応力である。Fig. 9 に We とそれぞれのモデルの n_{en} との関係を示す。Giesekus 型モデル I を除いて、 We が増加するにしたがって n_{en} の値も増加する結果となっている。PTT 型モデルの場合は伸長粘度が高いほど n_{en} の値も大きくなっているが、Giesekus 型モデルの場合は逆に小さくなっている。このことから入口補正への影響は伸長粘度が支配的ではないということになる。Debbaut ら¹⁶⁾は、PTT 型モデルについてパラメータをいろいろと変えて計算を行い、 $0 \leq \varepsilon \leq 0.015$ の範囲で $\xi = 0.2$ の時は ε の減少とともに n_{en} が増加するが、 $\xi = 0$ の時の n_{en} は逆に減少するという結果を得ている。同じ ε では ξ が $0 \sim 0.2$ まで変化しても伸長粘度はほとんど変化しないので、彼らの結果も同じように入口補正への影響は伸長粘度が支配的ではないということになる。よって、入口補正については伸長粘度のみでは相関できないものと思われる。

また、Giesekus 型モデル I の n_{en} の値は We の増加とともに減少し負の値となっている。Giesekus 型モデルのパラメータ α を 0 とすると Oldroyd-B モデルを表すことになるが、Giesekus 型モデル I では α の値が 0.017 とかなり小さいためにモデルの性質が Oldroyd-B モデルに近くなり、よって n_{en} の結果も

Fig. 9 Entrance correction as a function of the Weissenberg number for the PTT type model (—) and the Giesekus type model (---).

Oldroyd-B モデルに近くなっているものと思われる。ただし、Debbaut ら¹⁶⁾は streamline-upwind 法と応力に sub-element を用いることにより Oldroyd-B モデルを高 We まで計算すると、 We が 5～8 を越えたところで n_{en} の値は増加しはじめ、さらに高い We では正の値になると報告している。よって、この Giesekus モデル I も高 We まで計算できれば、 n_{en} の値はいずれは増加してくるものと思われる。また、他のモデルでも n_{en} の値は We の小さいところで一旦わずかに減少した後増加し、その度合はモデルにより異なっている。これは緒言で述べたように渦が発生する前では入口圧損が増加するものと減少するものがあるという実験結果と関係があるのではないかと思われる。流体の流動特性を押えた上で実験的知見を得、詳細に検討していくことが必要である。

6. 結 言

有限要素法による急縮小流れの粘弾性流体の流動解析の結果を検討することにより、伸長粘度が大きく立ち上がる流体は渦の大きさや強さが大きくなる特性を持つことがわかった。しかし、入口補正の値に関しては、伸長粘度が大きく立ち上がるほど PTT 型モデルでは大きくなったが、Giesekus 型モデルでは逆に小さくなることから、入口補正の大小関係は伸長粘度とは単調な関係になっていないことがわかった。この理由は明確でなく、今後他のレオロジー特性の影響をも含めて詳細に検討する必要がある。また、本研究で用いた単一緩和モードのモデルでは、着目した特性のみを変化させて他の特性を一致させるようなパラメータの設定ができないことや、妥当な特性を示す剪断速度範囲がかなり狭いなどの問題があり、渦と流動特性に関して厳密な考察ができなかった。今後、より実際の流動を表現し得る多モードのモデルを用いる必要がある。さらに、今回用いている混合法では計算可能な We の値が実際の工業レベルに比べてかなり低いので、高 We での検討が可能となる Marchal ら¹⁷⁾が用いた streamline-upwind 法と応力の計算に sub-element を用いる方法を多モードモデルに導入して、高 We での解析を行う予定である。

(平成元年10月20日 第37回レオロジー討論会にて発表)

文 献

- 1) Ballenger, T. F., and J. L. White, *Chem. Eng. Sci.*, **25**, 1191 (1970).
- 2) Ballenger, T. F., and J. L. White, *J. Appl. Polym. Sci.*, **15**, 1949 (1971).
- 3) Cable, P. J., and D. V. Boger, *AIChE J.*, **24**, 869 (1978).
- 4) Nguyen, H., and D. V. Boger, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **5**, 353 (1979).
- 5) White, J. L., and A. Kondo, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **3**, 41 (1978/79).
- 6) Cogswell, F. N., *Polym. Eng. Sci.*, **12**, 64 (1972).
- 7) White, S. A., and D. G. Baird, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 93 (1986).
- 8) 福富清, 長谷川富市, 日本機械学会論文集 (B編), **54**, 1611 (昭63).
- 9) Phan-Thien, N., and R. I. Tanner, *J. Non-Newtonian*

-
- Fluid Mech.*, **2**, 353 (1977).
- 10) Phan-Thien, N., *J. Rheol.*, **22**, 259 (1978).
- 11) Giesekus, H., *Rheol. Acta*, **5**, 29 (1966).
- 12) Giesekus, H., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **11**, 69 (1982).
- 13) Leonov, A. I., *Rheol. Acta*, **15**, 85 (1976).
- 14) Keunings, R., and M. J. Crochet, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **14**, 279 (1984).
- 15) Debbaut, B., and M. J. Crochet, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 173 (1986).
- 16) Debbaut, B., J. M. Marchal, and M. J. Crochet, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **29**, 119 (1988).
- 17) Marchal, J. M., and M. J. Crochet, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **26**, 77 (1987).