論文

Applicability of Multiple Integral Constitutive Equation with Power-Law Approximation to Viscoelastic Behavior of Some Solid Polymers

by

Takuji YAMAGUCHI, Teruaki YANAGAWA, and Hiroshi KIMURA

(Faculty of Engineering, Fukui University, Fukui 910)

Stafford (1969) has suggested that the multiple integral constitutive equation of nonlinear viscoelasticity is reduced to a single integral form when kernel functions are expressible as products of functions of single argument, and that stress relaxation experiments at various strains are sufficient to evaluate the kernel functions. In this paper, we examined applicability of the Stafford model for high density polyethylene (HDPE) and poly(vinyl chloride) (PVC). It was assumed that the kernel function was simply expressed by a power of time $t^{-\beta}$ (power-law model). The kernel functions were evaluated from previous stress relaxation data in uniaxial elongation up to the fourth order for HDPE and up to the second order for PVC, respectively. These values of kernel functions based on the power-law model were used to predict nonlinear behavior at uniaxial strains with various histories: two strains applied successively, loading and unloading at constant strain rate, and stress relaxation after elongation of constant rate.

In the stress relaxation under two-step strain (i.e., two strains applied at an interval), the calculated values were in rough agreement with observed values when the second additional strain $\Delta\varepsilon$ was positive, while the calculated values were remarkably greater than the observed values when $\Delta\varepsilon$ was negative. In tensile behavior at constant strain rate, the calculated values of stress agreed with the observed values in the loading and relaxation processes, but they were greater than the experimental values in the unloading process. When the strain decreased after attaining a certain value, the applicability of the Stafford model was poor compared with that of the Schapery type equation (i.e., time-strain reduced model) discussed in the previous paper (this journal, 4, 72 (1976)).

高分子固体の粘弾性挙動に対するべき法則体 近似した多重積分型構成方程式の適用性

山口 拓 治・柳 川 昭 明・木 村 博*

(原稿受理: 1976年6月11日)

1. 緒 言

多重積分型構成方程式は, Green-Rivlin^{1)~3)}, Pipkin⁴⁾ らにより 3 次元的に, 中田⁵⁾によって 1 次元的に取り扱われた。その後, Pipkin-Rogers,⁶⁾ Lockett⁷⁾ Lockett-Stafford⁸⁾ らによって, 理論

の応用展開, 核関数の決定法などが研究された。この理論の核関数を完全に決定するには, 原理的にほとんど不可能に近いほどの多数の実験を要するので, 理論を厳密に実験で検証することは非常に困難とされている。Stafford⁹⁾ は, 核関数を特殊な形で表し多重積分を 1 重積分に変換して, 理論を単純化する二, 三の方法を示している。その中で核関数の多次元引数は互いに独立である

* 福井大学工学部 福井市文京 3 丁目 9 番 1 号

と仮定し、核関数をそれぞれの引数の1次元関数の積で表示する方法が特に多数採用されている^{10)~15)}。また Ward ら^{16)~20)}は、別の間接的な方法で結晶性高分子に対する一般的な1次元理論の適用を試みている。著者らも先に、2段応力緩和実験によって間接的に理論の適用性を評価する方法、および定速伸長荷重実験によって1次の核関数、すなわち線型項の重ね合わせ性を検証する方法を示し、ポリエチレンの実験結果に対する適用性を検討した²¹⁾。その結果、2段応力緩和実験による理論の検証法はその判定条件がやや厳しくあまり有効でないこと、および定速伸長荷重時において1次の核関数の重ね合わせ性が成立することを明確にした。本報では、核関数を積型式で表示した場合の2段応力緩和と種々の定速伸長挙動の一般的、およびべき法則体に対する応力計算式を求め、既報の高密度ポリエチレン^{21), 22)}と硬質ポリ塩化ビニール²³⁾の実験結果に対する適用性を検討してみる。

2. 方 法

2・1 構成方程式と核関数

単純伸長状態でかつひずみが十分小さければ、任意のひずみ履歴 $\varepsilon(\tau_i)$ ($-\infty < \tau_i < t$) を受けた時刻 t における応力 $\sigma(t)$ は、核関数 G_i ($i=1, n$) を有する次の1次元多重積分型構成方程式で近似できる。⁵⁾

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau_1) \frac{d\varepsilon}{d\tau_1} d\tau_1 + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \\ & \times \frac{d\varepsilon}{d\tau_1} \frac{d\varepsilon}{d\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \cdots + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_n(t-\tau_1, \dots, t-\tau_n) \\ & \times \frac{d\varepsilon}{d\tau_1} \cdots \frac{d\varepsilon}{d\tau_n} d\tau_1 \cdots d\tau_n \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、核関数の時間変数は互いに独立であると仮定して、核関数を次のように1次元関数 g_{ij} の積で表す⁹⁾。

$$G_i(t_1, t_2, \dots, t_i) = A_i \prod_{j=1}^i g_{ij}(t_j) \quad (2)$$

上式で A_i に弾性率の次元および G_i と等符号を与えて、 g_{ij} を正で無次元の時間の関数とする。 G_i の変数に関する対称性から g_{ij} を次のように置くことができる⁹⁾。

$$g_{i1}(t) = g_{i2}(t) = \cdots = g_{ii}(t) = g_i(t) \quad (3)$$

積型式の構成方程式は次のように書ける。

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n A_i \prod_{j=1}^i \int_{-\infty}^t g_{ij}(t-\tau_j) \frac{d\varepsilon}{d\tau_j} d\tau_j \quad (4)$$

$H(t)$ を単位階段関数としてひずみ $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ を与えた時の緩和弾性率 $E_r(t, \varepsilon)$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} E_r(t, \varepsilon) = & G_1(t) + G_2(t, t) \varepsilon_0 + \cdots + G_n(t, \dots, t) \varepsilon_0^{n-1} \\ = & \sum_{i=1}^n A_i \varepsilon_0^{i-1} \{g_i(t)\}^i \end{aligned} \quad (5)$$

$g_i(t) = (t)^{-\beta_i/i}$ で表されるべき法則体の場合、

$$E_r(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n A_i \varepsilon_0^{i-1} (t)^{-\beta_i} \quad (6)$$

となる。ただし、 t は無次元時間である。

2・2 2段応力緩和

$t=0$ で1段ひずみ ε_1 を、 t_1 で2段ひずみ ε_2 を加える2段入力ひずみ、

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 H(t) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) H(t - t_1) = \varepsilon_1 H(t) + \Delta\varepsilon H(t - t_1)$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \quad (7)$$

を式(4)に代入し、式(3)を考慮すると応力は、

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \sum_{i=1}^n A_i \sum_{j=0}^i C_j \varepsilon_1^{i-j} (\Delta\varepsilon)^j \{g_i(t)\}^{i-j} \{g_i(t-t_1)\}^j \quad (8) \\ C_j = & \frac{i!}{j!(i-j)!} \end{aligned}$$

となる。また、 $t \gg t_1$ の時には $\sigma(t) \approx \sum_{i=1}^n A_i \{g_i(t)\}^i \varepsilon_2^i$ となり、 ε_2 を与えたときの1段応力緩和曲線に収れんする。べき法則体に対しては、次のようになる。

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{j=0}^i C_j \varepsilon_1^{i-j} (\Delta\varepsilon)^j t^{-\beta_i(1-\frac{j}{i})} (t-t_1)^{-\frac{\beta_i}{i}} \quad (9)$$

2・3 定速伸長荷重過程

v_0 を定ひずみ速度として $\varepsilon(t) = v_0 t H(t)$ を式(4)に代入すると、

$$\begin{aligned} \sigma_s(t) = & \sum_{i=1}^n A_i v_0^i \left[\int_0^t g_i(t-\tau) d\tau \right]^i \\ = & \sum_{i=1}^n v_0^i F_i(t) \end{aligned} \quad (10)$$

$$F_i(t) = A_i \left[\int_0^t g_i(t-\tau) d\tau \right]^i \quad (11)$$

となり、 $\sigma_s(t)/v_0$ を v_0 のべき級数で展開し、 $F_i(t)$ を求めることができる。また、 $F_i(t)$ と A_i は等符号となる。式(11)の両辺を t で微分すると、

$$\begin{aligned} |A_i| [g_i(t)]^i = & |G_i(t, \dots, t)| = \left[\frac{\partial |F_i(t)|^{1/i}}{\partial t} \right]^i \\ = & |F_i(t)| \left[\frac{1}{t} \frac{\partial \log |F_i(t)|}{\partial \log t} \right]^i \end{aligned} \quad (12)$$

となる。一般的な式(1)から誘導される F_i より高次の G_i を求めるためには、ひずみ速度を伸長過程で $(i-1)$ 回変速させる i 段定速伸長実験を無限に近い回数を行う必要があることは既に明らかにした²¹⁾。上式は、積型式核関数近似すると高次の G_i が1段定速伸長実験からも求まることを示している。

べき法則体の場合は、

$$\sigma_s(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i v_0^i}{\left(1 - \frac{\beta_i}{i}\right)^i} t^{i-\beta_i} \quad (13)$$

となる。 $t = \varepsilon/v_0$ として応力をひずみの関数として表すと、

$$\sigma_s(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i v_0^{\beta_i}}{\left(1 - \frac{\beta_i}{i}\right)^i} \varepsilon^{i-\beta_i} \quad (14)$$

となる。

2・4 定速伸長除重過程

t_1 までひずみ速度 v_0 で伸長し、ひずみ $\varepsilon_1 = v_0 t_1$ を与え、 t_1 以降ひずみ速度が $-v_0$ になるように除重させる入力ひずみ、

$$\varepsilon(t) = v_0 t \{H(t) - H(t-t_1)\} + v_0 (2t_1 - t) H(t-t_1) \quad (15)$$

を式(4)に代入すると、 $t \geq t_1$ における応力 $\sigma_h(t)$ は、

$$\sigma_h(t) = \sum_{i=1}^n A_i v_0^i \left[\int_0^{t_1} g_i(t-\tau) d\tau - \int_{t_1}^t g_i(t-\tau) d\tau \right]^i \quad (16)$$

となる。べき法則体の場合は、

$$\sigma_h(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i v_0^i}{\left(1 - \frac{\beta_i}{i}\right)^i} \left[t^{1-\frac{\beta_i}{i}} - 2(t-t_1)^{1-\frac{\beta_i}{i}} \right]^i \quad (17)$$

となる。 t_1 以降のひずみ $\varepsilon = 2\varepsilon_1 - v_0 t$ を上式に代入して、 σ_h を ε で表示すると、

$$\sigma_h(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i v_0^{\beta_i}}{(1 - \beta_i)^i} \left[(2\varepsilon_1 - \varepsilon)^{1 - \frac{\beta_i}{i}} - 2(\varepsilon_1 - \varepsilon)^{1 - \frac{\beta_i}{i}} \right] \quad (18)$$

となる。

2・5 伸長停止後の応力緩和過程

t_1 まで v_0 で伸長し、 t_1 以降定ひずみ $\varepsilon_1 = v_0 t_1$ に保たせる入力ひずみ、

$$\varepsilon(t) = v_0 t \{H(t) - H(t - t_1)\} + v_0 t_1 H(t - t_1) \quad (19)$$

を式(4)に代入すると、 t_1 以降の応力緩和 $\sigma_r(t)$ は、

$$\sigma_r(t) = \sum_{i=1}^n A_i v_0^i \left[\int_0^{t_1} g_i(t - \tau) d\tau \right]^i \quad (20)$$

となる。べき法則体に対しては、

$$\sigma_r(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i v_0^i}{(1 - \beta_i)^i} \left[t^{1 - \frac{\beta_i}{i}} - (t - t_1)^{1 - \frac{\beta_i}{i}} \right] \quad (21)$$

となる。

2・6 σ_s と σ_h の非対称性

$\Delta_+(t) \equiv \sigma_s(t) - \sigma_r(t)$, $\Delta_-(t) \equiv \sigma_r(t) - \sigma_h(t)$ と定義すると、次のようになる。

$$\Delta_+(t) = \sum_{i=1}^n A_i v_0^i \left[\left\{ \int_0^t g_i(t - \tau) d\tau \right\}^i - \left\{ \int_0^{t_1} g_i(t - \tau) d\tau \right\}^i \right] \quad (22)$$

$$\Delta_-(t) = \sum_{i=1}^n A_i v_0^i \left[\left\{ \int_0^{t_1} g_i(t - \tau) d\tau \right\}^i - \left\{ \int_0^t g_i(t - \tau) d\tau \right\}^i - \int_{t_1}^t g_i(t - \tau) d\tau \right] \quad (23)$$

上式で $n=1$ の線型の場合は $\Delta_+(t) = \Delta_-(t)$ となり、 $\sigma_s(t)$ と $\sigma_h(t)$ は $\sigma_r(t)$ に関して対称となるが、 $n \geq 2$ では $\Delta_+(t) \neq \Delta_-(t)$ となり、 $\sigma_s(t)$ と $\sigma_h(t)$ は $\sigma_r(t)$ に関して非対称となる。

3. 実験

既報^{22)~25)}の実測値の一部に対する計算式の適合性を検討するが、その実験概要を簡単に述べておく。試料は高密度ポリエチレン(HDPE) Hizex 5000-S (三井石油化学KK製)のペレットより圧縮成形した厚み約0.3~0.4mm、熱処理フィルム(密度0.969 g/cm³, 結晶化度89.7%)と市販の厚み0.5mmの硬質ポリ塩化ビニール(PVC)シート(商品名サンロイド, 筒中プラスチックKK製)の2種類である。これらの試料を長さ90mm, 幅10mmの短ざく型にして、20°C, 56% R.H.の条件で試長50mmとし、各種の1軸伸長実験を行った。

4. 結果と考察

4・1 核関数のべき法則近似

先に求めた²¹⁾HDPEの核関数 $\log|G_i|$ を Fig. 1 に示す。 G_1 , G_3 は正、 G_2 , G_4 は負である。図中の実線はべき法則体近似したもので、定数 A_i , β_i を Table 1 に示す。前報²³⁾で得られたPVCの緩和弾性率の等時曲線の1例を Fig. 2 に示す。ひずみ3%までは各時刻において、等時曲線は直線的に減少しているが、3%以上になるとその低下は急激となり直線からずれてくる。ひずみ3%以下の $E_r(t, \varepsilon)$ のみに注目し、 $n=2, 3, 4$ とした場合の G_i を

Fig. 1. Kernel functions G_i for HDPE. Lines represent power-law approximation.

Fig. 2. Isochronous relaxation modulus plotted against strain for PVC.

Fig. 3. Kernel functions G_i for PVC. Lines represent power-law approximation.

求めてみた。 n の増加とともに $E_r(t, \varepsilon)$ に対する近似精度は上昇するが、 $n \geq 3$ では $i \geq 2$ の G_i が著しく変動したり、途中で符号が変化したりして滑らかな曲線が得られなかったので $n=2$ を採

Table 1. Experimental constants for power-law model.

Sample	i	A_i (dyne/cm ²)	β_i
HDPE	1	1.312×10^{10}	0.119
	2	-4.207×10^{11}	0.147
	3	8.414×10^{12}	0.160
	4	-6.893×10^{13}	0.161
PVC	1	2.611×10^{10}	0.0158
	2	-2.710×10^{11}	-0.0181

Fig. 4. Comparisons of the relaxation modulus with the calculated values from Eq. (6) for PVC.

用した。Fig. 2 から分かるように $G_1 > 0$, $G_2 < 0$ となる。 $\log |G_i|$ と $\log t$ の関係を Fig. 3 に示す。 G_1 は単調減少するが、 $|G_2|$ は増加しており、Fig. 1 の結果と比較して特徴的である。図中の実線はべき法則近似したもので、定数 A_i , β_i を Table 1 に示す。Fig. 4 は、式 (6) による緩和弾性率の計算値と実測値を比較したもので、べき法則近似が高い精度で実測値を再現している。

4・2 2 段応力緩和挙動

式 (9) による計算値と実測値の比較の一例を Fig. 5 に示す。ただし、 $t' = t - t_1$ として時間原点を t_1 にしてある。HDPE の $\Delta \epsilon > 0$ の場合には、短時間側で計算値は実測値より低く、長時間側で一致している。 $\Delta \epsilon < 0$ では計算値は実測値よりかなり大きい。その他の ϵ_1 , $\Delta \epsilon$, t_1 を与えた場合の比較も行ったが、全般的に ϵ_1 , $|\Delta \epsilon|$, t_1 の増加とともに両曲線の差が増大し、既報^{(24), (25)}の時間-ひずみ分離型の近似よりも優れ、時間-ひずみ換算型の近似よりも劣る傾向が認められた。PVC の $\Delta \epsilon > 0$ の時には実測値は計算値より若干大きい、 $\Delta \epsilon < 0$ の時には実測値は計算値より著しく低下し、 $|\Delta \epsilon|$ の増大とともにこの傾向は著しい。 ϵ_1 を増加させると、この傾向が更に助長された。前報⁽²³⁾の時間-ひずみ換算型

(a) for HDPE

(b) for PVC.

Fig. 5. Comparisons of two-step stress relaxation behavior with the calculated values from Eq. (9).

の計算結果と比較すると、 $\Delta \epsilon > 0$ の場合は同程度の近似が得られているが、 $\Delta \epsilon < 0$ の場合は近似の精度が低下している。

両試料とも $\Delta \epsilon < 0$ の場合、計算値が実測値より著しく高くなることは、1 重積分型の構成方程式を適用した際にも認められている^{(23)~(25)}。いずれの理論においても十分時間が経過すれば、 $\sigma(t)$ は 2 段ひずみ ϵ_2 の応力値に収れんするはずだが、観測時間内では実測値にそのような傾向は認めがたい。実際には塑性ひずみの発生などにより非可逆的な応力変化を示し、理論の予測より大きな応力低下を示すものと考えられる。

4・3 定速伸長荷重時における重ね合わせ性

Fig. 6 は PVC の $\sigma(t)/v_0$ を伸長速度 v に対して示したものである。これを直線近似して式 (10) で $n=2$ とした F_1 と F_2 を求め

Fig. 6. Isochronous tensile stress/strain rate plotted against the rate of elongation for PVC.

Fig. 7. $\log|F_i| - \log t$ plots. Circles represent experimental results and lines represent calculated values from Eq. (13).

ると、 $F_1 > 0$, $F_2 < 0$ となる。 $\log|F_i| - \log t$ 関係を Fig. 7 (b) に示す。既報²¹⁾で求めた HDPE の $\log|F_i|$ を Fig. 7 (a) に示す。 Fig. 7 の実線は、式 (1) 右辺の g_i にべき法則体近似 $g_i(t) = t^{-\frac{\beta_i}{i}}$ を代入して求めた $|F_i| = |A_i| t^{i-\beta_i} / (1 - \frac{\beta_i}{i})^i$ の対数値を示し、実測値と良好に一致している。特に注目されることは、 $t \geq 10$ sec の $E_r(t, \epsilon)$ から算出した G_i を用いて、 $t < 10$ sec の領域に外挿した F_i の計算値が、その実測値を十分に近似していることである。以上の結果よりそれぞれの核関数 G_i は、荷重時において対数尺度的にみれば、重ね合わせの式を大体満足していると言える。PVC について、式 (2) より図式微分的に求めた G_1 と Fig. 3 の G_1 および $\epsilon = 0.27\%$ の緩和弾性率を比較して Fig. 8 に示す。ポリエチレン²¹⁾の場合と同様に、3本の曲線は誤差の範囲内で一致しており、線型項の重ね合わせは良好に成立していることが分か

Fig. 8. Comparisons of the G_1 in Fig. 3 (○) with the relaxation modulus obtained at 0.3% strain (●) and with the calculated values from Eq. (12) (◐) for PVC.

Fig. 9. Comparisons of the kernel functions G_i ($i \geq 2$) (—) in Fig. 1 and Fig. 3 with the calculated values (●, ○) from Eq. (12).

る。高次項の G_i を同様にして求め比較したのが Fig. 9 である。PVC の G_2 の計算結果は、実測値にかなり近い傾向を示している。HDPE の計算値はかなり変動しており、良好な結果とは言いがたい。しかし、この変動は図式微分の誤差が大きく影響するためと考えられ、両数値の桁数はほぼ一致しているので、重ね合わせの成立をこの段階で全く否定することはできない。

4.4 定速伸長荷重、除重および伸長停止後の応力緩和挙動

Fig. 10 は、式 (3), (7), (21) による上記各過程の計算値と実測値を直接比較したものである。ただし、時間軸は ϵ_1 到達時刻 t_1 を規準として無次元化してある。

HDPE のひずみ 1% 以下の荷重過程では、計算および実測の両曲線は一致している。しかし、これ以外の過程では計算値と実測値の間かなりの差があり、時間-ひずみ分離型と同程度の近似しか得られていない²⁵⁾。以上の結果にひずみ速度の影響はあまり認められない。

PVC では、ひずみ 2% までの荷重と応力緩和過程および $\epsilon_1 = 1.5\%$ の除重過程で、両曲線は良好に一致している。しかし、 $\epsilon_1 = 2\%$ になると、除重時の両曲線は一致していない。

両試料の除重過程の計算曲線は上に凸であり、急速なひずみ回復を示し、応力が 0 となる見掛けの残留ひずみは小さいが、これに対し実測曲線は下に凸であり、ひずみ回復が少なく残留ひずみが大きくなっている。除重時における両曲線のこのような相異は、2 段応力緩和の場合と同様に、実際には塑性的な非可逆性が現れるのに対し、理論にはこのような考慮が含まれていないためであろう。

全般的にみて定速伸長時の各過程において、HDPE の場合よりも PVC の挙動の方が、べき法則近似の積分型多重積分構成方程式によって比較的良好に記述されている。このような傾向は、前報の時間-ひずみ換算型構成方程式の適合性の検討においてもみられている²³⁾。これは PVC が HDPE と比較してあまり顕著な応力緩和を示さないこと、すなわち平均緩和時間が短くより弾性的であることとも関連しているように思われる。緩和時間の大小が重ね合わせ性に関係することは、低密度ポリエチレン延伸物の応力-ひずみ曲線に対する時間-ひずみ換算型構成方程式の適合性の検討においてもみられている²⁶⁾。このような関連性が一般的なものであるかどうかは、更に検討する必要がある。

Fig. 10. Comparisons of the observed values of stress for constant strain rate of loading, unloading and stress relaxation with the calculated values from Eq. (13), (17) and (21).

5. 結 言

PVC および HDPE の核関数をべき法則体近似して、積型式の多重積分型構成方程式の適用性を検討して、次のような結果を得た。

(1) 2 段応力緩和の $\Delta\epsilon > 0$ の場合、計算値は実測値を大体予測できるが、 $\Delta\epsilon < 0$ の場合実測値を全く再現できない。

(2) 定速伸長荷重過程では、広い速度範囲にわたって核関数が重ね合わせの式を対数尺度の精度で満足している。詳細に見ると、HDPE の 1 % 以下の定速伸長荷重過程、PVC の 2 % 以下の荷重と応力緩和過程および 1.5 % 以下の除重過程では、計算値と実測値が良好に一致する。

2 段応力緩和および定速伸長の両挙動において共通的なことは、ひずみを増加させた場合の挙動は構成式をほぼ満足するが、ひずみを減少させた場合の挙動は構成式によって十分記述できないことである。この点を解決するためには、構成方程式の中に塑性の影響を考慮する必要があるものと考えられる。

文 献

- 1) Green, A.E., and R.S. Rivlin, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **1**, 1 (1957).
- 2) Green, A.E., R.S. Rivlin, and A.J.M. Spencer, *ibid.*, **3**, 82 (1959).
- 3) Green, A.E., and R.S. Rivlin, *ibid.*, **4**, 387 (1960).
- 4) Pipkin, A.C., *Rev. Mod. Phys.*, **36**, 1034 (1964).
- 5) Nakada, O., *J. Phys. Soc. Japan*, **15**, 2880 (1960).
- 6) Pipkin, A.C., and T.G. Rogers, *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, 59 (1968).
- 7) Lockett, F.J., *Int. J. Eng. Sci.*, **3**, 59 (1965).
- 8) Lockett, F.J., and R.O. Stafford, *ibid.*, **7**, 917 (1969).
- 9) Stafford, R.O., *J. Mech. Phys. Solids*, **17**, 399 (1969).
- 10) Findley, W.N., and K. Onaran, *Trans. Soc. Rheol.*, **12**, 217 (1968).
- 11) Lai, J.S.Y., and W.N. Findley, *ibid.*, **12**, 243, 259 (1968).
- 12) Lai, J.S.Y., and W.N. Findley, *ASME, J. Appl. Mech.*, **36**, 22 (1969).
- 13) Nolte, K.G., and W.N. Findley, *ibid.*, **36**, 441 (1970).
- 14) Onaran, K., and W.N. Findley, *ibid.*, **37**, 30 (1971).
- 15) Smart, J., and J.G. Williams, *J. Mech. Phys. Solids*, **20**, 325 (1972).
- 16) Ward, I.M., and E.T. Onat, *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 217 (1963).
- 17) Hadley, D.W., and I.M. Ward, *ibid.*, **13**, 397 (1965).
- 18) Ward, I.M., and J.M. Wolfe, *ibid.*, **14**, 131 (1966).
- 19) Morgan, C.J., and I.M. Ward, *ibid.*, **19**, 165 (1971).
- 20) Foot, C.J., and I.M. Ward, *ibid.*, **20**, 165 (1972).
- 21) 木村博, 山口拓治, 井町正樹, 柳川昭明, 材料, **21**, 463 (1972).
- 22) 山口拓治, 笠嶋文夫, 柳川昭明, 木村博, 繊維学会誌, **32**, T-237 (1976).
- 23) 山口拓治, 笠嶋文夫, 柳川昭明, 木村博, 日本レオロジー学会誌, **4**, 72 (1976).
- 24) 山口拓治, 柳川昭明, 木村博, 川端季雄, 河合弘廸, 材料, **22**, 454 (1973).
- 25) 山口拓治, 柳川昭明, 木村博, 繊維学会誌, **32**, T-227 (1976).
- 26) 山口拓治, 柳川昭明, 木村博, 繊維学会誌 (投稿中).