ノート

On the Discharge of Powder by Pressure Distribution in Two-Dimensional Hoppers of Various Shapes

by

Akira TAKAMI

(Yamawaki Gakuen, Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107)

The discharge of powder from a hopper under gravity is often stopped by the formation of bridging. The shape of hopper exerts a distinguished influence on bridging. The formation of bridging has been recognized by the fact that the bottom pressure becomes independent of the height of powder bed.

The pressure distribution in powder is calculated by solving the fundamental equation for the mechanical equilibrium in a two-dimensional model of asymmetric hoppers. Effect of the hopper shape on the formation of bridging is studied in the light of the calculated dependence of bottom pressure on the height of powder bed. The theoretical tendency of the discharge of powder seems to agree with the experimental one in some cases.

ホッパーの形状と粉体排出との関連性

高 見 昭*

(原稿受理：1976年12月1日)

1. は し が き

ホッパーに充てんされた粉体を重力の下に排出する場合、架橋現象を起こして、排出が止まり、流れなくなることがある。そのため、排出口付近をたたいたり、かきまわしたりしなければならない。ホッパーから粉体を連続的に排出することは流れ作業の工程においては重要であり、種々の対策が施されている¹⁾。また、排出についての実測や研究もある²⁾。粉体の排出の難易について、対称ホッパーである円すい型と双曲型との場合の比較を既に発表した³⁾。

本報では、この問題についてホッパー内の圧力分布の見地からその形状と排出難易との関連性を解析してみた。筆者は既に円筒容器⁴⁾、円すい容器⁵⁾における粉体の圧力分布について取り扱ったが、その際には半径方向にも圧力分布があり、同一水平面上で圧力一定でないとした。しかし、ここでは半径方向には圧力分布がなく、同一水平面上で圧力一定とした。

2. 基礎方程式

2次元非対称ホッパーに粉体を充てんし、自由表面を水平にする。二つの傾斜壁面の延長上の交点Oを原点とする (Fig. 1)。

いま、粉体内に原点Oから h の距離にある厚さ dh の薄層ABCDを考えよう。AB面での下向きの力は、

Fig. 1. Powder filled in an asymmetric two-dimensional hopper.

* 山脇学園 東京都港区赤坂

$$(P+dP)h(\tan \theta_1 + \tan \theta_2) \quad (1)$$

で与えられ, CD 面での上向きの力は,

$$Ph(\tan \theta_1 + \tan \theta_2) \quad (2)$$

で与えられ, 重力による下向きの力はかさ密度を γ として,

$$h(\tan \theta_1 + \tan \theta_2)\gamma g dh \quad (3)$$

で与えられる.

次に, 壁面摩擦による力は円すい容器の場合^{5),6)}と同様にして,

$$\begin{aligned} & \frac{dh}{\cos \theta_1} \mu_w (k \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) P \cos \theta_1 \\ & + \frac{dh}{\cos \theta_2} \mu_w (k \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) P \cos \theta_2 \quad (4) \end{aligned}$$

で与えられる. ただし, ここに μ_w は壁面摩擦係数, k はランキン係数である. ランキン係数 k は粉体の内部摩擦角を ϕ とすれば,

$$k = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (5)$$

で与えられる. 粉体の内部では k, μ_w を一定とする.

薄層 ABCD における力のつりあいから,

$$\begin{aligned} & (P+dP)h(\tan \theta_1 + \tan \theta_2) + h(\tan \theta_1 + \tan \theta_2)\gamma g dh \\ & = Ph(\tan \theta_1 + \tan \theta_2) + \frac{dh}{\cos \theta_1} \mu_w (k \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) \\ & \quad \times P \cos \theta_1 + \frac{dh}{\cos \theta_2} \mu_w (k \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) P \cos \theta_2 \quad (6) \end{aligned}$$

となる. 式 (6) の両辺を $h(\tan \theta_1 + \tan \theta_2)dh$ で割ると,

$$\frac{dP}{dh} \frac{\mu_w (k \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + (k \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)}{\tan \theta_1 + \tan \theta_2} P = -\gamma g \quad (7)$$

となる. ここで, 原点 O と粉体自由表面との距離を H とすれば, 粉体の自由表面における圧力は 0 だから, 境界条件は

$$P=0, \quad h=H \quad (8)$$

である. いま,

$$\alpha = \frac{\mu_w \{ (k \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + (k \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) \}}{\tan \theta_1 + \tan \theta_2} \quad (9)$$

とおいて, 式 (9) を式 (7) へ代入して,

$$\frac{dP}{dh} - \frac{\alpha}{h} P = -\gamma g \quad (10)$$

を得る. 式 (10) を解いて境界条件 (8) を考慮すれば,

$$P = \frac{\gamma g h}{\alpha - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{h}{H} \right)^{\alpha-1} \right\} \quad (\alpha \neq 1) \quad (11)$$

$$P = \gamma g h \ln \left(\frac{h}{H} \right)^{-1} \quad (\alpha = 1) \quad (12)$$

を得る.

次に, 原点 O から排出口までの距離を h_0 , 粉体の層高を y とすれば,

$$h = h_0, \quad H = y + h_0 \quad (13)$$

となり, 式 (13) を式 (11), (12) へ代入して,

$$P_b = \frac{\gamma g h_0}{\alpha - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{h_0}{y + h_0} \right)^{\alpha-1} \right\} \quad (\alpha \neq 1) \quad (14)$$

$$P_b = \gamma g h_0 \ln \left(\frac{h_0}{y + h_0} \right)^{-1} \quad (\alpha = 1) \quad (15)$$

が得られる. 式 (11), (12) はホッパー内の圧力 P を与え, 式 (14), (15)

はホッパーの底圧 P_b を与える式である.

3. 定数 α と底圧 P_b

2 次元ホッパーの形状として 4 種類 ①~④ とする (Fig. 2). ホッパー ①, ② はそれぞれ 60° および 30° の角すいホッパー, ③ は垂直壁を有するもの, ④ は非対称ホッパーの性能をもつと

Fig. 2. Two-dimensional hoppers of various shapes.

Table I. Calculated values of the bottom pressure, $P_b/\gamma g$, as function of the height of powder bed y .

y (cm)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_b/\gamma g$											
①	0.0	1.0	1.9	2.8	3.7	4.5	5.3	6.1	6.9	7.7	8.5
②	0.0	1.0	1.9	2.9	3.8	4.7	5.6	6.4	7.3	8.1	9.0
③	0.0	1.0	1.9	2.9	3.7	4.6	5.5	6.3	7.1	7.9	8.7
④	0.0	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6	5.5	6.3	7.1	7.9	8.7

Fig. 3. Relation between $P_b/\gamma g$ and y .

考えられる。

ホッパーの形状が異なると式(9)の θ_1, θ_2 が変わることになり、 α も変わる。したがって、 θ_1, θ_2 はそれぞれ① $\theta_1=\theta_2=30^\circ$ 、② $\theta_1=\theta_2=15^\circ$ 、③ $\theta_1=30^\circ, \theta_2=0^\circ$ 、④ $\theta_1=15^\circ, \theta_2=30^\circ$ であるので、①～④の排出口がすべて3cmとすれば、 h_0 の値はそれぞれ①2.6cm、②5.6cm、③5.2cm、④3.5cmとなる。いま、 $k=0.1$ 、 $\mu_w=0.3$ 、 $\gamma=1.5\text{g/cm}^3$ なる値の場合を考えれば、 α の値はそれぞれ①0.17、②0.18、③0.22、④0.17となる。ホッパー①～④について、 $P_b/\gamma g \sim y$ 関係を計算すれば、それぞれのホッパーの底圧と層高との関係の相違が知れる (Table I, Fig. 3)。

4. 架橋状況

粉体がホッパー内において架橋を起こす傾向は程度の差はあるが、一般的に見られることであって、そのことは底圧がある層高以上になると層高に無関係になることから知れる。この状態で $P_b/\gamma g$ は一定値になるが、青木はこれを $(P_b/\gamma g)_m$ で表し、 $(P_b/\gamma g)_m/D_0$ を排出係数(D_0 は排出口を円としたときの直径)として、ホッパー①～④の排出係数を測定している (Table II)²⁾。これが架橋状況を表す因子、すなわち排出の難易を示すものであり、排出の容易な順位として粗充てんにおいては、(イ)③→②→①、④、密充てんにおいては、(イ)③→①→④→②となっている。

Table II. Coefficient of exhaust of various shaped hoppers.

Hopper packing	①	②	③	④
loose	0.423	0.432	0.721	0.423
close	0.313	0.270	0.405	0.281

式(14)、(15)によれば、 $\alpha > 1$ の場合には層高 y の増加とともに次第に P_b の増加割合は減少し、 P_b は極限值 $\gamma g h_0/(\alpha - 1)$ になるが、 $\alpha \leq 1$ の場合には $y \rightarrow \infty$ に対しては $P_b \rightarrow \infty$ となる。排出係数の定義の条件は $P_b/\gamma g$ が一定値になる場合、すなわち $\alpha > 1$ の場合であるが、 $\alpha \leq 1$ の場合、ある層高における $P_b/\gamma g$ に着目すれば、Table I, Fig. 3 から $y=10\text{cm}$ では排出の容易な順位として、(ウ)②→③、④→①となり、また粉体が $k=0.05$ 、 $\mu_w=0.2$ であれば、 $y=10\text{cm}$ では、(ニ)②→③→④→①、 $k=\mu_w=0.5$ であれば、(オ)①→④→②、③となる (Table III)。

Table III. Calculated values of $P_b/\gamma g$ (cm) at $y=10\text{cm}$ for four types of hoppers.

Hopper	1	2	3	4
k, μ_w				
k 0.1 μ_w 0.3	8.5	9.0	8.7	8.7
k 0.05 μ_w 0.2	9.1	9.5	9.3	9.2
k 0.5 μ_w 0.5	6.0	5.7	5.7	5.9

5. あとがき

ホッパーの形状が粉体排出に及ぼす影響についての測定例が乏しいことは前報同様であり³⁾、より多くの測定例を必要とし、測定例の数に問題はあるが、上述の測定例の範囲内で考察した。

双曲型ホッパー³⁾についても青木は述べているが²⁾、原点の決定や計算などに仮定を多く必要とするので取り扱わなかった。なお、双曲型ホッパーに近似した折線ホッパーの検討もあるが、取り扱わなかった⁷⁾。

壁面摩擦係数、ランキン係数の値を壁面摩擦角、内部摩擦角から得られた値を使用して定めないので、すでに発表した取り扱い同様⁴⁾⁵⁾パラメーターとして取り扱った。したがって、壁面摩擦係数、ランキン係数を含む α も影響されることになる。

式(9)において、 θ_1, θ_2 を一定にして μ_w, k を変えることは同一ホッパーで異なる粉体を考えることに対応し、 μ_w, k を一定にして θ_1, θ_2 を変えることは異なる型のホッパーで同一粉体の排出を考えることに対応する。

実測 (イ)、(イ)と計算 (ウ)、(ニ)、(オ)とを比較すれば、排出性が(イ)の②の方が①よりよいということは(ウ)、(ニ)に類似し、(イ)の③の方が①よりよいということは(ウ)、(ニ)に類似している。また、(イ)の①→④→②は(オ)と類似している。したがって、 k, μ_w を適当にきめることによって、計算値で青木の測定値²⁾の傾向を示せるものとおもわれる。

ホッパーからの粉体排出の難易には種々の因子があり、複雑であって²⁾、一義的に計算されるものでなく、測定値の計算による説明も簡単ではないが、底圧と層高との関係から粉体排出を考察した。

本報では、同一水平面上で圧力一定としたが、もし同一水平面上で半径方向にも圧力分布があるとすれば、円筒容器⁴⁾、円すい容器⁵⁾の場合同様に測定値が必要になる。しかし、本報で取り扱ったような4種類の形状のホッパーにおける測定値は得られていないので、前報³⁾同様同一水平面上で圧力一定と仮定した。したがって、4種類のホッパーの場合における比較のとき、いずれも同一水平面上で圧力一定という同じ仮定の下に解析した。このような仮定は、粉体内の圧力を取り扱う場合に、従来一般に行われている仮定である^{2),6),8),9),10)}。また、粉体排出の圧力分布を静的状態の圧力分布にならって表現したが、このような取り扱いも従来行われている⁸⁾。

(昭和51年10月30日 第24回レオロジー討論会にて発表)

参 考 文 献

- Georges, P., サイロ並びにホッパー内での流動性の悪い粉粒体の流れに関する講演録 (1971).
- 青木隆一, 化学工学, **25**, 281 (1961).
- 高見昭, 日本レオロジー学会誌, **4**, 78 (1976).
- Takami, A. and S. Oka, *Powder Technol.*, **10**, 295 (1974); 高見昭, 日米レオロジー学会合同会議 (1975).
- Takami, A., *Powder Technol.*, **14**, 1 (1976).
- 青木隆一, 粉体工学研究会資料, No. 35 (1961).
- 狩野武, 私信 (1976).
- 篠原邦夫, 田中達夫, 第11回粉体に関する討論会講演要旨集, p. 55 (1973).
- Theimer, O.F., *Aufbereitungs-Technik*, **Nr. 6**, 318 (1971).
- 飯田正俊, 化学工学, **22**, 437 (1958).

使 用 記 号

P ホッパー内の粉体圧 [g/cm²]

P_b	ホッパー内の粉体底圧 [g/cm ²]	θ_2	非対称ホッパーの壁面と軸とのなす角 [度]
γ	かさ密度 [g/cm ³]	H	自由表面と原点との距離 [cm]
k	ランキン係数 [—]	h_0	排出口と原点との距離 [cm]
ϕ	内部摩擦角 [度]	h	薄層と原点との距離 [cm]
μ_w	壁面摩擦係数 [—]	$\mathcal{Y}$	自由表面と排出口との距離 [cm]
θ_1	非対称ホッパーの壁面と軸とのなす角 [度]		