論 文

Heat Effect and Temperature Rise in Circular Tube Viscous Flow

by

Akira OOIWA and Kimio KURASE

(National Research Laboratory of Metrology, 10-4, 1-chome, Kaga, Itabashi-ku, Tokyo 173)

The viscous heat effect on the fluid temperature is investigated in circular tube flow. Approximate mathematical solutions are given for the temperature distribution of fluid over the cross section of a circular tube and also for the temperature rise of fluid along the tube in consideration of heat conduction through the tube wall.

In the case of liquid flow, the temperature rise ΔT at the exit of the tube is related to the pressure drop Δp through the tube by the following approximate equation.

$$\Delta T = A \times \left(1 - \exp \left[-\frac{1}{Ac\Delta p} \right] \right) \times \Delta p^2,$$

where $A = \frac{a^4}{16\eta l^2} \left(\frac{\ln(b/a)}{\kappa_e} + \frac{5}{24\kappa_f} \right),$

a : internal radius of tube

b : external radius of tube

l : length of tube

κ_e : thermal conductivity of tube

κ_f : thermal conductivity of liquid

c : volumetric heat capacity of liquid

η : viscosity of liquid.

The temperature rises calculated by this equation generally agree with those obtained by experiments.

In the case of gaseous flow where the sample gas is regarded as an ideal gas, it is concluded theoretically that the heat energy due to viscous resistance is spent in compensation for the reduction of internal energy due to the bulk expansion of flowing gas with the decrease of pressure, and consequently, temperature of flowing gas is kept constant.

細管中の粘性流動による発熱と試料の温度上昇

大 岩 彰 ・ 倉 瀬 公 男*

(原稿受付: 1979年1月10日)

1. 緒 言

細管法による流体の粘度測定は、代表的な測定法として古くから重視され、特に絶対測定と言われる実験の多くにはこの方法が

用いられて来た。細管法によって流体の粘度を測定する際の問題点には、管端の影響、運動エネルギーの補正、気体における管壁での滑りの影響等があるが、これらの問題についての議論は、今までに多くなされている。ここでは、上記以外の問題点として、液体および気体の粘性流動による発熱の効果をとり上げて考察検

* 計量研究所 東京都板橋区加賀1丁目10番4号

討した。円筒細管*中における粘性流動に伴う発熱の問題については、過去何人かの人々によって検討されているが^{1)~4)}、その多くは境界条件として、管内壁において等温状態もしくは断熱状態を仮定して、管内の温度分布や温度上昇量を求めている。これらの結果は、管材質の熱伝導率を、無限大もしくは零と見なせる場合に適用できる。しかし、管材質の熱伝導率が試料流体の熱伝導率と同程度の大きさをもつ場合、または管の肉厚が管内径に比して無視できない場合には、そのまま適用することはできない。そこで筆者らは、粘性発熱による流体の温度上昇に関し、管の熱伝導が無視できない場合について理論的考察を行った。流体が液体の場合については、考察結果と実験結果との比較を行い、考察の妥当性を確かめた。また、流体が気体の場合については、粘性流動に伴う発熱の効果に関して、細管中の気体粘性流を扱っている文献の多くが言及していないので、ここに合わせて論ずる。

2. 理 論

理論式を立てるために、Fig. 1に示すように内半径 a 、外半径 b 、長さ l の細管に対して軸上に z 軸を持ち、半径方向に r 軸をもつ円筒座標を当てはめる。管中を流れる流体の運動方向と z 軸の方向は一致しているとする。

対象系を数学モデルとして理論的に解くために、以下に述べる幾つかの仮定を設ける。

1. 流体はニュートン流体である。
2. 管中の流れは層流で定常状態にある。また、熱的にも定常状態にある。
3. 管端効果については無視する。
4. 管壁での流体の滑りはない。
5. 流体速度は z 方向成分のみである。
6. 重力等の外力の影響は無視できる。
7. 粘度および熱伝導率は、管中において一様かつ一定である。
8. 管外壁温度と流入時の流体温度は一致し、一定である。
9. z 方向への伝導による熱伝達は無視する。
10. 液体流の場合には、非圧縮性流体と見なせる。気体流の場合には、理想気体と見なせる。

2・1 細管内の流速分布

仮定 1～7 により、管内の流れはポアズユ流として表され

Fig. 1 Dimensions and cylindrical coordinates of a circular tube.

* 本論文では、1 mm オーダーの内径を持つ細管を想定しているが、内径がこれよりも大きい、または小さい円筒管についても、流れが層流条件を満足していれば、本論文の議論は、そのまま当てはまると考えられる。以下簡単のため“細管”または単に“管”と書く。

る。ポアズユ流における管内の流速分布 $u(r)$ と体積流量 Q は、次式で表せる。

$$u(r) = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2) \quad (1)$$

$$Q = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{dp}{dz} \quad (2)$$

液体については、流速および体積流量は z 方向で変化しない。気体については、流れによる圧力の低下とともに体積膨張するので、流速、体積流量ともに位置 z の関数になり、下流に行くほど増加する。このとき、式(1)と(2)の両式は近似式と考えられ、気体流の膨張速度が大きくなるほどこの近似は悪くなる。

2・2 熱エネルギー方程式

一般に、物質の温度を決める要素は熱輻射を別にすれば、次の3つが考えられる。

(1) 発熱または吸熱 流動摩擦、化学反応、膨張収縮等によって熱エネルギーと他のエネルギーとの間の変換が行われる。この単位体積当たりの発熱量を σ で表す。

(2) 熱伝導 温度勾配 ∇T があると熱伝導率 κ に比例する熱流束 $\mathbf{W} = -\kappa \nabla T$ が生ずる。

(3) 対流伝熱 温度勾配 ∇T のある所で、流速 $\mathbf{u}$ で物質が移動すると、これは温度変化 $-\mathbf{u} \cdot \nabla T$ をもたらす。

以上の3つの要素をまとめて、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{c} (\sigma - \text{div } \mathbf{W}) - \mathbf{u} \cdot \nabla T \\ &= \frac{1}{c} (\sigma + \kappa \nabla^2 T) - \mathbf{u} \cdot \nabla T \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 c は単位体積当たりの熱容量である。

ここで、Fig. 1で示される細管について式(3)を当てはめて、その定常状態における解を求めてみる。仮定 4～8 により温度 T 、流速 u および発熱 σ は (r, z) で決まる同一円周上では同じ値を持つと考えられるので、式(3)は次式に変形できる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c} \left[\sigma + \kappa \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} \right] - u \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3')$$

定常状態(仮定 2)の場合、 $\partial T / \partial t = 0$ であるから、式(3')の左辺は零で置き換えられる。また、管径に比べて管長が充分に大きい場合は、 z 方向の伝導熱量は、 r 方向の伝導熱量に比べて小さく、温度分布に与える影響は無視できる(仮定 9)と考えられる。以上の点を考慮して、細管内部等の温度分布を与える方程式を導くと次のようになる。

管内部 ($0 \leq r < a$) においては、式(3')より次式が成り立つ。

$$0 = \frac{1}{c} \left\{ \sigma + \kappa_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right\} - u \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4)$$

ここに、 κ_f は流体の熱伝導率である。

管部 ($a \leq r < b$) において、発熱および対流が無い ($\sigma = 0, u = 0$) ので、管単位長さあたりの管壁を通しての流出熱量 L を積分定数として次式を得る。

$$L = -2\pi \kappa_s r \frac{\partial T}{\partial r} \quad (5)$$

ここに、 κ_s は管材質の熱伝導率である。

管外部 ($b \leq r$) においては、温度一定(仮定 8)なので、次式が成り立つ。

$$T(r, z) = T_0 \quad (\text{一定}) \quad (6)$$

2・3 発熱と温度上昇

細管内に層流条件を満足する流れがあるとき、管外壁と流入時

の流体の温度が、一定に保たれているとしても、粘性流動に伴う発熱によって、流体温度は変化する事が考えられる。気体の場合は、この発熱の効果に加えて、圧力低下に伴う膨張吸熱の効果がある。それぞれの場合について検討してみる。

2・3・1 液体における流動発熱の効果

粘性の定義により、発熱量 σ は粘度 η の液体に対して、次式で与えられる。

$$\sigma = (\text{剪断応力}) \times (\text{速度勾配}) = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (7)$$

流速 u は式(1)で表されるから、これを用いて σ は次式で表せる。

$$\sigma(r) = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 r^2 \quad (8)$$

上式(8)を用いて単位時間、単位管長当たりの発熱量 Q を求めると次式を得る。

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 = - \frac{d}{dz} (pq) \quad (9)$$

上式(9)の最右辺の項 $-d(pq)/dz$ は、圧力 p によって力学的になされる、単位時間当たりの仕事を管長方向 z で微分したものである。

式(8)、(9)を2・2で得られた結果に適用して、平衡状態における温度分布を求める。流入時の流体温度は管外部の雰囲気温度 T_0 と一致している(仮定8)が、流れるに従って流体温度は上昇し、充分な距離を流れると、流体内で粘性流動によって発生する熱量と管内外壁間の温度差によって、管壁を通して管外へ流出する熱量が平衡する点まで達する。平衡に達すれば、管軸方向での温度変化は無くなり、 $\partial T/\partial z = 0$ が成り立つ。実際問題としては、平衡状態に至るまでの温度上昇過程について知ることが重要であるが、その前に平衡状態における温度分布を求める。

温度分布を与える方程式は、式(4)、(5)および式(6)において、 $\partial T/\partial z = 0$ 、 $L = Q$ と置くことにより得られ、次の諸式で表される。

$$\text{管内部 } (0 \leq r < a): \sigma = -\kappa_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (10)$$

$$\text{管部 } (a \leq r < b): Q = -2\pi r \kappa_c \frac{\partial T}{\partial r} \quad (11)$$

$$\text{管外部 } (b \leq r): T = T_0 \text{ (一定)} \quad (12)$$

$r=0$ で $\partial T/\partial r = 0$ という条件で、上式(10)、(11)および式(12)を解いて平衡状態における温度分布 $T(r)$ を求めると、次式の結果を得る。

$$T(r) = \begin{cases} T_0 + \frac{Q}{2\pi\kappa_c} \ln \frac{b}{a} + \frac{Q}{8\pi\kappa_f} \left(1 - \frac{r^4}{a^4} \right) & (0 \leq r \leq a) \\ T_0 + \frac{Q}{2\pi\kappa_c} \ln \frac{b}{r} & (a \leq r \leq b) \\ T_0 & (b \leq r) \end{cases} \quad (13)$$

この平衡状態における温度分布を模式的に示したのが Fig. 2 である。

管内断面を通過する流体の平均温度 T_a を次式

$$T_a(z) = T_0 + \Delta T = \frac{1}{Q} \int_0^a T(r, z) u(r) \cdot 2\pi r dr \quad (14)$$

で定義すると、平均温度上昇量 $\Delta T(z)$ は $T_a - T_0$ で表される。平衡状態における平均温度上昇量 $\Delta T_e = \Delta T(z \rightarrow \infty)$ は、式(13)の結果を用いて次式のように書ける。

$$\Delta T_e = \Delta T_{ec} + \Delta T_{ef} = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{\ln(b/a)}{\kappa_c} + \frac{5}{24\kappa_f} \right) \quad (15)$$

ここに、 ΔT_{ec} と ΔT_{ef} はそれぞれ平衡状態における管内外壁間

Fig. 2 Temperature distribution over the cross section of a tube with liquid flow, when viscous heat supply and heat drain through the tube wall by conduction are in equilibrium.

の温度差と、管内壁温度と液体平均温度の差である。

次いで、温度上昇過程について検討してみる。管長が充分長ければ、温度 T_0 で流入した流体は、流出端に至るまでに平衡状態に達するはずである。しかし、実際には管の長さが充分でなく、平衡状態に達する前の温度上昇過程の状態で流出して来ると考えられる。そこで、温度上昇量と管長との関係を検討、評価する。温度上昇過程における流体温度の上昇速度は、粘性流動による発熱量 Q と管壁を通して流出する熱量 L の差 $Q - L$ に比例すると考えられる。更に流体の温度が上昇するにつれて管内外壁間の温度差 ΔT_e が大きくなり、流出熱量 L は Q に近付いて行く。この議論を定式化すると次の方程式が導かれる。

$$\frac{1}{c} (Q - L) - q \frac{\partial T_a}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

ここに、 T_a は式(14)で定義される平均温度である。式(16)は、式(4)の管内断面にわたる積分形である。一方、流出熱量 L は式(5)を用いて、管内外壁間の温度差 ΔT_e と関係付けられ、次式で表せる。

$$L = \frac{2\pi\kappa_c}{\ln(b/a)} \Delta T_e \quad (17)$$

式(16)の方程式を解くためには、更に管内外壁間の温度差 ΔT_e と平均温度 T_a の関係、すなわち ΔT_e と $\Delta T_f (= T_a - T_0 - \Delta T_e)$ との関係が決まらなければならない。付録にある計算機による数値計算の結果によると、温度上昇過程で、 $\Delta T_f/\Delta T_e \propto \Delta T_e$ なる関係がほぼ成り立っている。そこで、 $\Delta T_f/\Delta T_e = \alpha \cdot \Delta T_e$ と置き式(15)、(17)を用いて、方程式(16)を境界条件($z=0$ で $\Delta T_e=0$)で解いて、平均温度上昇量 ΔT を与える式を求めると次式を得る。

$$\Delta T = \Delta T_e (1 + \alpha \cdot \Delta T_e) \quad (18)$$

ここに、

$$\alpha = \frac{1}{\Delta T_{ec}} \frac{5\kappa_c}{24\kappa_f \ln(b/a)}$$

また、

$$\Delta T_e = \Delta T_{ec} \left(1 - \exp \left[-\frac{z}{z_{01}} - \frac{\Delta T_e}{\Delta T_{01}} \right] \right) \quad (19)$$

$$z_{01} = -\frac{ca^4}{16\eta} \frac{dp}{dz} \left(\frac{\ln(b/a)}{\kappa_c} + \frac{5}{12\kappa_f} \right)$$

$$\Delta T_{01} = \frac{a^4}{16\eta} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 \left(\frac{12\kappa_f \ln(b/a)}{5\kappa_c} \right) \cdot \left(\frac{\ln(b/a)}{\kappa_c} + \frac{5}{12\kappa_f} \right)$$

上式(18)によって温度上昇量 ΔT を求めるためには、式(19)を用いて ΔT_e を算出しなければならないが、式(19)は ΔT_e について陰関

数になっており、計算機等を用いなく ΔT_e を容易に求めることはできない。管部の熱伝導率が比較的小さいか、または管肉厚が大きく、管部の温度差 ΔT_e が管内流体の温度差 ΔT_f に対して大きくなる場合については、 $\Delta T_f/\Delta T_e$ の評価誤差が、温度上昇速度に与える影響は、相対的に小さくなると考えられる。そこで、表式を簡単にするために $\Delta T_f/\Delta T_e = \text{一定}$ と置いてみる。この関係は、平衡状態において成立するもので、平衡状態から離れた温度上昇過程にあるほど実際のとの差が大きい。式(18)と(19)を求めたときと同様にして、 $\Delta T_f/\Delta T_e = \text{一定}$ の条件で式(16)を解くと、温度上昇量 ΔT は次式で与えられる。

$$\Delta T = \Delta T_e \left(1 - \exp \left[-\frac{z}{z_{02}} \right] \right) \quad (20)$$

ここに、

$$z_{02} = -\frac{ca^4}{16\eta} \frac{dp}{dz} \left(\frac{\ln(b/a)}{\kappa_c} + \frac{5}{24\kappa_f} \right)$$

上式(20)を用いて、管流出端における流体の温度上昇量 ΔT_l を得るには、式(9)および(15)を代入して、式中の変数 z および dp/dz をそれぞれ管長 l および圧力勾配 $-\Delta p/l$ で置き換えてやれば良い。 ΔT_l は次式で表される。

$$\Delta T_l = A \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{AC\Delta p} \right] \right\} \Delta p^2 \quad (21)$$

ここに、

$$A = \frac{a^4}{16\eta l^2} \left(\frac{\ln(b/a)}{\kappa_c} + \frac{5}{24\kappa_f} \right)$$

管長 l が充分長ければ、もしくは差圧 Δp が充分小さければ、式(21)の $\exp[-1/(AC\Delta p)]$ の項は、1 に比べて充分小さくなり、そのとき温度上昇量 ΔT_l は、平衡に達した場合の温度上昇量 ΔT_e に一致する。実際には管長 l の長さは限られているので、発熱量が大きくなるにつれて平衡状態からのずれが顕著になってくる。この点を吟味するために、単位時間、単位体積当たりの平均発熱量 $H = Q/(\pi a^2)$ と、温度上昇量 ΔT_l との関係を式(21)より求める。

$$\Delta T_l = BH \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\Delta p}{BHc} \right] \right\} \quad (22)$$

ここに、

$$B = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\ln(b/a)}{\kappa_c} + \frac{5}{24\kappa_f} \right)$$

上式(22)によれば、平衡状態における温度上昇量は、 $\Delta T_l = BH$ と表されることがわかる。

2・3・2 気体における流動発熱の効果

気体の場合には2・3・1の液体の場合に論じた粘性流動による発熱に加えて、圧力低下に伴う膨張吸熱をも考慮しなくてはならない。一般に、圧力 p が高くなければ、理想気体として扱って良いから、体積流量 q に対して次の状態方程式が成り立つ。

$$pq = mRT \quad (23)$$

ここに、 m はモル流量、 R は気体定数である。流れ全体を力学的に見ると、単位時間、単位管長当たりの流体のなす仕事 E は、次式のように書き表される。

$$E = -\frac{d}{dz}(pq) = -mR \frac{dT}{dz} \quad (24)$$

これは、管長方向 z について温度 T が一定であれば、外部とのエネルギーのやりとりがないことを示している。すなわち、上流側から流入してくる圧力によるエネルギーは、一部粘性流動によって熱エネルギーに変換されるが、これは気体の圧力低下に伴う等温膨張のために用いられ、すべて下流に伝えられていく。

発熱および吸熱分布は、 r 方向で見ても一定ではなく、管内気体温度も流線方向で一定であるとしても、 r 方向で見れば不均一になっていると考えられる。その不均一の程度について検討してみる。単位時間、単位体積当たりの発熱量 σ は、粘性流動による発熱量 σ_v と膨張による吸熱量 σ_p の和で表される。 σ_v と σ_p および σ はそれぞれ次式(24)、(25)および式(26)で示される。

$$\sigma_v = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 r^2 \quad (24)$$

$$\sigma_p = u \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 (a^2 - r^2) \quad (25)$$

$$\sigma = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 (2r^2 - a^2) \quad (26)$$

液体の場合と同様にして、式(26)を用いて温度分布を求めると、次式(27)を得る。

$$T(r) = \begin{cases} T_0 - \frac{(r^2 - a^2)^2}{32\eta\kappa_f} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 & (0 \leq r \leq a) \\ T_0 & (a \leq r) \end{cases} \quad (27)$$

一般の気体の場合、この不均一の大きさは、2で述べた仮定を満足する範囲では 10^{-4}K 以上にはならない。

以上の考察結果からみて、気体の場合は粘性摩擦による発熱が試料流体の温度に及ぼす影響については無視して差し支えないと言える。気体の場合に、温度不均一をもたらし要因となりうるのは、むしろ流入端と管中における加速部分、および流出端における減速部分での圧力（熱）エネルギーと運動エネルギーの間の変換過程に伴う温度の低下および上昇である。気体の粘度測定においては、この影響を許容誤差の大きさより小さくすることが重要である。これらの管端効果等の問題は、本論文の範囲外である。

3. 実験結果と考察

2で得られた理論式の妥当性を検討するために、われわれの行った実験の結果⁵⁾と理論式による計算結果を比較してみる。

3・1 実験

Fig. 3 A schematic diagram of a temperature rise measuring system, the main part of which is a variable-pressure type viscometer.

実験に用いた装置の概要と構成を Fig. 3 に示す。測定には、加圧形の細管式粘度計を用い、粘度測定と温度上昇量の測定を同時に行った。粘度計は自動制御式の恒温水槽内に置き、20°C、30°C、40°C の各温度の下で、種々の差圧 $0.5 \sim 2.5 \times 10^5$ Pa [0.5 ~ 2.5 atm.] について測定を行った。液体の温度上昇量は、恒温水槽内温度と管流出端における温度の差をサーミスター温度計を用いて測定して求めた。試料液体の粘度は、粘度計本体の測時球 (Timing bulb) 上下の標線を液体表面が通過する時間間隔より求めた。試料液体には、ニュートン流体と見なせる鉱油を用いた。

3・2 実験結果と理論式との比較

実測値と理論値との比較の結果を Fig. 4 (a) および Fig. 4 (b) に示す。Fig. 4 (a) では、横軸に管端間に加えた差圧をとり、縦軸に管流出端における温度上昇量をとった。測定結果を Δ (20°C)、 $\circ$ (30°C) および $\times$ (40°C) で示す。各温度について、曲線(1)は式(20)による結果、曲線(2)は式(18)、(19)による結果である。計算に用いた細管と試料液体の各物性値は Fig. 4(a) の中に記し

Fig. 4 Comparison between the experimental results (marks) and theoretical ones (curves); (a) representing the relation between the temperature rise at the exit end of tube ΔT_i and the pressure drop through tube Δp . The theoretical relations are obtained by eq. (21) for curve (1) and by eq. (18) and (19) for curve (2); (b) representing the relation between the temperature rise ΔT_i and the calorific value per unit volume and time H . The meanings of marks and curves are the same as in (a).

た。Fig. 4 (b) では、単位体積当たりの発熱量 H と温度上昇量 ΔT_i との関係を示す。実測値の印と理論式の曲線との対応は、Fig. 4 (a) の場合と同じである。図中の曲線(1)は式(20)の理論式に対応している。Fig. 4 (b) において2点鎖線——で示される直線は、平衡状態における温度上昇量 $\Delta T_e = B \times H$ に対応するものであり、この直線から外れるほど平衡状態から外れた温度上昇過程にあることを意味している。発熱量 H が小さい領域では、理論曲線と実測値はともに平衡状態に漸近している。

3・3 考察

3・3・1 理論式の比較

Fig. 4(a) を見ると、理論解について式(20)による結果 (曲線(1)) と式(18)、(19)による結果 (曲線(2)) の間には最大で約11%の相対差がある。両者の解の差の大きさについて検討する。この差は、 ΔT_e に対する ΔT_f の大きさの評価誤差に原因するものであるから、加圧力が小さく、流出流体温度 ΔT_i が、平衡状態温度 ΔT_e 近くに達している場合 ($\Delta T_i \approx \Delta T_e$) と、加圧力が充分大きく、温度上昇過程の初期にある場合 ($\Delta T_i \ll \Delta T_e$) には、小さいはずである。この両状態の中間領域で、相対差は大きくなる。差の大きさは、 ΔT_e に対する ΔT_{ef} の大きさ、すなわち $\Delta T_{ef}/\Delta T_e$ の大きさに依存し、 $\Delta T_{ef}/\Delta T_e$ が小さいほど差も小さくなる。本実験の場合 $\Delta T_{ef}/\Delta T_e$ の値は、約1.02である。結局、温度上昇量の評価式として式(20)および(20)を用いるには、 $\Delta T_{ef}/\Delta T_e = (5/24) \times \kappa_c / (\kappa_f \ln(b/a))$ の大きさが1程度以下であることを確かめる必要がある。

3・3・2 系統誤差要因

Fig. 4 に示されているように、実測値と理論式による計算値との間には、曲線(1)についても曲線(2)についても、相対偏差が最大10%程度ある。温度20°Cの場合には、実測値は曲線(2)にほぼ一致し、温度30°Cの場合には実測値は曲線(1)と(2)の間に位置し、温度40°Cの場合には、実測値は曲線(1)にほぼ一致している。これらの誤差の原因として系統的と考えられるものについて検討する。

(1) 計算に用いた各物性値のうちで、試料液体の熱容量 c と熱伝導率 κ_f および細管の熱伝導率 κ_c の値として文献値^{(6)~(8)}を引用しており、また温度変化に伴う変動が無視できるとしている。したがって、これら文献値と実際の値との間には、相違がありえ、この違いは直接計算結果の誤差となって現れる。これらの値の温度係数は、それぞれ 1×10^{-3} [1/°C] 程度の大きさであり、20°C の温度変化に対して、温度上昇量 ΔT_i に現れる変動量は、大きくとも4%程度である。

(2) 2 において理論解を得るために設けた仮定と、実験状態との違いが無視しえない場合、系統誤差が生ずる。特に、仮定7 (均一性) は、高発熱状態になるほど実際の差が大きくなる。温度上昇に伴う粘度不均一の影響が最も大きい、実験においてこの大きさは3・3・3で述べるように1%以内だと考えられる。

(3) 管流出端における液体の平均温度 T_a とサーミスター温度計による検出温度との間に差が生ずることが考えられる。この差の大きさは、管内における r 方向の温度不均一の大きさによって決まると思われ、付録に見られるように不均一の程度は、平衡状態からはずれるほど大きくなる傾向がある。よって高発熱の場合ほどこの測定誤差は大きくなる。この誤差の大きさは、測定位置、測定端子の大きさ、構造等によっても変化するものと考えられ、定量的に評価することは難しい。

3・3・3 粘度測定に関連する問題点

一般に、液体粘度は温度とともに減少するが、実験で用いた試料の粘度の温度係数は約 $0.7 \times 10^{-1} [1/^{\circ}\text{C}]$ である。そのために、管内流体が温度分布を持つ場合、粘度が不均一になり、流速分布とともに発熱分布もポアズイユ流の場合からずれてくる。実験において、管内平均温度上昇量は最大で約 0.11°C であるから、そのときの粘度不均一は 0.8% 程度あると考えられる。加圧形粘度計を用いて粘度測定をするには、この温度上昇による誤差を測定精度以内におさえる必要がある。そこで、理論および実験の結果を基にして、温度上昇に関連する測定上の問題点をはっきりさせる。

温度上昇量 ΔT_i と粘度 η 、加圧力 Δp および管内径 a 等の間の関係については、式(20)より次のことが言える。ここで、細管および試料の熱的性質が、常に同じであると仮定している。

(1) 同一細管を用いるとき、温度上昇量 ΔT_i は平衡に達したと仮定したときの温度上昇量 ΔT_e の大きさと、温度上昇過程のどこにあるかを示す量 $\Delta T_i/\Delta T_e$ の大きさによって決まる。 ΔT_e は $\Delta p^2/\eta$ に比例しており、 $\Delta T_i/\Delta T_e$ は $\eta/\Delta p$ の大きさに依存し、 $\eta/\Delta p$ が大きくなるほど、平衡状態の1に近づく。能率的な測定

をするには、測定時間のある程度以内におさえねばならないが、そのために $\Delta p \propto \eta$ となるように加圧力を設定すると、上述の関係から温度上昇量 ΔT_i は η に比例する。よって高粘度領域での測定が困難になる。

(2) 管の内半径 a を変えるとき、同一流量を得るのに要する加圧力 Δp は η/a^4 に比例している。その圧力下では、温度上昇量 ΔT_i は η/a^4 に比例する。よって高粘度領域においては、内径の比較的大きな細管を用いることにより温度上昇を減らすことができる。

以上の2点を考慮して、温度上昇による誤差を測定精度以内におさえることを考えると、加圧形粘度計においてもひとつの細管で測定できる粘度範囲は限られたものであり、広範囲の粘度測定をするためには、適当な内径を持った複数の細管の組を用いる必要があると言える。

おわりに、本論文の執筆にあたり、有益な助言を頂いた計量研究所の川田裕郎第4部長、および有形無形の協力を頂いた第3部レオロジー研究室の方々に深謝いたします。

(昭和53年10月24日、第26回レオロジー討論会にて発表)

List of Symbols

a	: Internal radius of tube	m
b	: External radius of tube	m
c	: Volumetric heat capacity of fluid	$\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1}$
E	: External work performed by pressure per unit length	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$
H	: Calorific value by internal friction per unit volume	$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$
l	: Length of tube	m
L	: Heat drain through tube wall per unit length	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$
m	: Molecular gas flow rate	$\text{mol} \cdot \text{sec}^{-1}$
$p(z)$	: Pressure	Pa
Δp	: Pressure difference through tube	Pa
q	: Volumetric flow rate	$\text{m}^3 \cdot \text{sec}^{-1}$
Q	: Calorific value by internal friction per unit length	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$
r	: Radial distance	m
R	: Gas constant	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
t	: Time	sec
$T(r, z)$	: Temperature	$^{\circ}\text{C}$
$T_a(z)$	: Average flow temperature $= \frac{2\pi}{q} \int_0^a T u r dr$	$^{\circ}\text{C}$
T_0	: Outside temperature of tube	$^{\circ}\text{C}$
$\Delta T(z)$	: Average temperature rise of fluid $= T_a - T_0$	$^{\circ}\text{C}$
ΔT_e	: Average temperature rise of fluid in equilibrium state	$^{\circ}\text{C}$
$\Delta T_e(z)$	: Temperature difference through tube wall	$^{\circ}\text{C}$
ΔT_{ee}	: ΔT_e in equilibrium state	$^{\circ}\text{C}$
$\Delta T_f(z)$	: Temperature difference between fluid and internal tube surface	$^{\circ}\text{C}$
ΔT_{ef}	: ΔT_f in equilibrium state	$^{\circ}\text{C}$
ΔT_i	: Average temperature rise of fluid at the exit end of tube	$^{\circ}\text{C}$
$u(r, z)$	: Velocity of fluid	$\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$
W	: Thermal flow rate	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
z	: Axial distance	m
η	: Viscosity of fluid	$\text{Pa} \cdot \text{sec}$
κ	: Thermal conductivity	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}$

κ_e	: Thermal conductivity of tube	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}$
κ_f	: Thermal conductivity of fluid	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}$
σ	: Calorific value per unit volume	$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$
σ_v	: σ by internal friction	$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$
σ_p	: σ by adiabatical expansion	$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$

文 献

- 1) Hersey, M.D., and J.C. Zimmer, *J. Appl. Phys.*, **8**, 359 (1937).
- 2) Bird, R.B., *SPE J.*, **11**, 35 (1955).
- 3) Toor, H.L., *Ind. Eng. Chem.*, **48**, 922 (1956).
- 4) Gee, R.E., and J.B. Lyon, *Ind. Eng. Chem.*, **49**, 956 (1957).
- 5) 倉瀬公男, 計量研究所報告, **25**, 3, 10 (1976).
- 6) 飯田他編, “物理定数表”, 90 (1969) 朝倉書店.
- 7) 飯田他編, “物理定数表”, 91 (1969) 朝倉書店.
- 8) 東京天文台編, “理科年表”, 物65 (1978) 丸善.

付 録

管内温度分布の計算機による数値計算結果

本文中の式(3)'は z 方向の熱伝導も考慮に入れた方程式であるが, この式を評価式として, 逐次近似法によって管内の温度分布を求めた. 計算に当たっては, 管内を 100×100 の配列に分割量子化した. 計算機は MELCOM COSMO-700 を使用した. 結果を Fig. A に示す. 横軸に規格化した管径距離 $\rho = r/b$ をとり, 縦軸に規格化した温度上昇量 $\theta = \Delta T / \Delta T_e$ をとる. 管流入端からの距離は, 本文中の式(20)における z_{02} を用いて $\zeta = z/z_{02}$ と規格化してある.

平衡状態 ($\zeta \gg 1$) における温度分布は, 本文中の式(13)で表される解析解と一致するはずであるから, 両者の分布の値を比較する

Fig. A Temperature distribution over the cross section of a tube, as a function of reduced axial distance ζ from the entrance end of a tube, calculated numerically with the iterative method applied to eq. (3)'.

ことによりこの数値計算の信頼性を吟味することができる. 両者の相対誤差は最大でも2%以内であり, 管径方向 r の量子化によるまるめ誤差がほぼ2%であることを考慮すると, 数値計算は正しく行われていると判断される.

数値計算によって得られた結果を基に ΔT_f と ΔT_e の関係を調べてみると, 近似的に $\Delta T_f / \Delta T_e \propto \Delta T_e$ なる関係が認められる.