鉬石の粒度分布について

家 安 健 三*

The Distribution of Ore Size

Kenzo IEYASU

1. ま え が き

破碎または粉碎せられた鉬石に対する篩分けの理論式としては、Rosin-Rammler, Gaudin, Roller, 及び Griffiths などの研究がある。ところで、篩分けの基礎理論は、破碎または粉碎された鉬石の粒度分布函数を求めることに他ならないのであつて、これは統計学的に求めることができる筈である。したがつて筆者は鉬石の形を直方体であると仮定して、これに対する重量基準の粒度分布に関する理論式を求め、手許の適当な資料により実測値との比較を行つてみた。なお、このような分布函数を定義することによつて、鉬石の平均粒度、平均表面積、並びに平均体積との間の物理的関連性を明確に規定することができる。

2. 分 布 函 数

理論的考察に於ては、鉬石の形を第1図のように各辺の長さが夫々 l_x 、 l_y 及び l_z の直方体であると仮定す

第1図 理論的取扱い上の鉬石の形

る。いま、任意にとつた破碎れた鉬石の総数を N 箇とし、まづ、その一辺の長さ l_x についてのみ考えることとする。

さて、一辺の長さが l_x と $(l_x + dl_x)$ との間にある鉬石（他の二辺の長さは幾らでもよい）の数を dn_x とすると、 N が充分大であれば、 dn_x は、

- (a) 全体の数 N に比例する。
- (b) 粒度の中 dl_x に比例する。
- (c) 粒度の分布函数 $f(l_x)$ に関係する。

故に、

$$dn_x = N f(l_x) dl_x \quad (1)$$

なる関係式が成立する筈である。したがつて結論的には、この分布函数 $f(l_x)$ を求めることが必要である。ところで N 箇の鉬石を第2図のように l_x の大きいもの

第2図 l_x の分布状態

から順次ならべ、一辺の長さが l_x より大きい鉬石の総数を n_x とすると、

$$\frac{n_x}{N} = \int_{l_x}^{\infty} f(l_x) dl_x \quad (2)$$

となる。また、 Δn_x を一辺の長さが l_x と $(l_x + \Delta l_x)$ との間にある鉬石の数とすると、

$$-\Delta n_x = \alpha n_x \Delta l_x$$

但し、 α : 比例定数

なる関係も得られる。したがつて Δn_x を充分小さくすれば、

受理 昭和37年2月3日

* 工博 愛媛大学助教授

$$-\frac{dn_x}{n_x} = \alpha dl_x$$

となり、上式を積分して、

$$n_x = Ae^{-\alpha l_x}$$

但し、 A ：積分定数

となる。さて、 $l_x = 0$ 、なる場合、 $n_x = N$ であるから、 $A = N$ 、となり、上式に代入すれば、

$$\frac{n_x}{N} = e^{-\alpha l_x} \quad (3)$$

が得られる。故に、(2)、(3)式より、

$$\int_{l_x}^{\infty} f(l_x) dl_x = e^{-\alpha l_x}$$

となり、従つて、

$$f(l_x) = \alpha e^{-\alpha l_x} \quad (4)$$

として、 l_x の分布函数 $f(l_x)$ を求めることができる。さらに(4)式を(1)式に代入して、

$$\frac{dn_x}{N} = \alpha e^{-\alpha l_x} dl_x \quad (5)$$

なる関係が得られる。ところで、鉱石の他の二辺 l_y 、 l_z についても、その分布状態は l_x と全く同様であると考えて差支えないから、(5)式と同様に、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_y}{N} &= \alpha e^{-\alpha l_y} dl_y \\ \frac{dn_z}{N} &= \alpha e^{-\alpha l_z} dl_z \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

なる関係式が得られる。

3. 篩分けの理論

以上の(5)(6)式は、各辺の長さとは鉱石の数との割合を示す関係式であるが、実際問題として、その箇数を数えることは困難であるから鉱石の重量比としての粒度分布の理論式を求める必要がある。さて、第1図に示すような直方体の鉱石について、各辺の長さが、夫々 l_x と $(l_x + dl_x)$ 、 l_y と $(l_y + dl_y)$ 及び、 l_z と $(l_z + dl_z)$ との間にある鉱石の数を dn_{xyz} とすれば、全体の数 N との割合は、(5)(6)式より、その積として与えられるから、

$$\frac{dn_{xyz}}{N} = \alpha^3 e^{-\alpha(l_x + l_y + l_z)} dl_x \cdot dl_y \cdot dl_z \quad (7)$$

となる。いま、鉱石の比重を ρ とすれば、各辺の長さが l_x 、 l_y 及び l_z なる鉱石の重量は、 $\rho \cdot l_x \cdot l_y \cdot l_z$ であり、また、このような鉱石は dn_{xyz} 箇存在するわけであるから、その重量 dw は、

$$dw = \rho \cdot l_x \cdot l_y \cdot l_z \cdot dn_{xyz}$$

である。故に、上式に(7)式を代入して、

$$dw = N \rho \alpha^3 l_x l_y l_z e^{-\alpha(l_x + l_y + l_z)} dl_x \cdot dl_y \cdot dl_z \quad (8)$$

となり、(8)式より全重量に対する重量比としての篩分けの理論式を求めることができる。

いま、篩の網目を一辺の長さが l なる正方形とすると、篩上と篩下の鉱石の各辺の長さの関係は第1表の如くなる。したがつて、第1表に示す条件(積分範囲)

第1表 篩上及び篩下の鉱石の各辺の長さ*

	l_x	l_y	l_z
篩	$l \sim \infty$	$l \sim \infty$	$l \sim \infty$
	$0 \sim l$	$l \sim \infty$	$l \sim \infty$
上	$l \sim \infty$	$0 \sim l$	$l \sim \infty$
	$l \sim \infty$	$l \sim \infty$	$0 \sim l$
篩	$0 \sim l$	$0 \sim l$	$0 \sim l$
	$l \sim \infty$	$0 \sim l$	$0 \sim l$
	$0 \sim l$	$l \sim \infty$	$0 \sim l$
	$0 \sim l$	$0 \sim l$	$l \sim \infty$

で(8)式の積分を行うと、篩上の鉱石の重量 w_0 は、

$$\begin{aligned} w_0 = N \rho \alpha^3 & \left[\int_l^{\infty} \int_l^{\infty} \int_l^{\infty} l_x l_y l_z e^{-\alpha(l_x + l_y + l_z)} dl_x \cdot dl_y \cdot dl_z \right. \\ & + \int_l^{\infty} \int_l^{\infty} \int_0^l l_x l_y l_z e^{-\alpha(l_x + l_y + l_z)} dl_x \cdot dl_y \cdot dl_z \\ & + \int_l^{\infty} \int_0^l \int_l^{\infty} l_x l_y l_z e^{-\alpha(l_x + l_y + l_z)} dl_x \cdot dl_y \cdot dl_z \\ & \left. + \int_0^l \int_l^{\infty} \int_l^{\infty} l_x l_y l_z e^{-\alpha(l_x + l_y + l_z)} dl_x \cdot dl_y \cdot dl_z \right] \end{aligned}$$

となる。上式を計算すると、

$$w_0 = \frac{N \rho}{\alpha^3} \{3 - 2e^{-\alpha l}(1 + \alpha l)\} \{e^{-\alpha l}(1 + \alpha l)\}^2 \quad (9)$$

となる。いま、篩目を零とすれば全部篩上となるから、全重量を W とすると、 $l=0$ になるとき、 $w_0 = W$ である。故に、(9)式より、

$$W = \frac{N \rho}{\alpha^3} \quad (10)$$

なる関係が得られ、したがつて、篩上の鉱石の全重量に対する割合を R_0 とすれば、(9)(10)式より、

$$R_0 = \frac{w_0}{W} = \{3 - 2e^{-\alpha l}(1 + \alpha l)\} \{e^{-\alpha l}(1 + \alpha l)\}^2 \quad (11)$$

(篩上)

となる。同様にして、第1表の篩下の条件で(8)式の積分を行えば、全重量に対する篩下の鉱石の重量の割合

* この場合、鉱石の大きさは各辺について、 $0 \sim \infty$ のものまで存在するものとする。また、理論的には、鉱石の一辺の長さが無限大であつても、他の二辺がいづれも l より小なれば、篩目を通過するものとして取扱つている。

Ru は、

$$Ru = \{1 + 2e^{-\alpha l}(1 + \alpha l)\} \{1 - e^{-\alpha l}(1 + \alpha l)\}^2 \quad (\text{簡下}) \quad (12)$$

となる。なお、当然のことであるが、(11)、(12)式より、

$$R_0 + Ru = 1$$

なる関係が成立することが分る。

さて、(11)、(12)式の関係を図示すると第3図の如き曲線となり、重量基準の鉱石の粒度分布は係数 α によって決定されることとなる。

第3図 篩分けの理論曲線 (重量基準)

4. 平均粒度と鉱石の総表面積

いま、係数 α の物理的意義を明確にするため鉱石の一辺の長さの平均値、即ち平均粒度 L を求めてみると、(5)式より、

$$L = \frac{1}{N} \int_0^\infty l_x dn_x = \frac{1}{N} \int_0^\infty l_x N \alpha e^{-\alpha l_x} dl_x = \frac{1}{\alpha}$$

となり、故に、

$$\alpha = \frac{1}{L} \quad (13)$$

となる。即ち、係数 α は平均粒度の逆数であることが分る。ところで、Rittinger の説によれば、『粉碎に要する仕事量は粉碎のために新しく生じた表面積に比例する。』

といわれている。したがって、ある粒度分布を有する鉱石の総表面積を求める事は意義のあることと考えられる。さて、この場合直方体の鉱石の一つの面についてのみ考えると、二辺の長さが l_x と l_y であるような鉱石の数を dn_{xy} とすれば、全体の数 N に対する割合は、(5)、(6)式より、

$$\frac{dn_{xy}}{N} = \alpha^2 e^{-\alpha(l_x + l_y)} dl_x \cdot dl_y$$

であるから、その表面積を ds_{xy} とすると、

$$ds_{xy} = l_x l_y dn_{xy} = N \alpha^2 l_x l_y e^{-\alpha(l_x + l_y)} dl_x \cdot dl_y$$

であるから、上式を積分して、

$$s_{xy} = N \alpha^2 \int_0^\infty \int_0^\infty l_x l_y e^{-\alpha(l_x + l_y)} dl_x \cdot dl_y = \frac{N}{\alpha^2}$$

となる。ところで、他の面についても全く同様の結果が得られるから、その総面積 S は、 s_{xy} の6倍である。故に、

$$S = 6s_{xy} = \frac{6N}{\alpha^2} \quad (14)$$

となる。しかるに (10) 式より、

$$N = \frac{W \alpha^3}{\rho}$$

であるから、(14)式に代入して、

$$S = \frac{6W\alpha}{\rho} = 6V\alpha$$

但し、 $V = \frac{W}{\rho}$: 鉱石の総体積

となる。更に上式に (13) 式を代入すれば、

$$S = \frac{6V}{L} \quad (15)$$

となる。故に、総体積 V 、平均粒度 L なる鉱石を平均粒度 L_2 にまで碎くに要する仕事量 U は、(15)式より、

$$U = KV \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right)$$

但し、 K : 比例定数

となり、単位体積当りの仕事量 u については、上式より

$$u = \frac{U}{V} = K \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) \quad (16)$$

となり、Rittinger の説を一般化することができる。なお、(14)式より平均表面積 s を求めると、

$$s = \frac{S}{N} = \frac{6}{\alpha^2} = 6L^2 \quad (17)$$

となり、また、(10)式より平均体積 v を求めると、

$$v = \frac{W}{N\rho} = \frac{1}{\alpha^3} = L^3 \quad (18)$$

となる。したがって、平均粒度 L を規定することにより、(17)、(18)式より、その平均表面積及び平均体積を立方体の場合と全く同様の取扱いにより簡単に計算することができる。

5. 重量基準の粒度分布

重量基準の粒度分布は (12) 式を l について微分することにより得られる。即ち、

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dRu}{dl} = 6\alpha l e^{-2\alpha l} (1 + \alpha l) \{1 - e^{-\alpha l} (1 + \alpha l)\} \quad (19)$$

である。第4図は (19) 式より求めた曲線である。同図に

第4図 重量基準の粒度分布曲線

於て、最大点の値は、

$$\alpha l = 1.29 \text{ に於て、} \frac{1}{\alpha} \frac{dRu}{dl} = 0.500$$

であり、また、(13) 式より平均粒度については、

$$\alpha l = 1.00 \text{ であるから、} \frac{1}{\alpha} \frac{dRu}{dl} = 0.429$$

である。故に、重量基準で平均粒度の1.29倍の粒度の鉱石が一番多く存在し、その重量は平均粒度の鉱石の約1.17倍であることが分る。また、平均粒度の篩上の鉱石の重量比は、(11) 式に於て、 $\alpha l = 1$ を代入して、

$$R_0 = \{3 - 2e^{-1}(1+1)\} \{e^{-1}(1+1)\}^2 \approx 0.827$$

即ち、約82.7%となる。なお、Hatch と Choate は『粒度の対数をとって分布曲線を書くと、ほぼ左右対称となることが多い』ということ述べている。第5図は分布曲線に対する検討のため第4図の横軸を対数目盛で表わしたものである。

6. 実測値による検討

以上の理論を実測値により検討してみる。第2表及び第3表は20' ギヤレス・クラッシャー（セット 12~25 mm）の給鉱及び排鉱の篩分け表である。なお同表の R_0 より第3図により αl の値を求め更に α の値を計算により求めてみた。 α の値が大体一定値に落着けば理論曲線と一致するのであるが、同表に於てはいつも粒度 l の小さいところでは一定値から外れている。したがって、

第5図 αl の対数目盛にて示した重量基準の粒度分布曲線

第2表 給鉱の篩分表並びに α の計算値

l (mm)	Wt. (%)	R_0 (%)	αl	α (mm ⁻¹)
+50	37.4	37.4	1.97	0.0394
38	20.3	57.7	1.51	0.0397
30	10.0	67.7	1.31	0.0437
25	15.0	82.7	1.00	0.0400
20	4.3	87.0	0.90	0.0450
15	2.7	89.7	0.82	0.0547
10	2.7	92.4	0.72	0.0720
4.7	1.6	94.0	0.67	0.1426
3	0.7	94.7	0.65	0.2167
- 3	5.3	100.0		

第3表 排鉱の篩分表並びに α の計算値

l (mm)	Wt. (%)	R_0 (%)	αl	α (mm ⁻¹)
+25	2.5	2.5	3.96	0.1584
20	8.5	11.0	2.96	0.1480
15	20.4	31.4	2.13	0.1420
10	26.7	58.1	1.51	0.1510
4.7	15.0	73.1	1.21	0.2574
3	3.7	76.8	1.13	0.3767
- 3	23.2	100.0		

ここでは一応、粒度の大きいところで α の値の平均値をとることとして、第2表に於ては、 $\alpha \approx 0.04$ 、また、第3表では、 $\alpha \approx 0.15$ 、として理論曲線との比較を行つ

第 6 図 実測値と理論曲線の比較

たのが第 6 図である。理論曲線と実測値との相違の原因と考えられる主な点は、

(a) 給鉱は 25mm 目の篩上の鉱石であるため粒度の小

さいものが少くなっている。

(b) 試料のとり方、並びに篩分けの誤差。

などである。なお、この点については充分なる実験的検討を行う必要があると考えている。

7. あとがき

以上の理論計算に於て、実際的に問題となると考えられる点は、

- (1) 鉱石の形を直方体であるとしたこと。
- (2) 鉱石は無限大の大きさのものまで存在するとしたこと。
- (3) 粒度の小さい場合には篩目の透過係数を考慮しなければならないこと。

などである。これらの問題については実測値との照合により、理論式に適当な補正係数を導入することによって、一層正確な関係式を求めることができる筈である。なお、破碎された鉱石の粒度分布が確率の法則に従うことは当然であるが、破碎されるときに確率を支配する動因が複雑であるため、場合によつては別の分布をとる可能性もあり、このような場合については更に研究の余地があるものとする。

参 考 文 献

- 森芳郎著：粉体工学 P. 15 日刊工業新聞社（昭33—1）
高桑健著：選鉱工学（下）P. 322 共立社（昭31—3）