プロセス制御入門 (3)

岡 野 靖 彦*

Introduction to Process Control (3)

Yasuhiko Okano

Q：前回紹介された**数学モデル決定法**のそれぞれについて、選鉱プロセスに関する**具体例**をあげて説明してください。

A：その前にいうまでもないことかも知れないが、我々は制御に利用することを前提として数学モデルを決定するのであるから、数学モデルの作成に際して考慮すべきプロセス変数としては、当該プロセスの制御を実施する上で重要なものを選ばなければならない。ただいらずらに多種多数のプロセス変数を包含する趣味的な数学モデルを作ることをしても意味がない。

Q：制御を実施する上で重要なプロセス変数といいますと……。

A：ひとくちに言えば制御量，操作量となるべき変数，それと密接な関係を有する変数，また把握できる外乱ということになる。勿論数学モデルを作成しようとする段階で、このようにはっきりした分類ができるとは限らないからそう簡単ではないが、少なくとも重要性の低いプロセス変数から順次除外して行くような心掛けは必要であろう。

一般的な段取りとしては、まず制御の目的が決まると同時に自ら制御量が決まるから、その制御量との間に適切な関係をもつプロセス変数を操作量として選び出す。制御量に影響を及ぼすが一定値に保つなどの制御ができないプロセス変数を外乱とみなす。外乱が検出可能であれば、外乱——制御量間の特性にも注目して、フィードフォワード制御の基礎をきずくことも必要であろう。

Q：制御量との間に**操作量**として適切な関係を有するということは具体的にはどういうことですか。

A：あるプロセス変数が変化したときに制御量が静的にも動的にも敏感に変化する——すなわち一定の変化巾に

対してなるべく線形関係を保ちながら大きな変化巾で迅速に応答する——とすれば、そのプロセス変数は操作量としての1つの必要条件を備えていることになる。また他の必要条件としては、人為的に変化させやすいこと、制御量以外のプロセス変数ひいてはプラント全体に影響を及ぼさないことなどがあげられる。

なお制御を実施する際には、注目したプロセス変数の検出が原理的に可能であっても現場の条件によっては、サンプリングや検出端の汚染、損傷からの保守など厄介な問題に遭遇することが多い。このような問題の解決は本講座の守備範囲から一応外れているが、注意すべき重要な課題である。

Q：種々のプロセス変数の間の関係を、実操業からの統計的データをもとにして、回帰式の形で求めることが行われているようですが……。

A：その方法によれば、入出力とみなしたプロセス変数間の静的な因果関係を予備的に調べ、効果的な数学モデル構築の手掛かりをうることもできようし、時間の因子が関与しない制御つまり hierarchy の上位の制御で利用すべき数学モデルを決定することができる。事実選鉱工場で現在実施されているコンピュータコントロールはこの種の数学モデルを基礎にしている例が多い。

Q：昨年(1975年)の IMPC (国際選鉱会議)でも**選鉱プロセス**(粉碎、分級および浮選プロセス)の**回帰式モデル化**に関する研究論文¹¹⁾が、ポーランドから発表されているようですね。

A：注目したプロセスに関する入出力プロセス変数の間の関係を表わす回帰式を作成するために、入出力変数についてのデータのカップルが多数必要であり、ある時点での入力値 $x(t)$ に対応する出力値はプロセスの時間遅れ (τ_0) だけ遅れた時点における値すなわち $y(t+\tau_0)$ でなければならない。その論文では時間遅れ (τ_0) を決定す

* 東京大学工学部助教授

第1図 粉碎閉回路における相互相関関数
 曲線1 x : 分級機オーバーフローのパルプ濃度
 y : // 中の -74μ 分
 曲線2 x : 新フィード量
 y : ミル騒音レベル (2000 Hz での振幅)

る1つの方法として、入出力間の相互相関関数 (cross correlation function) に注目する方法を試みている。RI トレーサによる時間遅れの試験方法も併行して行なった結果、両者間の測定値のずれは10%以下であるという。

相互相関関数に注目してプロセスの動特性を決定する方法はあとで詳しく紹介するが、プロセスの時間遅れが相互相関関数に反映される様子を第1図¹²⁾に示す。2つの変数 $x(t)$ および $y(t)$ の間の相互相関関数 $\phi_{xy}(\tau)$ は(1)式で与えられる。

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (1)$$

したがって第1図で縦軸は両変数間の相関の度合を表わしているから、曲線のピークの位置を横軸で読むことによって両変数間の時間遅れを知ることができる。第1図に示された例では、粉碎閉回路の新フィード量とミル騒音の強度との間(曲線2)には時間遅れ τ_0 が認められる。一方、分級機オーバーフローのパルプ濃度と -74μ 分という2つの変数間(曲線1)に時間遅れがあらうはずがない。

Q: 今回これまでに伺ったことを復習してみると、前回の第7図に示されている手法を適用して数学モデルとくに動的素子を包含した数学モデルを構築するための予備的段階として、種々のプロセス変数間の概略の静的因果関係を把握し、如何なるプロセス変数に注目したらよいかということを、実験室ならびに現場の経験を通じて十分吟味する必要があるというわけですね。

A: とくに制御量、あるいは操作量となるべきプロセス変数については集中的に検討する必要がある。

Q: 浮選プロセスにおいては試薬の残留濃度が効果的な制御量になりうるのではないかとすることが大分以前か

ら提案されているようですが……。

A: 蛍光X線分析法の発展にともなって、残留濃度のようないわば間接的な制御量は影がうすれているといえよう。しかしこの量は各種の溶存物質の量とならんで浮選雰囲気を反映する重要な量であるから、注目に値すると思われる。

Q: 間接的な制御量とはどういう意味ですか。

A: 制御の目的となる量つまり本来制御量とすべき量が検出不可能であったり、化学分析のようにその結果が出るまでに時間がかかる方法でしか検出できない場合は、その量を反映する検出しやすい量を制御量に選ぶ。このような制御量を間接的な制御量といったわけで、粉碎回路でもオンラインの粒度分析装置がないかぎり、間接的な制御量に注目することになる。なお、最終製品の品質をそのまま制御量とする制御は、最近の分析機器の進歩によって可能な場合が多くなってきた。このような制御を終点制御 (end-point control) とよんでいる。浮選プロセスでは蛍光X線分析法の発展にともない終点制御に近い制御が可能になりつつあるといえよう。

話を残留濃度に戻すとして、最近の関連文献を1つ紹介しよう。すなわち、Rammelsberg の鉍石の浮選の現場操作からのデータであるが、第2図のような結果が報告されている¹³⁾。報告者はこれにより残留濃度だけを単一の制御量として採用することはできないとしている。勿論この種の関係は鉍石の質、試薬の性質などによって左右されるのであろうから、種々の現場の浮選条件について今後ともデータを集積する必要がある。

Q: これまでの考察から数学モデルに包含さるべき重要

第2図 ザンセート残留濃度(X-RK)とテーリングのPb品位(C_t)との関係

第3図 完全混合モデル

なプロセス変数は一応きまったとして、次に数学モデル構築の具体例をあげてもらいたいのですが、まず前回の第7図のA、つまり解析の方法というのから説明して下さい。

A: ここで解析の方法といっているのは、入出力変数間の関係を物質収支、エネルギー収支、熱収支などをもとにして解析的に求める方法である。

そこで理想的というか典型的な2つのプロセス特性について方程式をたててみる。まず、第3図のような**完全混合プロセス**について物質収支を考えると次式が得られる。

$$c_1(t)Q - c_2(t)Q = \frac{dc(t)}{dt} V \quad (2)$$

ここで、

$c_1(t), c_2(t), c(t)$: フィード、ディスチャージおよび混合槽内の注目成分の濃度

Q : フィードまたはディスチャージの流量

V : 混合槽の容積

完全混合プロセスでは(3)式が成り立つから(4)式が得られる。

$$c(t) = c_2(t) \quad (3)$$

$$c_1(t) \cdot Q = \frac{dc_2(t)}{dt} V + c_2(t) \cdot Q \quad (4)$$

すべての初期値を0として、(4)式をプラス変換すれば、濃度に関する伝達関数 $G(s)$ が求まる。

$$C_1(s) \cdot Q = sC_2(s) \cdot V + C_2(s) \cdot Q \quad (5)$$

$$G(s) = \frac{C_2(s)}{C_1(s)} = \frac{Q}{sV + Q} = \frac{1}{s(V/Q) + 1} = \frac{1}{sT + 1} \quad (6)$$

ここで、

$C_1(s), C_2(s)$: $c_1(t), c_2(t)$ のラプラス変換

s : ラプラス変換パラメータ

T : 時定数

(6)式のタイプの伝達関数 $[k/(sT+1)]$, k : ゲイン定数, T : 時定数] で表わされる伝達特性は「1次おくれ」とよばれる。当該完全混合プロセスではゲイン定数 k は1, 時定数 T は流体の平均滞留時間 (V/Q) に相当する。

第4図 ピストン流モデル

次に第4図のように物質が、プロセスの入力点から出力点までの距離 L を、速度 v なるピストン流で移動する場合、つまりプロセス内では混合が全く行なわれない場合を考えると、入出力間の関係は簡単で次の(7)式のようなになる。

$$y(t) = x(t - \lambda) \quad (7)$$

ここで、 $\lambda = \frac{L}{v}$

ただし、 v : ピストン流の速度

L : 入力点と出力点との間の距離

ラプラス変換によって伝達関数が(9)式のような形になる。

$$Y(s) = X(s) \cdot e^{-s\lambda} \quad (8)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-s\lambda} \quad (9)$$

ここで、

$X(s), Y(s)$: 入力 $x(t)$, 出力 $y(t)$ のラプラス変換

λ : むだ時間

このような伝達特性を「むだ時間遅れ」とよんでいる。

因みに我々が実際に遭遇するプロセスは、上の2つの例のような理想的な伝達特性で表わされることは少ないが、これらの組み合わせた(10)式で近似的に表現されることが多い。すなわち、

$$G(s) = \frac{k \cdot e^{-s\lambda}}{\prod_{i=1}^n (sT_i + 1)} \quad (10)$$

Q : cell-to-cell 型の浮選機では各浮選槽を完全混合槽とみなしているようですが……。

A: 完全混合と1次の浮選速度式の成立を仮定すれば、連続式浮選プロセスに関して物質収支から次の(11)式がたてられる。

$$V \frac{dc}{dt} = Q_i c_i - Q_i c - kVc + R_f \quad (11)$$

ここで、

c_i, c : フィードおよびセル内パルプにおける注目成分の濃度

V : セル内パルプホールドアップ

Q_i, Q_i : フィードおよびティリング流量

R_f : 注目成分のプロス層からセル内パルプへの戻り量

k : 注目成分の浮選速度定数

Niemi はフロス層からの脱落的過程を1次の浮選速度定数 k の中に含ませて考えることができるとして、結局(12)式を基本式とした⁷⁾。

$$V \frac{dc}{dt} = Q_i c_i - Q_t c - k V c \quad (12)$$

まずフロスとして回収することを目的としている成分を、ここでいう注目成分とみなしたとき、フィードからティリングへの注目成分濃度に関する伝達関数 $G_f(s)$ は次のようにして求まる。すなわち(12)式をラプラス変換して(13)式としたのち、 $G_f(s)$ が(14)式つまり1次おくれ要素の伝達関数で与えられる。

$$sC(s) \cdot V = C_i(s) \cdot Q_i - C(s) \cdot Q_t - C(s) \cdot kV \quad (13)$$

$$G_f(s) = \frac{C(s)}{C_i(s)} = \frac{Q_i/V}{s + k + Q_t/V} = \frac{K}{sT + 1} \quad (14)$$

ここで、

$$K = \frac{Q_i/V}{k + Q_t/V} = \frac{Q_i}{V} T$$

$$T = \frac{1}{k + Q_t/V}$$

さらに注目成分としてティリングへ回収すべき成分あるいは水中の溶存物質を考えた場合についてそれぞれ伝達関数が導かれているが、何れも1次おくれ要素の伝達関数となっている。

Q：浮選プロセスの物質収支を考える場合「2相モデル(two phase model)」というのがありましたが、それはどんなものですか。

A：前出の(11)式の最後の項、つまりフロス層からの粒子の脱落的プロセスを別個に考慮するもので、Arbiter

第5図 浮選プロセスの2相モデル

ただし、
 M, M_f : セル内バルブ中およびフロス中の注目成分固体量
 V, V_f : セル内バルブおよびフロスの体積
 C_i, C, C_f : フィード、セル内バルブ、フロス中の注目成分濃度
 Q_i, Q_t, Q_c : フィード、ティリング、精鉱の流量
 k, k' : 速度定数

と Harris によって提案された。その模式図を第5図に示す。物質収支を示す微分方程式は(15)式および(16)式ようになる(使用した記号については第5図参照)¹⁴⁾。

$$\frac{dM}{dt} = V \frac{dc}{dt} = Q_i c_i - Q_t c - k V c + k' V_f c_f \quad (15)$$

$$\frac{dM_f}{dt} = V_f \frac{dc_f}{dt} = k V c - Q_c c_f - k' V_f c_f \quad (16)$$

ここで、 Q_i/V 、 Q_c/V_f および $Q_i c_i$ を一定と仮定し、 $M|_{t=0} = V c_i$ および $M_f|_{t=0} = 0$ とすれば(15)式および(16)式の解は次のようになる。

$$M = \frac{(k' + Q_c/V_f) Q_i c_i}{AB} + \frac{(A + k' + Q_c/V_f)(Q_i + A V) c_i}{A(A - B)} e^{At} - \frac{(B + k' + Q_c/V_f)(Q_i + B V) c_i}{B(A - B)} e^{Bt} \quad (17)$$

$$M_f = \frac{k Q_i c_i}{AB} + \frac{k(Q_i + A V) c_i}{A(A - B)} e^{At} - \frac{k(Q_i + B V) c_i}{B(A - B)} e^{Bt} \quad (18)$$

ここで、 A, B は z に関する次の2次式の根である。

$$(z + k + Q_t/V)(z + k' + Q_c/V_f) - k k' = 0 \quad (19)$$

これらの解から定常状態、つまり $t = \infty$ の状態を表す式として(20)式および(21)式が得られる。

$$M|_{t=\infty} = \frac{(k' + Q_c/V_f) Q_i c_i}{AB} \quad (20)$$

$$M_f|_{t=\infty} = \frac{k Q_i c_i}{AB} \quad (21)$$

したがって、

$$\frac{M|_{t=\infty}}{M_f|_{t=\infty}} = \frac{k'}{k} + \frac{1}{k} \cdot \frac{Q_c}{V_f} \quad (22)$$

ところで当該連続浮選プロセスにおける比浮選速度(specific flotation rate)を k_c とすれば、定義により、

$$k_c = \frac{M_f|_{t=\infty} Q_c}{M|_{t=\infty} V_f} \quad (23)$$

(22)式、(23)式より

$$k_c = k - k' \frac{M_f|_{t=\infty}}{M_f|_{t=\infty}} \quad (24)$$

または、

$$k_c = \frac{k}{1 + k'(V_f/Q_c)} \quad (25)$$

たとえば、 $k' \neq 0$ つまりフロスからの脱落がある場合、浮選条件が変化して $M_f|_{t=\infty}/M|_{t=\infty}$ の値が減少すると、より大きな割合で Q_c/V_f が増大し、結局 k_c の増加がもたらされることになる。またフロスからの脱落がない場合は $k_c = k$ となることは明らかである。従来の単一相モデルでは常に $k_c = k$ の場合を前提としているから、何らかの修正、たとえば完全混合という仮定を外すなどの修

第6図 ピストン流を想定した2相モデル

正を加えない限り，比浮選速度の変化を把握することができない。

Q：完全混合を前提としない2相モデルもあったような気がします……。

A：第6図のようなピストン流モデルを想定して物質収支を考えたものである¹⁵⁾。まずフロス層中での固体粒子の脱落的過程を(25)式で仮定する。

$$\frac{dm(h)}{dh} = -\beta m(h) \quad (25)$$

したがって，

$$m_r = m_o(1 - e^{-\beta H}) \quad (26)$$

ここで，

m ：単位時間，単位面積当りの固体粒子の流量
(添字については第6図参照)

H ：フロス層の厚さ

β ：定数

浮選槽内での流れをピストン流とし浮選機内のある位置（フィード口から距離 l の位置）の微小区間について物質収支を考えると(27)式となる。

$$Q \frac{dc}{dl} = -m_o + m_r \quad (27)$$

(26)式より

$$Q \frac{dc}{dl} = -m_o e^{-\beta H} = -k c e^{-\beta H} \quad (28)$$

(28)式を l について積分すると，

$$\ln \frac{c}{c_i} = -\frac{k l}{Q} e^{-\beta H} \quad (29)$$

ここで，

Q ：フィード固体流量

c ：注目成分の含有率（対固体重量）

l ：浮選機でのフィード口からの距離

注目成分中，無限大の浮選時間をかけても浮かない成分の含有率を c_∞ とし，浮選出口での注目成分の濃度 c_t

を求めると，

$$(c_t - c_\infty) = (c_i - c_\infty) e^{-(kL/Q) \cdot J \cdot (M/N)} \quad (30)$$

ここで，

M/N ：捕収剤と石灰の添加量

(それぞれ M および N)*

J ： $J = e^{-\beta H}$ ，フロス中での粒子の脱落的過程を表わす項であり，常に1以下の値をとる係数である。
なお起泡剤の影響は β に反映されるはずである。

Q：(30)式における c_∞ は，現在のように浮選速度定数の分布の概念が定着する以前の段階で，浮選の速度過程を説明するために，仮説的に提示されたものと思いますが……。

A：その通りで，この点に関して最近では浮選速度定数の分布を積極的にとり入れた2相モデルも提案されている⁹⁾。

Q：浮選セル内の流れ特性として，完全混合およびピストン流を前提としたモデルをそれぞれ紹介していただきましたが，他の流れ特性にもとづくモデルはありませんか。

A：機械攪拌式でなく空気式のセルにおいて，流れ特性が拡散モデルで表わされることをたしかめ，(31)式のような伝達関数を求めた例がある¹⁶⁾。

$$G(s) = \frac{C(s, \xi)}{C(s, 0)} = \exp \left[\frac{\xi B_0}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\tau k}{B_0} + \frac{4\tau s}{B_0}} \right) \right] \quad (31)$$

ここで，

τ ： L/v

L ：セルの長さ

v ：流速

ξ ： x/L

x ：セル入口からの距離

B_0 ： vL/D ，Bodenstein 数

D ：拡散係数

k ：浮選速度定数

c ：注目成分の濃度

以上浮選プロセスを例にとりて，種々の流れ特性を前提とし，場合によってはフロス層の影響も考慮に入れて物質収支に注目し，数学モデルを解析的に構築した例をいくつか紹介した。

* 原文によればこれらの添加量が浮選速度定数に及ぼす影響を知ってこの項が導入されたようであるが，この辺の記述は不明確と思われる。

参 考 文 献

- 11) W. Maczka, K.S. Sztaba and T. Tumidajski: Regressive model of actual process of ore beneficiation and its application for building sampling scheme and control algorithm, XI IMPC (1975), Paper No. 37
- 12) V. C. Protsuto: Statistical Study of grinding circuits as control objects, VUZ Tsvetnaia Metallurgia, No. 4, 1966, p. 121~127
- 13) Von E. Klössel and M. Clement: Zusammenhänge zwischen Xanthat-Restkonzentration und Flotationsablauf bei der Aufbereitung des Rammelsberger Erzes, Erzmetall, **25** (1972) No. 1, p. 2~7
- 14) C. C. Harris and H. W. Rimmer: Study of two-phase model of the flotation process, Trans. Inst. Min. & Metall., **75** (1966), p. 153-162
- 15) H. R. Cooper: Feedback Process Control of Mineral Flotation—Part 1. Development of a Model for Froth Flotation, Trans. S. M. E. Dec. 1966, p. 439-446
- 16) A. Niemi: On the Dynamics of a Pneumatic Flotation Cell, Acta Polytechnica Scandinavica, Ch. 49. Helsinki (1966).