プロセス制御入門 (7)

岡 野 靖 彦*

Introduction to Process Control (7)

Yasuhiko OKANO

Q：前回は hierarchy の最下位の制御系としての基本的な自動制御ループすなわちフィードバック制御系の設計 (synthesis) の方法について、ごく簡単な説明がありました。が……。

A：周波数領域での伝達関数表示を利用した解析 (analysis) と設計の手法は、いわゆる古典的制御理論の根幹をなすものであり、過去30年余りの間に夥しい数の参考書によって紹介されているので、本講では詳述するまでもないと思われる。ただ最近では——といっても10年ほど前から——、現代制御理論の体系化に伴ない時間領域での説明をとり入れた教科書^{3), 4)}が目立ってきたことを付言しておかねばならない。

Q：きれいに体系化された理論を実際のプロセスに適用するにはいろいろな制約や問題があるのではないのでしょうか。

A：プロセス変数の検出や操作における主としてハードウェア (hardware) 的な問題もあるが、本稿でこれまでに紹介した諸理論には本質的に重要な前提がなされていることに注意しなければならない。それは対象プロセスあるいは各要素の入出力間に線形性がなりたつとしていることである。線形関係が実際のプロセスにおいて認められることはむしろ例外的である。しかし入出力の微小変動範囲内においては近似的に線形関係が保たれるとして議論を進めて差支えないとすることが多いのである。

筆者は以前に湿式ボールミル粉砕回路の制御性を伝達関数表示を利用して解析した^{5), 27)}が、その場合でも第1図のように入出力間に認められた実験結果を近似的に線形化して議論を進めた。すなわちボールミルにおける単位時間当たりフィード固体量 (F) とホールドアップ (H) との間に経験的に認められた関係が第1図中の放物線状

の実線であるが、破線のごとく接線を引き、これをもって注目した定常状態 ($F=F_1$, $H=H_1$) からの微小変動範囲についての近似的な線形関係とみなした。

第1図 線形化

Q：しかし対象プロセスの非線形性を無視できない場合も多いのではないのでしょうか。

A：対象プロセスについてたしかにそうであるが対象プロセスとは別に調節器の非線形性を考慮せねばならない場合もある。身近な例として水洗トイレの水槽への水の供給を浮子とコックで制御する自動制御系におけるコックは2位置動作つまりオンオフ動作を行なう非線形要素である。また電気アイロンや暖房器にとりつけられたサーモスタット (thermostat) もそうである。

そこで今回は非線形制御について概説しよう。

Q：不連続制御という用語を聞いたことがありますが……。

A：不連続制御といった時、「不連続」の意味が時間的な場合と空間的な場合とがあり、前者は時間的に離散的な信号にもとづく制御つまりサンプル値制御であり、本講第1回でも若干触れ、 z 変換、パルス伝達関数などの説明を行なった。ここで非線形性とは後者つまり不連続性が空間的な場合を指しているのである。

* 東京大学工学部助教授
昭和54年5月25日受理

Q：信号が空間的に不連続でなくても非線形性が認められることがあるのではないのでしょうか。

A：信号に重ね合わせの理がなりたないのが非線形性要素であって、非線形性には種々の型があり、すべてに共通な非線形制御理論が確立されているわけではない。非線形系の扱いに関してはいくつかの方法があるが、それらは各々の仮定の下に利用されるのである。古くから知られる重要な方法として記述関数法と位相面解析法がある。

Q：それではまず記述関数法から……。

A：線形系では一定周波数の入力を加えると、振幅および位相は異なるが同一周波数成分のみの出力が得られる(本講座第4回第12図参照)。しかし非線形系では入力に正弦波状の変動を与えると入力と同一の周波数成分の他に高調波成分が現われる。そこでこの高調波成分を無視して、入力の周波数成分すなわち基本波成分についてのみ入出力間の振幅比および位相ずれを注目する方法が記述関数法である。

Q：結局本質的には周波数応答法と変わらないわけですね。

A：その通りであって、ここで注目する入出力関係を表わす関数を記述関数(describing function)と呼ぶのであるが、記述関数のことを等価伝達関数とも言っている。対象が線形ならば記述関数は既に説明したいわゆる周波数伝達関数(たとえば本講座第2回(7)式)と一致するわけである。

Q：具体例を挙げて説明して下さい。

A：まず非線形要素の特性の最も簡単な例として、第2図の入出力関係を取りあげよう。このような特性を有する要素に正弦波状の入力((1)式)を加えると出力は(2)式となる。

第2図 オン・オフ動作

$$x(t) = x_0 \sin \omega t \dots\dots\dots (1)$$

$$y(t) = \begin{cases} A & : x(t) > 0 \\ -A & : x(t) < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

この入出力関係を図示すると第3図となる。

出力をフーリエ級数で表わすと(3)式のようになる。

$$y(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right) \dots\dots (3)$$

第3図 非線形要素(オン・オフ要素)における入出力関係

ここで前述のように第2項以下を無視すれば、

$$y(t) = \frac{4A}{\pi} \sin \omega t \dots\dots\dots (4)$$

(1)式と(4)式とから入出力の複素比、つまり(5)式あるいは(6)式が記述関数として得られる。

$$G(x_0, \omega) = \frac{4A}{\pi x_0} \exp(j0) \dots\dots\dots (5)$$

$$G(x_0, \omega) = G(x_0) = \frac{4A}{\pi} \cdot \frac{1}{x_0} \dots\dots\dots (6)$$

Q：(6)式のように非線形要素では常に位相遅れがないのですか。

A：2, 3の簡単な非線形要素のタイプによっては、たとえばバックラッシュは位相遅れを伴う²⁵⁾。

Q：周波数には依存しないのですか。

A：記述関数は線形要素の伝達関数と異なり入力の振幅に依存することが特徴的であるが、周波数に関係する場合もある。

この辺のところを詳述すると次のようである。まず非線形性を次の3種類に分類できる。1)入出力関係がそれぞれの注目した時点での値のみにによって決まる場合、2)注目した時点の出力が入力のその時点における値と過去の履歴によって決まる場合すなわち入出力関係にヒス

テリシス (hysteresis) が存在する場合、および 3) 入出力関係が微分方程式で表わされるいわゆる動的な非線形性の場合とである。そこで、1) の場合は記述関数は実数となり、位相差は 0 で振幅比つまりゲインは周波数に依存しない。2) では位相差は存在するが、ゲインならびに位相差とも周波数に依存しない。3) においてはゲインならびに位相差ともに周波数に依存するということになる。因みに 3) の範ちゅうに入る問題は解析が極めて困難なものが多い。

Q：鉱物粉体プロセスに対する記述関数法の適用例はありますか。

A：ドラム型のペレタイザ (pelletizer) とスクリーン (screen) を用いた造粒閉回路に対する適用例⁴¹⁾を紹介しよう。まず第 4 図 a) の操業例では、循環量に同図 b) のようなリミットサイクル (limit cycle) が見られるというのである。

第 4 図 造粒閉回路⁴¹⁾

Q：リミットサイクルとは……。

A：リミットサイクルとはある変数の持続的な振動現象であって、非線形要素の入ったフィードバック制御系に特有の現象である。たとえば身近な例としてサーモスタットのオンオフ動作による暖房器制御の結果生ずる室温の持続振動がそれである。

Q：そうすると第 4 図 a) には非線形要素が含まれているということになりますね。

A：ドラムで生成するペレットの径に影響を及ぼす主な

変数として滞留時間と添加水量に注目すれば、ドラム特性は第 5 図 b) のように表わされる。またスクリーンの特性は同図 a) のごとくである*。

そこで、当該閉ループ (第 4 図 a)) を構成するドラ

第 5 図 ドラムとスクリーンの特性⁴¹⁾

ムとスクリーンのこのような非線形特性と線形特性を分離してそれぞれひとまとめにして、ガウス平面上でベクトル軌跡を描き、解析を試みるのである。すなわち Nyquist の安定判別法の拡張である。

Q：Nyquist の安定判別法とは……。

* 原文中の図面では横軸および縦軸の意味が不明確である。推測するに、横軸は各ペレット径に対応するペレット量であり、縦軸は出力つまり網下産物としてのペレット量であろう。たとえば平均径 d_0 なるペレット群がスクリーンにフィードされた場合、そのうちの $d_{\min}$ 以下のペレットは全量網下産物 d_s となるが、 $d_{\min}$ 以上のペレットはフィード (d_0)——網下 (d_s) の入出力関係には全く関係しない。

A：前回（第6回）では制御系の安定判別や制御の質に関する解析方法の説明を省略する旨述べたが、ここでは記述関数法の解説のために必要最少限で Nyquist 法を紹介しよう。

Q：前回、特性方程式の根の分布に注目することに安定論の基礎が置かれているということでしたが……。

A：閉ループ制御系における入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ との関係が(7)式のような線形微分方程式で表わされているとする。

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y \\ = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_m x \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、入力 $x = x(t) = 0$ とおいた次の(8)式の解、すなわち(9)式は、当該系の自由応答を与える。

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 \\ \cdots \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

$$y = y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \cdots + A_n e^{s_n t} \quad (9)$$

ここで、 $s_1, s_2, \cdots$ は特性方程式(10)の根である。

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (10)$$

したがって特性方程式の根の実数部がすべて負であれば、 $t \rightarrow \infty$ で $y(t) \rightarrow 0$ となり応答が消滅し系は安定といえる。

そこで当該閉ループの一巡伝達関数を $G(s)$ とすれば……。

Q：一巡伝達関数とは……。

A：第6回 a) のようなフィードバック制御系においてブロック線図を同図 b) のように等価変換したとすれば、(11)式の関係が成立しているはずである。

第6図 一巡伝達関数

$$G_3(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} \quad (11)$$

ここで、 $G_1(s) \cdot G_2(s)$ を一巡伝達関数 (loop transfer function) という。

話を元に戻して、一巡伝達関数を $G(s)$ とすれば系の特性方程式は(12)式で与えられる。

$$1 + G(s) = 0 \quad (12)$$

ここで、 $s = j\omega$ において

$$G(j\omega) = -1 \quad (13)$$

すなわち、 $G(j\omega)$ のベクトル軌跡を描いて臨界点 $(-1, j0)$ との相対的な位置関係を調べて安定性を評価するのが Nyquist 法の概略^{35), 38)} である。

Q：ベクトル軌跡の説明をして下さい。

A：周波数特性を表わす方法の1つである。すなわち複素平面上に $G(j\omega)$ のベクトルを、 ω をパラメータとして描いたときの尖端の軌跡をベクトル軌跡という。因みに周波数特性の表示法の他の例として Bode 線図は既に紹介した（本講座第4回第13図）。

Q：記述関数法ではその Nyquist 法をどのように拡張しているのですか。

A：では第7図のように記述関数 $G_n(X)$ でその特性が示される非線形要素の入った制御ループにおける特性方程式は(14)式ようになる。 $G_l(j\omega)$ は勿論線形要素の伝達関数である。

第7図 非線形制御系

$$1 + G_n(X) \cdot G_l(j\omega) = 0 \quad (14)$$

書き直して、

$$G_l(j\omega) = -\frac{1}{G_n(X)} \quad (15)$$

すなわち、線形系の(13)式に相当するのが非線形系の(15)式である。両者の比較から明らかに、線形系における前述の臨界点 $(-1, j0)$ は、非線形系ではベクトル $-1/G_n(X)$ の尖端であり、入力 X の変化によって複素平面上を移動することになる。なおその軌跡を振幅軌跡とよんでいる。

従って系の安定性が入力の振幅に依存する点が非線形

系の特徴である。

Q: リミットサイクルの発生条件は……。

A: 線形要素のベクトル軌跡つまり周波数軌跡と非線形要素の振幅軌跡が交われば、その点でリミットサイクルが発生する。

Q: それでは造粒閉回路の説明に戻って下さい。

A: 前掲の造粒閉回路は、ドラム中でのペレットの生長過程とスクリーンからの網下産物の流出過程におけるそれぞれの非線形性を包含する1つの非線形要素と1つのむだ時間要素とから構成されているものと考えられる。この場合第8図のように両者のベクトル軌跡すなわちむだ時間要素の周波数軌跡と非線形要素を表わす記述関数の振幅軌跡が交わる結果、リミットサイクルが発生すると解釈される。

Q: リミットサイクルを避ける方法は……。

第8図 ベクトル軌跡⁴¹⁾

A: 線形要素の特性を変更して両軌跡が交わらないようにすればよいのは明らかである。そのためにはたとえばスクリーンからの網下産物の全量ではなく一部分だけを

繰り返す方法(第9図)とか、網下の繰り返し工程に混合貯留槽をはさむ方法(第10図)が考えられる。

第10図 : 混合貯留槽挿入法⁴¹⁾

Q: その理由は……。

A: 前者(第9図)はループゲインを下げることであるから第8図における線形要素の周波数軌跡の半径は小さくなり、また後者(第10図)では混合貯留槽が低域低波器の特性すなわち高周波数領域でゲインが低下する特性を有するから線形要素の周波数軌跡は第11図のようになって、両軌跡の交叉を避けられるのである。

第11図 ベクトル軌跡⁴¹⁾

以上、今回は非線形系の解析法の1つである記述関数法について、造粒閉回路を例にとって説明した。

参考文献

- 40) 高橋安人: システムと制御(第2版)上・下, 岩波書店(1978)
- 41) P. E. Wellstead, M. Cross, N. Munro and D. Ibrahim: On the design and assessment of control schemes for balling-drum circuits used in pelletising, Intl. J. of Mineral Processing, 5 (1978) 45~67.