現況総括

土の構成式に関する現況総括

5. 粒状体としてのアプローチ

(Constitutive Equations of Soils)
(5. Approach as Granular Materials)

松 岡

元* (Hajime Matsuoka)

キーワード：構成式※／歴史

IGC： D5/D6

粒状体とは、固体でも液体でも気体でもない、粒子（固相）と他の相（間隙水や間隙空気）からなる土のような多相混合体に対して名付けられたものであろう。土質材料を研究対象としてながめたとき、このことは最も基本的かつ本質的な事実であるとともに、その究明を困難にしている原因であると考えられる。ここでは、土が粒子の集合体であるという原点に立ち戻って土の構成関係を求めようとした研究を紹介する。したがって、必ずしも砂質土に限る必要はないが、一般に粒子径の大きい砂を対象とした研究が多いことと粘性土については2.でふれられているので、主に砂質土についての研究を以下にまとめる。

(1) せん断現象に関して

現在の土質力学では、平均有効主応力一定のもとでせん断応力（あるいはせん断・有効垂直応力比）が変化する現象を「せん断」と呼んでいるようである。Reynolds (1885¹⁾, 1886²⁾) はせん断応力の増加に伴う体積膨張をダイレイタンスー (dilatancy) と名付けたが、この術語が土質力学の中で重要な意味をもつのは、この現象が従来の連続体理論（例えば等方弾性論）では説明しにくいためであろうと考えられる。しかし、このダイレイタンスーは周知のように粒子の密な集合体を想定すれば容易に理解できるものである。このように、土の応力・変形挙動を根本的に理解するには、土が粒子の集合体であるという本来の姿を直視する必要がある。これは魅力的なアプローチではあるが、大きさ・形の異なる粒子の不規則な集合体である土をこの立場から追求することには多

くの困難を伴う。そこで、この立場の研究は、(i)種々の実験的手法により実態の把握を行うとともに、(ii)ある種の単純化の仮定のもとにモデル化および理論展開を行うことによって、進められてきたように思われる。

Newland と Allely (1957³⁾) は、せん断中に粒状体内の個々の粒子接点で生じるすべり現象に着目し、粒子間の物理摩擦角 ϕ_μ と粒子接点の接触角 θ を微視的要因としてピーク強度 $\tau_{\max}$ と残留強度 τ_R の差を次式によって説明しようとした。

$$\tau_{\max}/\sigma_N = \tan(\phi_\mu + \theta) \quad (5.1)$$

$$\tau_R/\sigma_N = \tan \phi_\mu \quad (5.2)$$

$$(\delta v/\delta \Delta)_{\max} = \tan \theta \quad (5.3)$$

ここに、 σ_N はせん断面上に働く有効垂直応力であり、 $(\delta v/\delta \Delta)$ はダイレイタンスー増分とせん断変位増分の比に関する量を表わす。しかし、上式によって計算された τ_R は実測の残留強度と一致しなかったのも、彼らはその原因として粒子接点での微視的なすべりが必ずしもそのまま巨視的な測定量に反映されないためであると述べている。なお、彼らの研究は粒状体のせん断抵抗を粒子間摩擦角 ϕ_μ によるものと粒子構造に係わる粒子接点角 θ によるものと明確に分離した最初のものであり、彼ら以後の研究者に多大の影響を及ぼしている。

Rowe (1962⁴⁾) は、砂が粒子からできていることを重視すべきであると説き、まず等径の棒や球の種々の規則配置の場合について変形機構を詳細に調べることによって、いわゆる「応力・ダイレイタンスー関係」と呼ばれる関係式を導いた。彼は約 10 年ののち Roscoe 追悼シンポジウムに際して、彼自身の仕事を不規則配置の場合も考慮した形でより明快にまとめている (Rowe, 1971⁵⁾)。すなわち、粒状体内の各滑動粒子接点が、図-5.1 に示すような物理摩擦角 ϕ_μ をもった斜面上でのすべりの限界つり合い状態にあるものと考え次式を立てた。

* 名古屋工業大学土木工学科 助教授 (名古屋市昭和区御器所町)

※ 土質工学会制定以外のキーワード

• この現況総括に対するディスカッションは昭和54年7月1日までにご投稿下さい。

図-5.1 斜面上でのすべりの限界つり合い (Rowe, 1971 による)

図-5.2 不規則粒子のすべりの限界つり合い (Rowe, 1971 による)

$$\frac{L_x}{L} = \tan(\phi_\mu + \beta) \quad (5.4)$$

ここに、 L_x は x 軸方向の力であり、 L はすべり面内にあって x 軸に直交する方向の力である。次に、任意の粒子接点ですべりが起る瞬間の粒子接点角を β として次式を得た (図-5.2 参照)。

$$\tan \beta = -\frac{dl}{dx} \quad (5.5)$$

ここに、 dx , dl はそれぞれ L_x , L 方向の変位増分である。式 (5.4), (5.5) を組み合わせると次式を得る。

$$\frac{L_x \cdot dx}{-L \cdot dl} = \frac{\tan(\phi_\mu + \beta)}{\tan \beta} \equiv \bar{E} \quad (5.6)$$

ここで、彼は $\bar{E}$ を上式より粒子接点に対してなされた仕事増分と外力に抗してなした仕事増分の比とみなし、このエネルギー増分比 $\bar{E}$ が最小になるように土は挙動すると考えた。すなわち、 $d\bar{E}/d\beta = 0$ という条件より $\beta = 45^\circ - \phi_\mu/2$, $\bar{E}_{\min} = \tan^2(45^\circ + \phi_\mu/2)$ を得る。彼は、この考え方より一般に 3 主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の作用の下では次式を提案している。

$$\frac{\sigma_1 \cdot d\epsilon_{1s}}{-(\sigma_2 \cdot d\epsilon_{2s} + \sigma_3 \cdot d\epsilon_{3s})} = \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi_\mu}{2}\right) \quad (5.7)$$

ここに、 $d\epsilon_{1s}$, $d\epsilon_{2s}$, $d\epsilon_{3s}$ はそれぞれ 3 主ひずみ増分のすべり成分である。式 (5.7) は実測値に合致させるため ϕ_μ の値を修正して用いられているが、理論の骨子は以上のとおりである。なお、この Rowe の理論にはエネルギー増分比を最小にする意味をはじめとして数々の批判が寄せられている。

Horne (1965⁶⁾, 1969⁷⁾) は、Rowe が応力・ダイレイタンシー関係を導く際に立てたいくつかの仮定について厳密な理論的考察を行い、エネルギー比最小の原理が正当なものであること、粒状体の主要な変形機構は粒子の回転ではなく滑動であること、などを論理的に明らかにした。また、粒状体内の粒子接点を通る立体径路の平均距離を意味する「平均投影立体径路値 (mean projected solid path value)」なる概念を新たに導入したが、これは不規則な粒状体の構造を明確に式示した最初の試みといえよう。さらに、彼は粒状体のひずみの概念を式の形で表現した最初の実験者として評価される。

Scott (1963⁸⁾) は、砂質土の破壊強度に関連して球の集合体の示す力学挙動に注目した。すなわち、等径球の種々の規則配置について摩擦法則を適用したすべりの限界つり合い条件式を立て、摩擦係数値と強度の関係を論じている。

図-5.3 容積要素(土質力学(最上編), p.1011 より)

最上 (1965a⁹⁾, 1965b¹⁰⁾, 1966a¹¹⁾, 1966b¹²⁾, 1967¹³⁾, 1969¹⁴⁾; 最上・今井, 1967¹⁵⁾) は、粒子と間隙からなる粒状体の状態の論理的な表現法について考察し、粒状体内に図-5.3 に示すような多くの容積要素 (cubic volume element) を想定してその要素内の間隙比の分布に着目した。すなわち、粒状体の状態は平均間隙比とその偏差 (deviation) によって規定されると考えた。また、ガラス板上に等径の鋼球群をのせ、せん断変形を与えて間隙分布を調べる実験を繰り返し行うとともに、粒状体の状態を統計論的に考察し、特にエントロピーの概念と結び付けることによって次式を誘導した。

$$\sin \phi = \frac{k}{1+e} \quad (5.8)$$

ここに、 ϕ は内部摩擦角、 e は平均間隙比、 k は間隙比の偏差に関する係数である。なお、式 (5.8) の関係

は中間主応力が0の場合, すなわち平面応力状態に対応するといわれている。三軸圧縮条件, 平面ひずみ条件下ではそれぞれ次式によって表わされる。

$$\text{三軸圧縮: } \sin \phi = \frac{3k_t}{2(1+e)+k_t} \quad (5.9)$$

$$\text{平面ひずみ: } \sin \phi = \frac{3k_p}{2(1+e)} \quad (5.10)$$

式 (5.8), (5.9), (5.10) 中の係数 k , k_t , k_p の値については種々の実験データによって検討され, 同じ試料であればほぼ一定値となることが検証されている。また, この係数値が均等係数の関数として表わされるというデータも紹介されている (最上・吉越, 1968¹⁶⁾)。

村山 (1966¹⁷⁾, 1969¹⁸⁾, 1975a¹⁹⁾, 1975b²⁰⁾, 1976²¹⁾) は, 砂を形・大きさ・配列の不規則な摩擦性粒子の集合

体 (random assembly) とみて, 偏差応力をうけた場合の砂の応力-ひずみ特性を確率論を導入して解析することを試みた。すなわち, 図-5.4 に示すように $(\tau/\sigma)_{\max}$ の面 (最大稼働面と名付けている) を基準とした粒子間力 f_{ri} の方向角 β_i と粒子間接触面の方向角 θ_i がともに正規確率分布 (図-5.5 参照) であるとして取り扱い, 摩擦法則より粒子の滑動条件として次式を与えた。

$$(\theta_i + \delta) - \beta_i \leq 0 \quad (5.11)$$

ここに, δ は粒子間摩擦角である。式 (5.11) の左辺第1項 $(\theta_i + \delta)$ は Scott と Ko²²⁾ (1969) が紹介するように図-5.5 の滑動抵抗角 (shearing strength, curve 2) に相当し, 第2項 β_i は作用外力角 (shearing stress, curve 1) に相当する。このような粒子の滑動に対する砂の統計力学モデルより, 個々の粒子の滑動ひいては弾

性状態にある砂のマクロな応力-ひずみ関係を誘導している。さらに粒子の活性化・転位あるいは粒子構造の分解を考慮することにより塑性, 破壊の各状態での載荷時と除荷時の応力-ひずみ特性を解析した。主要な成果を挙げれば, まず弾性状態での応力-ひずみ関係式として次式を導いた。

$$\left. \begin{aligned} r &= A \cdot W_e \cdot z \\ \lambda \left(-\frac{d\epsilon_n}{d\tau_\beta} \right) + \tan \delta &= \frac{s_{el} + z}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

ここに r は最大せん断ひずみ, z は最大稼働面上のせん断・垂直応力比, A は変位係数, W_e は弾性状態での構造係数, δ は粒子間摩擦角, λ は係数で $\lambda \doteq 1 + \tan \delta$, s_{el} は応力比 z の弾性限界値, ϵ_n と τ_β は最大稼働面におけるそれぞれ体積圧縮ひずみとせん断ひずみである。

また塑性状態における応力-ひずみ関係式として次式を誘導している。

図-5.4 滑動粒子に作用する粒子間力の方向角と粒子間接触面の方向角 (村山, 1975 a による)

図-5.5 作用外力角と滑動抵抗角の分布 (村山, 1975 a による)

$$\left. \begin{aligned} \gamma^* &= A \cdot W_p \cdot (z - s_{el}) \\ W_p &= W_e \cdot (1 + \mu) \cdot (s_{\infty} - s_{el}) / (s_{\infty} - z) \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

$$\lambda \left(-\frac{d\epsilon_n}{d\gamma_\beta} \right) + \tan \delta \doteq z \quad (5.14)$$

ここに、 γ^* は砂が塑性状態に移行したとき以後に発生する最大せん断ひずみ、 μ は粒子の転位に関する係数、 s_{∞} は全粒子が活性化するときの z の値である。図-5.6 はこれらせん断ひずみの関係を図示したものである。塑性状態に対する式 (5.13) の関係は、Kondner ら (1963²³) の提示した双曲線表示の応力-ひずみ関係を応力比-ひずみ関係で示したものと形としては類似しているのがみられる。

図-5.6 応力比-せん断ひずみ関係
(村山, 1975 a による)

また村山・松岡 (1970²⁴), 1971²⁵), 1973²⁶) は、粒状体の 2 次元モデルとして種々の径のアルミ丸棒や光弾性材料の丸棒の積層体を用いて一面せん断試験を行い、せん断に伴う粒子接点角 θ_i の確率分布の変化特性や粒子間力 f_{ri} の伝達特性を調べている。

小田 (1970²⁷), 1972a²⁸), 1972b²⁹), 1972c³⁰), 1974³¹), 1975a³²), 1975b³³) は、低粘性の接着剤を砂の中へ注ぎ込んで固結させ、薄片を作って顕微鏡観察を行った。着目した測定要素は粒子の長軸の方向と粒子間接点における接平面の方向および間隙比の分布である。その結果、砂の初期構造、特に構造の異方性が強度・変形特性に及ぼす影響、砂の変形に伴う構造の変化、さらに大変形に至るまでの各段階における構造の特性を上記測定要素によって定量的に論じた。この際、構造特性の指標として単位立方体中の各粒子間接点での接触面積を YZ ,

図-5.7 粒状体の構造特性の指標 (Oda, 1972 b による)

ZX, XY 面へ投影したものの総和 S_X, S_Y, S_Z およびそれらの比に着目した (図-5.7 参照)。

$$S_X = \overline{\Delta S} \cdot m \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\alpha, \beta) \cos \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot d\alpha \cdot d\beta \quad (5.15)$$

$$S_Y = \overline{\Delta S} \cdot m \int_0^\pi \int_0^\pi E(\alpha, \beta) \sin \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot d\alpha \cdot d\beta \quad (5.16)$$

$$S_Z = \overline{\Delta S} \cdot m \int_0^{\pi/2} \int_2^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot d\alpha \cdot d\beta \quad (5.17)$$

ここに、 $\overline{\Delta S}$ は単位立方体中の粒子間接点での接触面積の平均値、 m は単位立方体中の総接点数、 $E(\alpha, \beta)$ は粒子間接点での接平面の法線 N_i の確率密度関数である。 $E(\alpha, \beta)$ が N_i の XY 平面上への投影角度 α によって変化しない場合には $S_X = S_Y$ であるので、彼は構造特性のインデックスとして S_Z/S_X を選び、このインデックスと主応力比の関係を調べて Rowe の応力・ダイレイタンス式と類似の次式を得た。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{S_Z}{S_X} \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_\mu}{2} \right) \quad (5.18)$$

また小田・小西 (1974a³⁴), 1974b³⁵) は単純せん断における主応力軸の回転と構造の変化の関係を同様の手法で調べ次式を得ている。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \kappa \cdot \tan \phi \quad (5.19)$$

ここに、 ϕ は主応力軸と鉛直軸とのなす角度であり、 κ は粒状体によって決まる定数であるといわれている。

Borowicka (1973³⁶) は、小田と同様の方法によって砂の粒子構造の顕微鏡観察を行い、ゆる詰めと密詰め砂についてせん断前後の粒子接点数および粒子接点角を調べた。その結果、せん断前では粒子接点角の分布はほぼ左右対称であるが、せん断後は分布が著しく片寄ると述べている。

松岡 (1974a³⁷), 1974b³⁸), 1974c³⁹), 1974d⁴⁰), 1976⁴¹) は、せん断時の粒子挙動についての微視的な考察に基づいて、 $(\tau/\sigma_N)_{\max}$ なる土粒子の滑動面上の応力-ひずみ間の基本関係式として対数型 (あるいは指数型ともみられる) の次式を導いた。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = (\mu' - \mu) \cdot \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} + \mu \quad (5.20)$$

$$\epsilon_N = \frac{\mu - \mu'}{\lambda} \gamma \left\{ \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 \right\} \quad (5.21)$$

ここに、 $\tau/\sigma_N, \gamma, \epsilon_N$ はそれぞれ滑動面上のせん断・垂直応力比、せん断ひずみ、垂直ひずみであり、 $\lambda, \mu, \mu', \gamma_0$ は土質パラメーターである。また、この滑動面の概念を 3 次元に拡張して、相異なる 3 主応力下の応力-ひずみ関係式を導くとともに、砂だけでなく粘土の実測データによっても検証している。図-5.8 で原点からの直

図-5.8 相異なる3主応力下の3個の滑動面
(Matsuoka, 1976 による)

図-5.9 3個の滑動面と空間滑動面
(Matsuoka, 1976 による)

線が3個のモールの応力円に接する点は、各2主応力軸間においてせん断・垂直応力比がそれぞれ最大となる応力状態に対応するが、それらを3主応力方向を軸として表示すれば図-5.9のAB, BC, CAとなる。松岡・中井(1974⁴²⁾)はAB, BC, CAを3辺とする面ABCに着目し、これを空間滑動面(Spatial Mobilized Plane; SMP)と名付けた。彼らはSMP上では3主応力下の応力・ひずみ特性がユニークに整理されると述べている。なお、このモデルは軟弱地盤の側方流動に関する有限要素解析に適用して良い結果を得たと報告されている(柴田他, 1975⁴³⁾)。

落合ら(1971⁴⁴⁾, 1972a⁴⁵⁾, 1972b⁴⁶⁾, 1972c⁴⁷⁾)は、各種径のアルミ丸棒の2次元積層体を試料として二軸圧縮試験を行い、せん断に伴う粒子の移動、粒子接点角の分布の変化、粒子の回転および間隙比の分布の変化について調べた。これらの実測結果より、(i)マクロないわゆるすべり方向と粒子の移動方向にはかなりの差(ある実測例では約20°程度)があること、(ii)粒子接点角の分布はいわゆるすべり方向とは異なった方向に卓越し、この方向は粒子の移動方向とほぼ一致すること、(iii)さらにこの粒子接点角の分布はせん断とともに一定のパターンで変化すること、(iv)すべり領域では粒子の移動距離が小さくても粒子自身の回転は比較的大きいこと、(v)粒状体内の間隙比の分布はほぼ正規分布で近似でき、かつせん断とともに平均間隙比および標準偏差が増

加しピーク強度付近ではほぼ最大値となること、などを見出している。

小西(1972⁴⁸⁾, 1973a⁴⁹⁾, 1973b⁵⁰⁾, 1973c⁵¹⁾, 1974⁵²⁾, 1975a⁵³⁾, 1975b⁵⁴⁾)は、各種径の光弾性材料の円柱からなる2次元粒状体について二軸圧縮試験および単純せん断試験を行い、せん断に伴う粒子接点角や粒子間力の変化を光弾性等色縞写真によって調べた。これらの測定結果より、(i)せん断に伴う粒状体の構造の変化は粒子接点角の変化によること、(ii)せん断時に発揮される粒子間物理摩擦角は意外に小さく、しかも一方向のみ発揮されるのではなく平均的には0とみなせること、(iii)最大主応力の方向に粒子接点角は集中する傾向があること(小西・小田, 1974⁵⁵⁾)などを指摘している。

徳江ら(1973⁵⁶⁾, 1974⁵⁷⁾, 1975⁵⁸⁾, 1976a⁵⁹⁾, 1976b⁶⁰⁾)は、粒状体のせん断機構に関する2次元および3次元モデルについて論じている。このモデルは、従来から多くの研究者が出発点とした2個の摩擦のある剛体球のつり合いに基づくもので、それにせん断に伴う粒子接点角の分布の変化の概念を導入している。このような単純なモデルから静止土圧係数や3主応力下の砂の応力・ダイレイタンスー関係について有用な情報が得られると述べている。

大槨(1974⁶¹⁾)は、2次元的な変形条件のもとで粒状体のせん断時の応力・ひずみ関係を導いている。この中で、変形に伴って生じる粒子接点を(i)時刻 t で接して Δt 時間後も接したままの接点(定常接点)、(ii)時刻 t で接して Δt 時間後に分離している接点(分離接点)、(iii)時刻 t で離れていて Δt 時間後に接している接点(形成接点)の3種類に分け、接点角の分布の変化、接点数の変化、2粒子間の接近速度、分離速度の効果を考慮している。

さて、以上の諸研究の共通点を探ってみると、ほとんどの研究が粒子間のすべりに対して摩擦法則を適用し、せん断に伴う粒子接点角の確率分布の変化の概念を用いていることに気付くであろう。そして、そのような研究の内、かなりのものが応力比とひずみ増分比の関係(いわゆる「応力・ダイレイタンスー関係」と同等)の誘導に成功している。考えてみると、マクロな測定量である垂直・せん断ひずみ増分比は、ミクロな観点からすれば粒子接点での接平面の角度(粒子接点角)に対応すると思われるので、これは必然性のあることかもしれない。この応力比・ひずみ増分比関係についていえば、RoweだけでなくCambridge学派(Roscoe他, 1963⁶²⁾; SchofieldとWroth, 1968⁶³⁾)も全く異なったエネルギーの立場より次式を得ていることは興味深い。

$$\frac{q}{p} = M - \frac{\delta v}{\delta e} \quad (5.22)$$

ここに, $q = \sigma_1 - \sigma_3$, $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$, $dv = \delta\epsilon_1 + 2\delta\epsilon_3$, $\delta\epsilon = 2(\delta\epsilon_1 - \delta\epsilon_3)/3$ (三軸圧縮条件の場合) であり, $M(\mu$ の大文字) は摩擦係数に相当するものである。したがって, 現在のところわれわれが信じ得る 1 つの構成関係は, 応力やひずみの選択や表現方法に多少の差はあるが, これらの応力比-ひずみ増分比関係であるといえるかもしれない。しかし, これを応力-ひずみ関係にするにはもう 1 つ条件式が必要である。Cambridge 学派では, この第 2 の条件式として塑性論でいうところの直交条件 (normality condition; 塑性ポテンシャル面に対してひずみ増分の方向が直交する) を採用しているとみることができる。粒状体としてのアプローチでは, 研究者によって種々の試みがなされているが, 現在のところ応力-ひずみ関係式にまでもってきているのは村山, 松岡らの研究であろう。また, 上述の応力比-ひずみ増分比関係と, よく用いられている双曲型の応力-ひずみ関係式を連立させてダイレイタンスの関係式を得るのも 1 つの方法であると考えられる (宮森, 1976⁶⁴)。今後, 一般応力条件 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) 下での応力-ひずみ挙動や載荷のみならず除荷時の応力-ひずみ特性を適切に説明できる構成関係式が有用なものとなるであろう。

(2) 圧密現象に関して

「圧密」とは有効応力比一定のもとで平均有効主応力が増変する現象と考えられているようである。例えば, 有効主応力比 $\sigma_1/\sigma_3 = 1$ の場合を等方圧密, $\sigma_1/\sigma_3 = 1/K_0$ (K_0 : 静止土圧係数) の場合を K_0 圧密 (側方変位が生じない圧密), 一般に $\sigma_1/\sigma_3 \neq 1$ なる場合を異方圧密と呼んでいる。砂質土の場合には間隙水の排出に要する時間が比較的短いので, 「圧縮」と呼ばれることのほうが多いようであるがここでは同義に用いることにする。さて, 圧密に関する応力-ひずみ関係式としては, 周知の $e - \log p$ 関係 (e : 間隙比, p : 圧密応力) があるが, これは 1 つの実験式である。この圧密時の構成関係を粒子の挙動に着目し確率過程論を導入して説明しようとした研究もあるが決定的なものはまだのようである (圧密に限らず, 確率過程論に基づいた土の変形に関する研究としては文献 65)~70) 等がある)。また, 砂質土の異方圧密においては, その応力比が大きい場合圧密応力 (平均有効主応力) の増加とともにかえって体積膨張するという実験結果も報告されている (El-Sohby, 1969 a⁷¹)。そこで, 上記の実験事実を圧密時の個々の粒子の挙動に着目して矛盾なく説明しようとする試みがなされている (El-Sohby, 1969 b⁷²; Rowe, 1971⁵)。

Rowe (1971⁵) は, Hertz の弾性二球の接触に関する理論式

$$\epsilon_i = S \left(\frac{\sigma_i}{E} \right)^m \quad (i=1, 2, 3) \quad (5.23)$$

に基づき, ポアソン比の概念を導入して, 種々の応力比のもとでの砂質土の圧縮特性を論じている。ここに, E は粒子のヤング率, S, m は接触粒子の構造に関する係数と考えられる。彼はこの考えに基づく理論値と砂の圧縮試験の実測値を比較しているが, 試料とその間隙比が同じであれば, ほぼ一定の係数値 S, m によって各種の主応力比のもとでの実測値を説明できると述べている。

さて, 以上のような (1) セン断によるひずみ, および (2) 圧密によるひずみに弾性ひずみを加えれば, 数学的には次のような形の応力増分-ひずみ増分関係の一般表示式に変換することができる。

$$\{d\sigma\} = [D] \cdot \{d\epsilon\} \quad (5.24)$$

ここに, $[D]$ は応力-ひずみマトリックスである。式 (5.24) は容易に有限要素解析に適用できる形であるので, 今後この方面の研究の進展が期待される。なお, このようなアプローチによれば, 塑性ポテンシャル (plastic potential) や硬化関数 (hardening function) などの塑性論の概念を直接用いることなく土の応力-ひずみ関係式を求めることができるわけである。また, 個々の土粒子や間隙水の挙動に着目したレオロジー (時間効果) 現象の究明も興味ある課題であるが, レート・プロセス理論に基づいた試みはすでに 3. で紹介されている。

以上, 本章では主として砂の応力-ひずみ関係に関する研究のうち, 砂が粒子の集合体であるという立場に立ったものをわが国の研究を中心に紹介した。なお, 塑性論的な立場からの研究 (例えば, 佐武, 龍岡ら, 諸戸ら, 他) には触れることができなかった。実は, 本文は 1977 年 1 月にオスロの NGI 滞在中に執筆したものである。文献の入手がままならなかったのと筆者の不勉強のため, 紹介すべき研究で紹介できなかったもの, 紹介の仕方が不適切なものが多々あると思われるが, 御容赦願いたい。

なお, 本文は土の構成式の委員会メンバーである埼玉大学小田匡寛氏に内見をお願いし, 特に Newland と Allely, Rowe, Horne の研究について有益な御意見をいただいた。記して謝意を表する次第である。

参考文献

- 1) Reynolds, O. (1885): "On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact with experimental illustration," Phil. Mag. December or Collected Papers (1901), Vol II, 50.
- 2) Reynolds, O. (1886): "Experiments showing dilatancy, A property of granular material, Possibility connected with gravitation," Collected Papers (1901), Vol II, 51.
- 3) Newland, P. L. and Allely, B. H. (1957): "Volume changes in drained triaxial tests on granular materials," Géotechnique, Vol. 7, No. 1, pp. 17-34.
- 4) Rowe, P. W. (1962): "The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in

- contact," *Proc., Roy. Soc., Ser. A*, Vol. 269, pp. 500—527.
- 5) Rowe, P. W. (1971): "Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil, Stress-strain behaviour of soils," *Proc., Roscoe Memorial Symposium, Cambridge University*, pp. 143—194.
 - 6) Horne, M. R. (1965): "The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles, Part I and II," *Proc., Roy. Soc., Ser. A*, Vol. 286, pp. 62—97.
 - 7) Horne, M. R. (1969): "The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles, Part III," *Proc., Roy. Soc., Ser. A*, Vol. 310, pp. 21—34.
 - 8) Scott, R. F. (1963): *Principles of Soil Mechanics*, Chap. 7, Limiting condition at failure in cohesionless soil, Addison-Wesley Publ. Co., pp. 291—335.
 - 9) Mogami, T. (1965a): "A statistical approach to the mechanics of granular materials," *Soils and Foundations*, Vol. 5, No. 2, pp. 26—36.
 - 10) Mogami, T. (1965b): "A statistical theory of mechanics of granular materials," *Journ. Faculty of Eng., Univ. of Tokyo, Ser. (B)*, Vol. 28, No. 2, pp. 65—79.
 - 11) Mogami, T. (1966a): "Angle of internal friction and a simple transient phenomenon of granular material," *Trans. of JSCE*, No. 128, April, pp. 53—62.
 - 12) Mogami, T. (1966b): "On the deformation of granular material," *Trans. of JSCE*, No. 129, May, pp. 39—44.
 - 13) Mogami, T. (1967): "Mechanics of granular material composed of particles of various sizes," *Trans. of JSCE*, No. 137, Jan., pp. 43—47.
 - 14) Mogami, T. (1969): "Mechanics of granular material as a particulated mass," *Proc., 7th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng.*, Vol. 1, pp. 281—285.
 - 15) Mogami, T. and Imai, G. (1967): "On the failure of the granular material," *Soils and Foundations*, Vol. 7, No. 3, pp. 1—19.
 - 16) Mogami, T. and Yoshikoshi, H. (1968): "On the angle of internal friction of coarse materials," *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus* 63(1-4), pp. 193—199.
 - 17) Murayama, S. (1966): "A theoretical consideration on a behavior of sand," *Proc., IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mech.*, Grenoble, 1964, Springer-Verlag, pp. 146—159.
 - 18) Murayama, S. (1969): "Stress-strain-time behavior of soils subjected to deviatoric stress," *Proc., 7th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.*, Vol. 1, pp. 297—306.
 - 19) 村山朔郎 (1975a): 物性論的にみた砂の力学的挙動, 「京大防災研究所年報」, 第 18 号 A, pp. 13—41.
 - 20) 村山朔郎 (1975b): 弾性状態にある砂の構成式, 「土木学会論文報告集」, 第 236 号, pp. 125—137.
 - 21) 村山朔郎 (1976): 塑性状態にある砂の構成式, 「土木学会論文報告集」, 第 251 号, pp. 77—90.
 - 22) Scott, R. F. and Ko, H. Y. (1969): "Stress-deformation and strength characteristics," *Proc., 7th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng.*, State of the Art Volume, pp. 1—47.
 - 23) Kondner, R. and Zelasco, J. (1963): "A hyperbolic stress-strain formulation for sands," *Proc., Second Panamerican Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.*, Vol. 1, pp. 289—324.
 - 24) 村山朔郎・松岡 元 (1970): 2 次元モデルによる粒状体のせん断現象の微視的考察, 「京大防災研究所年報」, 第 13 号 B, pp. 505—523.
 - 25) 村山朔郎・松岡 元 (1971): 砂と粘土のせん断特性の類似性とそのメカニズムについて, 「京大防災研究所年報」, 第 14 号 B, pp. 551—563.
 - 26) Murayama, S. and Matsuoka, H. (1973): "A microscopic study on shearing mechanism of soils," *Proc., 8th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng.*, Vol. 1, Part 2, pp. 293—298.
 - 27) Oda, M. (1970): "Studies on anisotropy in granular sand," *Report of Depart. Found. Eng., Faculty Sci. Eng., Saitama Univ.*, Vol. 1—34.
 - 28) Oda, M. (1972a): "Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular materials," *Soils and Foundations*, Vol. 12, No. 1, pp. 17—36.
 - 29) Oda, M. (1972b): "The mechanism of fabric change during compressional deformation of sand," *Soils and Foundations*, Vol. 12, No. 2, pp. 1—18.
 - 30) Oda, M. (1972c): "Deformation mechanism of sand in triaxial compression tests," *Soils and Foundations*, Vol. 12, No. 4, pp. 45—63.
 - 31) Oda, M. (1974): "A mechanical and statistical model of granular material," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 1, pp. 13—27.
 - 32) Oda, M. (1975a): "On stress-dilatancy relation of sand in simple shear test," *Soils and Foundations*, Vol. 15, No. 2, pp. 17—29.
 - 33) Oda, M. (1975b): "On the relation $\tau/\sigma_N = \kappa \cdot \tan \psi$ in the simple shear test," *Soils and Foundations*, Vol. 15, No. 4, pp. 35—41.
 - 34) Oda, M. and Konishi, J. (1974a): "Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 4, pp. 25—38.
 - 35) Oda, M. and Konishi, J. (1974b): "Rotation of principal stresses in granular material during simple shear," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 4, pp. 39—53.
 - 36) Borowicka, H. (1973): "Rearrangement of grains by shear tests with sand," *Proc., 8th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng.*, Vol. 1, Part 1, pp. 71—77.
 - 37) Matsuoka, H. (1974a): "A microscopic study on shear mechanism of granular materials," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 1, pp. 29—43.
 - 38) Matsuoka, H. (1974b): "Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 2, pp. 47—61.
 - 39) Matsuoka, H. (1974c): "Stress-strain relationships of clays based on the mobilized plane," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 2, pp. 77—87.
 - 40) Matsuoka, H. (1974d): "Dilatancy characteristics of soil," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 3, pp. 13—24.
 - 41) Matsuoka, H. (1976): "On the significance of the "spatial mobilized plane," *Soils and Foundations*, Vol. 16, No. 1, pp. 91—100.
 - 42) Matsuoka, H. and Nakai, T. (1974): "Stress-deformation and strength characteristics of soil

- under three different principal stresses,"Proc., JSCE, No. 232, pp. 59—70.
- 43) 柴田 徹・富永真生・松岡 元・菅野安男 (1975): 軟弱地盤の有限要素解析, 「土と基礎」, Vol. 23, No. 1, pp. 27—33.
 - 44) 落合英俊・山内豊聡・棚橋由彦 (1971): 二次元積層体によるせん断中の粒子移動特性について, 「第26回土木学会年次学術講演会, 第3部」.
 - 45) 落合英俊・山内豊聡 (1972a): 二次元積層体によるせん断中の粒子移動と回転について, 「第7回土質工学研究発表会」.
 - 46) 落合英俊 (1972b): 二次元積層体による粒状体のせん断現象, 「長崎大学工学部研究報告」, 第3号, pp. 65—75.
 - 47) 落合英俊・山内豊聡 (1972c): 二次元積層体によるせん断中の間ギャク比分布の変化について, 「第27回土木学会年次学術講演会, 第3部」.
 - 48) 小西純一 (1972): 粒状体の変形機構について, 「第27回土木学会年次学術講演会, 第3部」.
 - 49) 小西純一 (1973a): せん断変形中の粒状体における粒子間伝達力, 「第8回土質工学研究発表会」.
 - 50) 小西純一 (1973b): 微視的にみた粒状体のせん断過程, 「信州大学工学部紀要」, pp. 179—194.
 - 51) 小西純一 (1973c): 粒状体のせん断にともなう粒子間伝達力の変化について, 「第28回土木学会年次学術講演会, 第3部」.
 - 52) 小西純一 (1974): 粒子間まざつ角のせん断強度および微視的構造に対する影響, 「第29回土木学会年次学術講演会, 第3部」.
 - 53) 小西純一 (1975a): 繰返しせん断を受ける粒状体の構造について, 「第10回土質工学研究発表会」.
 - 54) 小西純一 (1975b): 2次元粒状体せん断時の応力状態, 「第30回土木学会年次学術講演会, 第3部」.
 - 55) 小西純一・小田匡寛 (1974): 粒状体のせん断における主応力軸の方向について, 「第9回土質工学研究発表会」.
 - 56) 福岡正巳・徳江俊秀 (1973): 粒状体のせん断機構に関する二次元モデルとその応用, 「第8回土質工学研究発表会」.
 - 57) 徳江俊秀 (1974): 粒状体のせん断モデルと静止土圧係数, 「第9回土質工学研究発表会」.
 - 58) 徳江俊秀 (1975): 粒状体のせん断機構に関する三次元モデル, 「第10回土質工学研究発表会」.
 - 59) 徳江俊秀 (1976a): 粒状体のせん断機構に関する三次元モデル (その2), 「第11回土質工学研究発表会」.
 - 60) 徳江俊秀 (1976b): 粒状体のせん断機構に関する三次元モデル (その3), 「第31回土木学会年次学術講演会, 第3部」.
 - 61) 大槻正紀 (1974): 粒状体の2次元変形について, 「第9回土質工学研究発表会」.
 - 62) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A. (1963): "Yielding of clays in states wetter than critical," *Géotechnique*, Vol. 13, pp. 210—240.
 - 63) Schofield, A. N. and Wroth, P. C. (1968): *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill.
 - 64) 宮森建樹 (1976): 多軸応力状態における砂のせん断強さと変形特性, 「土木学会論文報告集」, 第255号, pp. 81—91.
 - 65) Litwinişzyn, J. (1956): "Application of the equation of stochastic processes to spatial problems of mechanics of some types of bodies," *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Vol. 4, No. 2, pp. 91—95.
 - 66) Litwinişzyn, J. (1963): "The model of a random walk of particles adapted to researches on problems of mechanics of loose media," *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech.*, Vol. 11, No. 10, pp. 61—70.
 - 67) Litwinişzyn, J. (1964): "The model of a random walk of particles adapted to researches on problems of mechanics of loose media," *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech.*, Vol. 12, No. 5, pp. 281—286.
 - 68) 松尾 稔・駒田智久・高橋通夫 (1966): 砂層の変形に関するモンテカルロ法的研究, 「第21回土木学会年次学術講演会, 第3部」.
 - 69) Brahma, C. H. (1969): "Analysis of granular soil deformation as a stochastic process," Ph. D. Thesis, Ohio University.
 - 70) 北村良介 (1976): ランダム粒状体のモデル化に関する一考察, 「第11回土質工学研究発表会」.
 - 71) El-Sohby, M. A. (1969a): "Deformation of sands under constant stress ratios," *Proc., 7th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng.*, Vol. 1, pp. 111—119.
 - 72) El-Sohby, M. A. (1969b): "Elastic behavior of sand," *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol. 95, No. SM6, pp. 1393—1409.

(原稿受付, 1977. 5. 17)