地下浅所のトンネル掘削に伴う地表沈下の弾性解析

(Elastic Analysis of Surface Subsidence due to Shallow Tunneling)

木 山 英 郎* (Hideo Kiyama)
藤 村 尚** (Hisashi Fujimura)

キーワード：地盤／沈下／弾性／土圧／トンネル／
変形 (IGC : E 1/E 2)

1. ま え が き

地下浅所のシールドトンネルの掘進に伴う地表沈下の問題は、新オーストリア・トンネル工法 (NATM 工法) における変位制御の問題と同様、切羽の進行に伴うトンネル縦断面方向の影響を考慮する必要があるとして、三次元的解析手法の開発に議論の中心が移ろうとしている。

とはいえ、複雑な地盤条件や隣接構造物への影響、あるいは沈下防止のための補助工法の評価といった点では、トンネル横断面での二次元弾性解析 (大部分が有限要素法である) が主体的であることには変わりがない。

その場合、基本となる地盤の自重と地表面の影響を厳密に考慮した地表沈下の理論式がないため、例えばトンネル深さと地表沈下量の関係についても、一般的にはトンネルが深いほど地表沈下量は減少するものと考えられるが、全く逆の解析結果を与えている例も少なくない。このように地表沈下に関する有限要素法の解は根本において必ずしも一致しておらず、そのため実測結果の解釈にも少なからず混乱をきたしている。

これに関連した弾性理論式としては、水平地表面に近接して掘削された円形トンネル周りの応力が安蔵¹⁾ (1937) や Mindlin²⁾ (1939) によって求められている。ともに Jeffery³⁾ (1921) の双極座標の応力関数を重力場に適用したものである。伊藤⁴⁾ (1951) によってなされた傾斜地表面下の円形トンネル周辺の応力解析もその応用といえる。このようにトンネル周辺の応力場は種々検討されているが、変位状態に関するこの種の解析は少なく、わずかに Jeffery の式あるいは Limanov の式⁵⁾ (1960) とよばれる近似解が知られているのみである。

そこで著者らは、Mindlinの応力解析の手法に習って、地盤の自重と地表面の影響を厳密に考慮した二次元弾性

地盤内の変位解析を行うことにした。その際、基礎となる双極座標の応力関数と変位関数の一般解は上記した Jeffery³⁾によって示されており、倉西⁶⁾ (1949) によって紹介されているのでそれらを参考にした。

2. 解 析 の 基 礎

2.1 地盤内の初期応力状態

トンネル掘削以前の水平地盤内の応力状態について、図-1 に示す Mindlin の仮定した3つの典型的なモデルについて解析する。

重力による物体力ポテンシャル Ω 、地盤の単位体積重量を w とおけば、上記3例とも Ω は次式で与えられる。

$$\Omega = -wy \quad (1)$$

一方、直角座標で表した応力関数 χ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\chi_1 = 0 \quad (\text{case I}) \quad (2)$$

$$\chi_{2,3} = Swy^3; S = \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)} \quad (\text{case II}) \quad (3a)$$

$$S = \frac{1}{6} \quad (\text{case III}) \quad (3b)$$

2.2 双極座標の応力関数

地表面と円形トンネルを境界線とする双極座標 (図-2) を用いる。直角座標 (x, y) と双極座標 (α, β) との間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= ia \coth \frac{1}{2}(\alpha + i\beta) \\ x &= J \sin \beta \\ y &= J \sinh \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 a は原点 O と双極座標の極 ($\alpha = \pm\infty$) との距離である。また双極座標における写像拡大率の逆数 J および、 α 軸 ($\beta = \text{const.}$ 線の接線) と x 軸のなす角 ϕ は次式で与えられる。

$$J = \frac{a}{\cosh \alpha - \cos \beta} \quad (5)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\cosh \alpha \cos \beta - 1}{\sinh \alpha \sin \beta} \quad (6)$$

更に、極 ($\alpha = \pm\infty$) を中心とした極座標 (r, θ) 表示すれば、 ϕ, α, β はそれぞれ次式で与えられる。

* 鳥取大学工学部土木工学科 助教授 (鳥取市湖山町南 4-101)

** 鳥取大学工学部土木工学科 助手 (鳥取市湖山町南 4-101)
(1981. 11. 14 原稿受付・討議期限 1983. 7. 1)

図-1 Assumed initial earth pressures (by Mindlin)

図-2 Bipolar co-ordinates

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \pi/2 \quad (7)$$

$$\alpha = \ln r_1 / r_2 \quad (8a)$$

$$\beta = \theta_1 - \theta_2 \quad (8b)$$

この双極座標において、トンネル壁面は $\alpha = \alpha_1 = \text{const.}$ 、地表面は $\alpha = \alpha_0 = 0$ と表され、トンネル中心位置の y 座標 h_0 およびトンネル半径 r_0 は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= a \coth \alpha_1 \\ r_0 &= a \operatorname{cosech} \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

さて、Jeffery は双極座標における応力関数 χ の基礎式として次式を導き、その一般解を与えている。

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) \left(\frac{\chi}{J} \right) = 0 \quad (10)$$

なお、応力成分 $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ はこの χ と Ω とから次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_\alpha &= \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cosh \alpha \right\} \left(\frac{\chi}{J} \right) + a\Omega \\ a\sigma_\beta &= \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right\} \left(\frac{\chi}{J} \right) + a\Omega \\ a\tau_{\alpha\beta} &= -(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\chi}{J} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

2.3 双極座標の変位成分

双極座標においては、写像拡大率 $1/J$ が $f(\alpha) + g(\beta)$ の形になることから、直角座標におけると同様な簡便な式で変位関数の求まることが Jeffery³⁾ によって示された。すなわち、変位関数 Q は応力関数 χ から次式で計算される。ただし、物体力ポテンシャルはないものと仮定される。

$$\frac{Q}{J} = \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right) \frac{\chi}{J} d\alpha d\beta \quad (12)$$

ここに、上式の積分定数は次式を満足するように決定する必要がある。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right) \frac{Q}{J} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\chi}{J} \right) = 0 \quad (13)$$

ここで、物体力ポテンシャル Ω が存在する当面の課題において上式が適用できるかという疑問が生ずる。その点はこうである。例えば、case I に示す初期応力状態が静水圧状態 ($\Omega = -wy$, $\chi_1 = 0$) の場合^{注1)}、 Ω が誘起する変位成分はトンネル掘削以前に既に地盤内に生じている初期変位状態、すなわち、変位の基準となる地盤状態を表す。したがって、トンネル掘削に伴う地盤変位の解析には、 Ω による変位成分を考慮する必要はなく、 $\Omega = 0$ とした式 (12), (13) を用いて応力関数 χ から対応する変位関数 Q を求めればこと足りるわけである。

χ および Q から変位成分は次式で計算される。

$$\begin{aligned} EU_\alpha &= \left\{ (1+\nu)(1-2\nu) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\chi}{J} \right) - (1+\nu)(1-\nu) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{Q}{J} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{J}{a} \left\{ (1+\nu)(1-2\nu) \frac{\chi}{J} \sinh \alpha - (1+\nu)(1-\nu) \frac{Q}{J} \sin \beta \right\} \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} EU_\beta &= \left\{ (1+\nu)(1-2\nu) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\chi}{J} \right) + (1+\nu)(1-\nu) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{Q}{J} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{J}{a} \left\{ (1+\nu)(1-2\nu) \left(\frac{\chi}{J} \right) \sin \beta + (1+\nu)(1-\nu) \left(\frac{Q}{J} \right) \sinh \alpha \right\} \end{aligned} \quad (14b)$$

なお後述の解析例にみられるように、水平地表面下の地盤沈下を取り扱う場合には、直角座標表示による変位成分 u_x, u_y のほうが都合がよい。その場合には次式の関係を用いて変換される。

注1) case II, III の場合は $\Omega = -wy$, $\chi_{2,3} = Swy^3$ によって生ずる変位成分が初期変位状態を与える(後述)。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_\alpha \cos \phi - u_\beta \sin \phi \\ u_y &= u_\alpha \sin \phi + u_\beta \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3. 応力関数と変位関数の解

3.1 $\chi_1=0$ の場合 (case I)

水平地表面に近接して掘削された円形素掘りトンネルの境界条件 ($\alpha=\alpha_0$ および α_1 において, $\sigma_\alpha=\tau_{\alpha\beta}=0$) を満足し, $\alpha \geq 0$ の半無限板領域で変位の一価性を保証するように, Mindlin²⁾ によって決定された応力関数 χ は次式で与えられる。ただし, 初期応力状態は静水圧状態 $\chi_1=0$ (図-1(a)) である。

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{J} &= K_0 \left\{ \phi \sin \beta + K_1 \alpha \sinh \alpha + K_2 \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) \right. \\ &\quad + K_3 (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta + K_4 \sinh 2\alpha \cos \beta^{2)} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [L_n (\cosh(n+1)\alpha - \cosh(n-1)\alpha) \\ &\quad + M_n ((n-1) \sinh(n+1)\alpha \\ &\quad \left. - (n+1) \sinh(n-1)\alpha) \right] \cos n\beta \left. \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= -\frac{1}{2} w a^2 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 \\ K_1 &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ K_2 &= \frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \coth \alpha_1 \\ K_3 &= -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \\ K_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \coth \alpha_1 - 1 \right) \\ L_n &= \frac{e^{-n\alpha_1} \sinh \alpha_1 (\sinh n\alpha_1 \cosh \alpha_1 - n \cosh n\alpha_1 \sinh \alpha_1)}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \\ M_n &= \frac{e^{-n\alpha_1} \sinh^2 \alpha_1 \sinh n\alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式 (16) の応力関数 χ に対応する変位関数 Q は式 (12), (13) を用いて次式のように決定した。

$$\begin{aligned} \frac{Q}{J} &= 2K_0 \left\{ \sin \beta \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) + K_1 \beta \sinh \alpha \right. \\ &\quad + K_2 \beta (\cosh \alpha - \cos \beta) + K_3 \sinh 2\alpha \sin \beta \\ &\quad + K_4 \cosh 2\alpha \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} [L_n (\sinh(n+1)\alpha \\ &\quad - \sinh(n-1)\alpha) + M_n ((n-1) \cosh(n+1)\alpha \\ &\quad \left. - (n+1) \cosh(n-1)\alpha) \right] \sin n\beta \left. \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

ここに, 係数 $K_0, K_1, \dots, L_n, M_n$ は式 (17) と共通である。

注 2) Mindlin は, Jeffery の解の訂正として, χ/J に $\sinh \alpha (\cosh \alpha \cos \beta - 1)$ の項の追加を提案したが, この中 $\sinh \alpha$ の項は応力を生じないのでその必要がなく, 上記のように $\sinh 2\alpha \cos \beta$ の項のみの追加でよい。

なお, 式 (18) において剛体変位を表す積分定数は以下のようにして決定している。水平変位と回転変位については, y 軸に関する対称性を条件に用いた。一方, 鉛直変位については, 4.1 に後述するように, 地表面の無限遠方 ($\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$) で変位が発散するため, この点で変位を 0 とする慣用法は適用できない。そこで次善の策として, トンネル中心あるいは地盤の自重を考慮する場合には双極座標の極 ($\alpha = \infty$) を基準点とするのが適当と思われる。ここでは後者を用いて, トンネル壁面上の極の深さ位置にある点 ($\alpha = \alpha_1, y = a$) が鉛直方向に移動しないと仮定³⁾して条件とした。

3.2 $\chi_{2,3}=Swy^3$ の場合 (case II および III)

初期応力状態が水平方向変位拘束状態 χ_2 (図-1(b)) および水平方向応力 0 状態 χ_3 (図-1(c)) の場合については, 上述の解 ($\chi_1=0$ の場合) に式 (3) で与えられる $\chi_{2,3}$ に対応する解を重ね合わせることによって決定される。そこで, $\chi_{2,3}$ が誘起するトンネル周辺の応力状態が, 前述の境界条件と変位の一価性を満足するように追加の応力関数 χ' を決定すればよく, それは次式で与えられる²⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\chi'}{J} &= K_0' \left\{ \frac{\sinh^3 \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} + K_2' \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) \right. \\ &\quad + K_3' (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta + K_4' \sinh 2\alpha \cos \beta \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [L_n' (\cosh(n+1)\alpha - \cosh(n-1)\alpha) \\ &\quad + M_n' ((n-1) \sinh(n+1)\alpha \\ &\quad \left. - (n+1) \sinh(n-1)\alpha) \right] \cos n\beta \left. \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

ここに, $K_0' = Swa^2$

$$\left. \begin{aligned} K_2' &= 3 \coth \alpha_1 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 \\ K_3' &= -\frac{3}{2} \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 \\ K_4' &= \frac{3}{2} \coth \alpha_1 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 \\ L_n' &= -\frac{n(n^2-1) \sinh^2 \alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \\ M_n' &= \frac{n \sinh \alpha_1 (n \sinh \alpha_1 + \cosh \alpha_1) + e^{-n\alpha_1} \sinh n\alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

注 3) 都合のよいことにこの仮定は, 式 (12) の積分において式 (13) の適合条件のみを考慮すれば, 実用上十分の精度で満足されることが分かった。したがって, 式 (16) で与えられる χ から式 (12), (13) を用いて決定された式 (18) の Q において, 鉛直方向の剛体変位に関する特別な積分定数の付加はなされていない。

注 4) Mindlin は境界条件の表現に便利のように,

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{2,3}}{J} &= \frac{Swy^3}{J} = K_0' \frac{\sinh^3 \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \\ &= K_0' \left\{ \cosh \alpha + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\cosh \alpha + n \sinh \alpha) e^{-n\alpha} \cos n\beta \right\} \end{aligned}$$

と展開して式 (19) に用いている。しかしながら, これでは応力の計算において, α の小さいところで収れんが遅いので, 境界条件を合わせた後は再び元に戻したほうがよい。

式 (18) の追加の応力関数 χ' に対応する変位関数 Q' は、この χ' を式 (12), (13) に用いて次式のように決定した。ただし、式中の係数 $K_0', K_2', \dots, L_n', M_n'$ は式 (20) と共通である。

$$\begin{aligned} \frac{Q'}{J} = & 2K_0' \left\{ F(\alpha, \beta) + K_2' \beta (\cosh \alpha - \cos \beta) \right. \\ & + K_3' \sinh 2\alpha \sin \beta + K_4' \cosh 2\alpha \sin \beta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [L_n' (\sinh(n+1)\alpha - \sinh(n-1)\alpha) \\ & + M_n' ((n-1) \cosh(n+1)\alpha \\ & \left. - (n+1) \cosh(n-1)\alpha)] \sin n\beta \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

このようにして得られた χ', Q' から計算される変位成分を、case I の χ, Q から計算された変位成分に重ねることによって、case II あるいは III の変位状態が求まる。

4. 変位解の検討

4.1 集中力による変位解の不完全さ

変位解析に当たっては、case I, II および III を通じての基本となる応力関数の式 (16) が、集中力を表す項 $K_0 \phi \sin \beta$ を含んでいることに注意を要する。これは、初期応力の鉛直方向成分が、地盤の自重 w により、深さに比例して増加する場合には、掘削すべきトンネル円周上の応力成分 $\sigma_\alpha, \tau_{\alpha\beta}$ の分布が、単位長さ当たり掘削断面積に相当する土塊重量 $\pi r_0^2 w$ に等しい下向き合力を有することから生じる^{注5)}。すなわち、トンネルを掘削したとき、円周境界条件 $(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_1} = (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_1} = 0$ を満足するためには、まず、この合力を打ち消すべく、掘削土塊重量に等しい力を上向き集中力として空孔内の極に作用させるように基本解が構成されることを意味する (文献 1), 2) 参照)。

ところで、地盤内の一点に集中力が作用する場合の 2 次元変位解には、2 つの基本的な不完全さが存在するこ

とは周知のとおりである^{6), 7)}。それは、例えば、集中力の作用点を中心とした極座標表示 (ρ, θ) を用いて変位を表すとき $\ln \rho$ の項を含むことによる。この項は $\rho \rightarrow 0$ と $\rho \rightarrow \infty$ において無限大の変位を与える。そのため、この変位解の適用は、作用点の近傍と作用点から遠く離れた点を除く範囲内において正解とされている。

上記した応力関数 $\chi/J = K_0 \phi \sin \beta$ もこの集中力に相当し、対応する変位関数 $Q/J = 2K_0 \sin \beta \ln(\cosh \alpha - \cos \beta)$ とでつくる変位も、作用点 ($\alpha \rightarrow \infty$) と遠方 ($\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$) とにおいて無限大となる。幸い集中力の作用点トンネル空孔内にあるため、前者の不完全さを免れているが、後者の不完全さは免れない。したがって、変位解の適用範囲をトンネル断面から適当な領域内として解釈せざるを得ない。

半無限地盤中の集中力による変位の一例として、半径 r_0 のトンネルの掘削土塊重量に当たる集中力 $F = \pi r_0^2 w$ を、極の位置 ($y = a = \sqrt{h_0^2 - r_0^2}$) において y の負の方向に作用させた場合を考える。このときの応力関数 χ_0 は、case I, II および III の基本応力関数式 (16) の一部をなしており、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\chi_0}{J} = & K_0'' \{ \phi \sin \beta + K_1'' \alpha \sinh \alpha \\ & + K_2'' \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ & + K_3'' (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta \\ & + K_4'' \sinh 2\alpha \cos \beta \} \quad (22) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_0'' &= K_0 \\ K_1'' &= -K_2'' = K_1 \\ K_3'' &= -K_4'' = \frac{1}{4(1-\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

上式による鉛直変位 u_y の計算結果を図-3 に示す。ここに、変位は EU_y/wr_0^2 、地盤寸法は x/r_0 および y/r_0 と無次元化してある。図から、各地層の鉛直変位は集中力の作用点から水平方向に離れるにつれ、わずかず沈下を増しながらしだいに平行な曲線となり、 $x \rightarrow \infty$ に対して各地層の u_y がそろって ∞ になる性状が明らかである。したがって、これを含む前節 3. に求めた変位解の適用範囲は、地盤の沈下性状が実際上納得し得る領域内に制限される。

4.2 Limanov の近似解

Limanov は、Jeffery によって例示された半無限板中の円孔周りの応力解を利用して、地盤変位の近似解を求めた⁵⁾。これは、半径 r_0 のトンネルを地表面から深さ h_0 の位置に掘削するとき、トンネル周辺の初期応力が近似的に圧力 $p = wh_0$ の一様な静水圧状態になるものと仮定している。したがって、問題は、掘削すべきトンネル円周上に存在する垂直応力成分 $(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_1} = p$ を消去するた

注 5) 上記 $\chi_{2,3}/J$ に対応する変位関数として、次式のように $F(\alpha, \beta)$ が定まるが、そのままで一般に取れし難い。

$$2K_0' F(\alpha, \beta) = -2K_0' \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n-1) \sinh(n+1)\alpha - (n+1) \sinh(n-1)\alpha \} \sin n\beta$$

ところが、これを生ずる応力関数 $\chi_{2,3}/J$ と物体力ポテンシャル Ω を合わせたものが、与えられた初期応力状態 (case II あるいは case III) を表し、それに対応する変位関数は直角座標を用いて容易に計算できる。

このようにして求めた変位がトンネル掘削以前の地盤変位状態を表すので、トンネル掘削に伴う地盤変位の解析ではこれを計算する必要はない。したがって、変位の解析に当たっては、式 (19) の χ'/J から $\sinh^3 \alpha / (\cosh \alpha - \cos \beta)^2$ の項を、式 (21) の Q'/J から $F(\alpha, \beta)$ の項をそれぞれ除いて用いればよい。

注 6) 例えば、初期地盤内応力が静水圧状態 (case I) の場合、掘削すべき円周上の応力は $\sigma_\alpha = \Omega_{\alpha=\alpha_1}$, $\tau_{\alpha\beta} = 0$ であり、その y 方向の合力 Y は

$$Y = \int_0^{2\pi} \left(\sigma_\alpha \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) d\beta = \pi r_0^2 w$$

と計算される。

図-3 Displacements in a semi-infinite solid subjected to a concentrated load ($\nu=0.25$)

図-4 Assumed conditions by Limanov

めに、図-4 に示すような、一様な引張応力 p を内圧として作用させた場合の変位成分を求めることに帰着される。

水平変位 u_x 、垂直変位 u_y を求めた結果 (付録参照) は次式で示され、我が国ではこれを Jeffery の式とよぶことがある。

$$u_x = -(1+\nu) \frac{p r_0^2}{E} \left\{ \left[2(1-\nu) + (1-2\nu) \frac{h_0}{a} \right] \frac{\cos \theta_1}{r_1} + \left[2(1-\nu) - (1-2\nu) \frac{h_0}{a} \right] \frac{\cos \theta_2}{r_2} + y \left[-\left(\frac{h_0}{a} + 1 \right) \frac{\sin 2\theta_1}{r_1^2} + \left(\frac{h_0}{a} - 1 \right) \frac{\sin 2\theta_2}{r_2^2} \right] \right\} \quad (24a)$$

$$u_y = -(1+\nu) \frac{p r_0^2}{E} \left\{ -\left[2(1-\nu) \frac{h_0}{a} + (1-2\nu) \right] \frac{\sin \theta_1}{r_1} \right.$$

$$\left. + \left[2(1-\nu) \frac{h_0}{a} - (1-2\nu) \right] \frac{\sin \theta_2}{r_2} + y \left[\left(\frac{h_0}{a} + 1 \right) \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} - \left(\frac{h_0}{a} - 1 \right) \frac{\cos 2\theta_2}{r_2^2} \right] \right\} \quad (24b)$$

上式 (24b) で、 $r_1=r_2=a$ 、 $\theta_1=0$ 、 $\theta_2=\pi$ とおけば、トンネル軸直上の地表面に生ずる最大沈下量 $u_{y,\max}$ が求められる。

$$u_{y,\max} = (1-\nu^2) \frac{p}{E} \frac{4 r_0^2 h_0}{h_0^2 - r_0^2} \quad (25)$$

我が国では、式 (25) を Limanov の式とよんでいる。

以上の解析過程から明らかなように、Limanov の変位解は、地盤の自重と物体力として厳密に取り扱ったものではない。そのために生ずる最大の欠点は、内圧として与えるトンネル円周上の応力 σ_a の分布に、掘削土塊重量に等しい大きさの y の負の方向の合力を付与していない点である。更に、初期地盤内応力を、解析の簡単のため、静水圧状態と仮定しているため、鉛直土圧と水平土圧に差がある場合は解に含まれない。したがって、境界条件として地表面の存在を考慮しているにもかかわらず、式 (24) および (25) は掘削土塊重量の影響が相対的に小さくなり、かつ水平土圧が十分に発達する地下深いトンネルの場合にしか正解とはならず、当面の課題である地下浅所のトンネルへの適用には問題があると思われる。この点に関しては後述の計算例において、厳密解と比較して考察される。

5. 計算例

初期地盤内応力が水平方向変位拘束状態にあるとした case II の場合について、3.2 に述べた弾性解を適用して地盤変位を計算し、地表沈下の特徴を考察する。

図-5 Displacements in a semi-infinite ground with a near surface tunnel ($\nu=0.25$, in Case II)

図-6 Stress distributions in the semi-infinite ground with the near surface tunnel ($\nu=0.25$, in Case II)

5.1 地盤内応力と変位

トンネル掘削に伴う地盤の全体的な動きをするため、トンネル深さ $h_0/r_0=5$ の場合について、鉛直変位 u_y および水平変位 u_x を示すと図-5 のようである ($\nu=0.25$)。

また、そのときの地盤内応力を図-6 に示す。

まず、鉛直変位についてみると、トンネルの天井には大きな沈下、床にはその約2倍の大きさの隆起を生じる。天井に生じた沈下は、そのピーク値を減じる一方、水平方向の沈下領域（沈下幅）を増しながら極めて滑らかに上方地盤に伝達されていく。その結果、地表面には、トンネル中心軸の直上に最大値を有する沈下トラフを形成する。

その後、 $x=5r_0$ から $8r_0$ にかけて沈下しない点、あるいは極わずかに隆起する点を経た後、トンネルから離れるにつれて再び沈下量を増し始める。この部分の沈下は、4.1 に論じたように集中力の作用によるもので、図-3 の沈下形状をそ

のまま投影している。實際上トンネル掘削による影響がこの部分まで及ぶとは考えられないから、変位解の不完全さということで、この部分の沈下は無視して差し支えない。このことは、図-6 の応力分布図における初期応力状態のトンネル掘削による乱れの範囲、特に τ_{xy} の生起範囲から裏付けられる。したがって、地表沈下トラフの幅を論じる場合には、地表沈下曲線が初めて0に復する点、今の例では $x \approx 5.7r_0$ を用いればよい。それに続いて量的には極わずかではあるが地表の隆起する部分が見られる。これが弾性論的に正解かどうか、すなわち、この範囲まで変位解を適用できるかどうかの判定は難しい。ただ、沈下トラフ端のすぐ外側に地表の隆起が実測されたという報告⁸⁾もあることを記しておく。

次に、水平変位についてみると、鉛直変位が地盤沈下を示す領域において、水平変位もトンネル軸を含む縦断面に向かう分布を示し、トンネル上方の地盤が全体としてトンネル空洞へ向かって変位することが分かる。なお、その外側の領域においては、トンネルから遠ざかる方向の水平変位を示すが、これは鉛直変位が集中力の作用によって再度沈下を示すのに対応しており、変位解の不完全さによるものと考えられる。

図-7 は沈下量を半径 r_0 で相対化することによって、同一半径のトンネルが深さ h_0 を異にして掘削された場合の地表沈下曲線の変化を示す ($\nu=0.25$)。また、そのときのトンネル円周面の変形状態 (u_x, u_y をベクトル合成したもの) および周方向主応力 σ_β ($\sigma_\alpha = \tau_{\alpha\beta} = 0$ である) の分布をそれぞれ図-8 および図-9 に示す。

地表沈下の最大値は h_0/r_0 によってほとんど変わらないが、沈下トラフの幅は h_0/r_0 の増加とともに増大す

図-7 Surface subsidence curves due to shallow tunneling in different depths ($\nu=0.25$)

図-8 Deformations of the circular tunnels in different depths ($\nu=0.25$, in Case II)

図-9 Tangential stress $(\sigma_\beta)_{\alpha=a_1}$ around the tunnel in different depths ($\nu=0.25$ in Case II)

る。後者については、先の図-5 でみたように、地盤内部の沈下がトンネル円周の左右両端から水平との傾斜角約 45° で引いた線に囲まれた領域内を上方へ向かって伝達されることから容易に理解される。一方、最大沈下量がトンネル深さの増加によっても小さくならないのは、図-9 の周方向主応力 σ_β の増加にみられるように、トンネル掘削に伴う円周面の除荷応力 $\sigma_\alpha, \tau_{\alpha\beta}$ がトンネル深さの増加とともに増大するからである。そのため図-8 にみられるようにトンネル天盤の沈下が、トンネル深さ

の増加とともに比例的に増大し、それが地表面に伝達されることになる。

一方、Limanov の求めた近似解 (Jeffery 式とよばれる式 (24)) から計算される地表沈下曲線も図-7 に点線で示す。上述の厳密解と比較すると、最大沈下量が 1.5 ~ 2 倍と大きいこと、沈下トラフの勾配が極めて緩やかとなり、沈下 0 になる端点が実際的な範囲内に現れないこと、およびトンネル深さが増せば沈下量が急激に減少する傾向を有することなど、著しい差異がみられる。

これらの差異は、Limanov の解が 4.2 に述べた意味での近似解であることのみでは説明できず、むしろ、積分定数の決定に際して (付録参照)、地表面の無限遠方 ($y=0, x=\infty$) において鉛直変位 $u_y=0$ とした条件が不十分なために生じたものであると考えれば説明がつく。このことは、図-7 において厳密解が $u_y=0$ を示す点に至っても、Limanov 解が最大沈下量の約 1/2 に当たる大きな沈下量を有することからも裏付けられる。

したがって、4.2 において Limanov 解は掘削土塊の重量減を考慮していないため、浅いトンネルの場合には誤差が大きく、深いトンネルにおいてのみ厳密解に近づき得ることを述べたが、上述の理由から深いトンネルにおいても誤差が大きく、弾性解としての適用は難しいといわざるを得ない。

5.2 地表沈下の最大値と沈下トラフの幅

図-7 に示した地表沈下曲線を表す特性値として、通常、地表沈下の最大値 $u_{y,\max}$ と沈下トラフの片幅 x_t が用いられる。そこで、これらをトンネル深さ h_0 および地盤のポアソン比 ν の関数として表した詳細図を与える。

まず、図-10 はトンネル半径 r_0 で相対化した $y_{y,\max}$ の変化を示す。トンネルが浅い $h_0/r_0=2\sim5$ の間でわずかに減少するが、それより深くなると一定値に収束する。深くなれば、掘削土塊の重量減の影響がなくなり、一方図-11 に示すようにトンネルクラウンの沈下 $u_{y,c}$ が深さにほぼ比例して増加することによる。この結果をみる限り、トンネルが浅いほど地表沈下の最大値が大きく

図-10 Maximum surface subsidence, $u_{y,max}$ 図-12 Half wide of surface subsidence trough, x_t 図-11 Subsidence of tunnel crown, $u_{y,c}$, and the ratios of maximum surface subsidence, $u_{y,max}$, to $u_{y,c}$

なるという従来の通念は、それほど明確でない。実地盤における即時沈下をすべて弾性変位として解釈することに無理があるとしても、深さによる差がもっと顕著に現れてしかるべきだと思われる。

そこで、トンネル天盤の沈下を等しくした場合のトンネル深さによる地表沈下の大小をみるべく、地表沈下の最大値とトンネルクラウンの沈下量との比を求めて図示した。その結果は図-11 に示されるように、トンネル深さの増加とともにこの比は急激に減少する。深いトンネルの場合の天盤の沈下量は大きく、これを浅いトンネルの場合と同程度に抑えることができれば、地表沈下量を減少させることが可能であることを示す。実際のトンネ

ル掘削においてもこれに似た現象が生じているものと考えられる。したがって、単に浅いトンネルだから地表沈下が大きいたる従来に通念は不正確であり、トンネルクラウンの沈下量との比を考えてはじめて成り立つべき概念であるといえる。

なお、地表沈下の最大値に与える地盤のポアソン比の影響が大きいこと（これは case II の場合、水平方向の初期応力がポアソン比の関数であることにもよる）に注意を要する。ただし、 $u_{y,max}/u_{y,c}$ の値でみれば、この影響はほとんど無視できる。また、Limanov の近似解によるものも図-10 に併記したが、5.2 で考察したとおり、厳密解とは相当異なった値になることが明らかである。

次に、図-12 は地表沈下トラフの幅（片幅 x_t ）とトンネル深さ h_0 との関係を示す。両者が正しく比例関係にあることを示す。ここでもポアソン比の影響は大きい（上述のように、case II の特徴でもある）。ことに、 $\nu=0.25$ 以上では、 $u_y=0$ に達するまでに集中力の作用による不完全さが影響するため、沈下トラフの端点を正確に定めることは不可能となる。実用上は沈下曲線の端部の傾斜から外挿によって概略値を求め得るが、理論的には変位解の不完全さの取扱いに関する合理的な手法の確立を待たねばならない。

6. むすび

水平地表面に近接してトンネルを掘削したとき生ずる地表沈下を、地盤の自重を考慮した弾性理論によって解析した。得られた変位解には集中力の作用による不完全さを含むが、適用範囲を限定することによってその影響を避け、地表沈下の予測に必要な最大沈下量、沈下トラフの幅、およびトンネルクラウンの沈下量などが図-10

～12 のように決定された。これに基づき考察された結果は以下のようである。

沈下トラフの幅はトンネル深さに比例して増加するが、最大沈下量は従来の通念に反してごく浅い場合を除けばトンネル深さに無関係にほぼ一定値となる。これはトンネルクラウンの沈下量が深さに比例して増加することによる。したがって、地表沈下量の多少を論じる場合には、トンネルクラウンの沈下量との比(図-11)を用いて行ふべきである。

一方、Limanovによって示された地表沈下式は、上記の厳密解に比べると、地盤の自重の影響を簡略化したことによる誤差を含むだけでなく、積分定数の決定条件が不十分であったことによる誤差が予想外に大きくて、弾性沈下式として不正確であると結論される。

付録 Limanov の近似解の誘導

図-4 に示された応力の境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 \text{ において, } \sigma_\alpha = p, \tau_{\alpha\beta} = 0 \\ \alpha = 0 \text{ において, } \sigma_\alpha = \tau_{\alpha\beta} = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{i})$$

このときの応力関数および変位関数の一般解は、式(16)および式(18)の一部である次式を用いればよい。

$$\frac{\chi}{J} = B_0 \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) + A_1 (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta + C_1 \sinh 2\alpha \cos \beta \quad (\text{ii})$$

$$\frac{Q}{J} = 2B_0 \beta (\cosh \alpha - \cos \beta) + 2A_1 \sinh 2\alpha \sin \beta + 2C_1 \cosh 2\alpha \sin \beta \quad (\text{iii})$$

式(ii)に境界条件式(i)を用いれば任意定数 B_0, A_1, C_1 は以下のように決定される。

$$\left. \begin{array}{l} B_0 = -pr_0^2 h_0 / a^2 \\ A_1 = pr_0^2 / 2a \\ C_1 = -pr_0^2 h_0 / 2a^2 \end{array} \right\} \quad (\text{iv})$$

式(iv)を式(ii), (iii)に代入し、これらを変位の式(14)に用いると、双極座標の変位成分 u_α, u_β は次のように求まる。

$$\begin{aligned} u_\alpha = & -\frac{pr_0^2}{Ea}(1+\nu) \left\{ (1-2\nu) \left[(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{h_0}{a} \right. \right. \\ & + \cosh 2\alpha \cos \beta \frac{h_0}{a} - \sinh 2\alpha \cos \beta \\ & - \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \left(\frac{1}{2} \sinh 2\alpha \cos \beta \frac{h_0}{a} \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta \right) \right] - (1-\nu) \left[2(\cosh \alpha \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. - \cos \beta) \frac{h_0}{a} + \cosh 2\alpha \cos \beta \frac{h_0}{a} - \sinh 2\alpha \cos \beta \right. \\ & \left. - \frac{\sinh \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} \left(\cosh 2\alpha \sin \beta \frac{h_0}{a} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sinh 2\alpha \sin \beta \right) \right] \} + u_0 \quad (\text{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\beta = & -\frac{pr_0^2}{Ea}(1+\nu) \left\{ (1-2\nu) \left[-\frac{1}{2} \sinh 2\alpha \sin \beta \frac{h_0}{a} \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} (\cosh 2\alpha - 1) \sin \beta - \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} \\ & \times \left(\frac{1}{2} \sinh 2\alpha \cos \beta \frac{h_0}{a} - \frac{1}{2} (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta \right. \\ & + (1+\nu) \left[2 \sinh 2\alpha \sin \beta \frac{h_0}{a} - 2 \cosh 2\alpha \sin \beta \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \left(\cosh 2\alpha \sin \beta \frac{h_0}{a} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \sinh 2\alpha \sin \beta \right) \right] \right] \} \quad (\text{vi}) \end{aligned}$$

ここに、 u_0 は地盤の鉛直方向の剛体変位を表す積分定数である。Limanov はトンネルから遠く離れた地表面の鉛直変位は0とみなし、式(V)で $\alpha=0, \beta \rightarrow 0$ のとき $u_\alpha=0$ となるよう $u_0 = -(pr_0^2/Ea)(1+\nu)(3\nu-2)(h_0/a)$ と定めている。

式(v)および(vi)を式(15)に代入し、地盤の水平変位 u_x および鉛直変位 u_y を求め、かつ座標パラメータを図-4に示す $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ に変換すれば Limanov の与えた式(24)を得る。

参考文献

- 1) 安藏善之輔 (1937): 水平表面に接して一円形孔を有つ重力体中の応力に就いて, 「九州帝大工学集報」, 12 巻 3 号, pp. 145~160.
- 2) Mindlin, R. D. (1939): "Stress distribution around a tunnel," Proc. ASCE, Vol. 65, No. 4, pp. 619-642.
- 3) Jeffery, G. B. (1920): "Plane stress and plane strain in bipolar co-ordinates," Trans. Royal Society, Series A, Vol. 221, pp. 265-293.
- 4) 伊藤富雄 (1951): 傾斜面の下に掘ったトンネル周辺応力について, 「土木学会誌」, 36 巻 2 号, pp. 77~80.
- 5) Széchy, K. (1971): 「トンネル工学 (島田隆夫訳)」, 鹿島出版会, pp. 650~655.
- 6) 倉西正嗣 (1949): 「弾性学」, 国際理工研究社, pp. 367~382.
- 7) 最上武雄編 (1969): 「土質力学」, 技報堂, p. 250.
- 8) Deere, D. U. (1961): "Subsidence due to mining-A case history from the gulf coast region of Texas," Proc. Fourth Rock Mech. Symp., Penn. State.