研究ノート

走行荷重により生じる地盤振動の FEM 解析

(Analysis of Traffic-Induced Vibrations by FEM)

花 里 利 一* (Toshikazu Hanazato)

鵜 飼 恵 三** (Keizo Ugai)

キーワード：振動／弾性／動的／道路／波動
(IGC : E 8)

1. ま え が き

道路を走行する交通荷重により生じる地盤振動に関する研究は主に実験的な側面から追求されており、理論的な研究は少ない^{1)~5)}。本研究は、交通荷重として走行する鉛直荷重を想定し、これが剛な基盤を有する水平弾性多層地盤の表面もしくは内部を水平直線方向に進行する場合の地盤振動の状態を FEM により解析したものである。解析方法は Lysmer らの提案した方法^{6,7)}の拡張である。本文で述べた方法を用いると、図-1 のように盛

図-1 FEM 解析が可能な例 (道路の例)

図-2 FEM 解析が可能な例 (地下トンネルの例)

土でつくられた道路上を車が走行する場合や、図-2 のように地下トンネル内を電車が走行する場合の地盤の振動状態を理論的に解明することができる。また、地盤内応力の算出も可能であり地中構造物に対する影響も評価することができる。

2. 解析上の仮定

2.1 地盤に対する仮定

地盤は剛基盤を有する水平弾性多層地盤と仮定する。この仮定は基盤の剛性がそれより上層の地盤の剛性に比べて十分大きい場合に有効であるが、そうでない場合には、剛基盤との境界における実体波の反射の影響を避けるために剛基盤を十分深い位置に設定する必要がある。その一部は図-1、図-2 に示すように道路盛土部分やトンネルを有してもよい。ただし、盛土やトンネルは水平方向に無限に延びているものとする。FEM 解析では、盛土やトンネルを含む領域を有限要素に分割し、その両側を半無限薄層要素領域とした。これにより、側方無限遠への波動の逸散を考慮することができる。要素分割の例を図-3 に示す。

2.2 走行荷重に対する仮定

走行荷重は鉛直集中荷重とし、一定の間隔 L および定速度 v を保ちながら走行するものとした。荷重が面的な広がりをもつ場合や複数車線の場合にも解析は可能である。走路面が十分滑らかな場合には荷重は一定の大きさを保ちながら走行するであろうが、現実の路面には凹凸や段差があるため荷重は振動し、{一定荷重 (= 車両の静荷重) + 振動荷重} の形で表されるであろう⁸⁾。

荷重は z 軸 (たとえば図-3 では紙面に直交する方向を z 軸とする) に沿って走行するとし、ある一つの荷重が時刻 t で $z=vt$ の位置にあるとすると、 z 軸方向単位長さ当りの鉛直荷重 $p(t, z)$ は次のように表される。

$$p(t, z) = P_0 \delta(vt - z) + f(t) \delta(vt - z) \quad (1)$$

ただし、 $vt - \frac{L}{2} < z < vt + \frac{L}{2}$

ここで、 P_0 は鉛直集中荷重、 $\delta(\quad)$ は Dirac のデル

* 群馬大学工学部建設工学科 助手 (桐生市天神町一丁目)

** 群馬大学工学部建設工学科 助教授 (桐生市天神町一丁目)
(1982. 5. 22 原稿受付・討議期限 1984. 1. 1)

関数, $f(t)$ は荷重の振動性状を表す関数である。

式(1)を Fourier 級数により表示すると

$$p(t, z) = \{P_0 + f(t)\} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_m t - k_m z)} \quad (2)$$

となる。ここで, $k_m = 2m\pi/L$, $\omega_m = k_m v$ である。

2.3 解析の方法を示すためのモデル

次章 3 では, 地盤として 図-1 のモデルを, 荷重として式(2)を構成する一つの調和波形 $p_m(t, z)$ を想定して解析する。ここで, $p_m(t, z)$ は次のようである。

$$p_m(t, z) = e^{i(\omega_m t - k_m z)} \quad (3)$$

3. 解 析

解析は, 図-3 に示すように地盤領域を有限要素領域と薄層要素領域に別けて行う。そのうち両者の結果を境界面で接続し, 走行荷重と地盤応答との関係式を求める。

3.1 有限要素領域の解析

3.1.1 有限要素領域の剛性マトリクス

有限要素の形状は直方体と仮定する。その他の形状の場合については Hwang and Lysmer の文献⁷⁾などを参照されたい。

有限要素領域から任意にとりだした隣りあった2つの直方体要素を図-4 に示す。各々の要素は x, y, z 軸方向に h, b, a の長さをもつ。節点 1, 2, 3, 4 を含む面を A 面, 節点 5, 6, 7, 8 を含む面を B 面, 節点 9, 10, 11, 12 を含む面を C 面と名付ける。

(1) 直方体要素 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の剛性マトリクス
要素内の変位は直線的に変化すると仮定すれば, 直方体の剛性マトリクスは容易に算出できる。すなわち

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \left(\int [B_t]^T [H] [B_t] d(\text{vol}) \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} \quad (4)$$

上式の ( ) 内が直方体要素の剛性マトリクスである。また, $\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B$ は A 面, B 面上の節点力のベクトル, $\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B$ は A 面, B 面上の節点変位のベクトルである。[B_t]

図-3 FEM 解析のための地盤の要素分割例

図-4 直方体要素

は 6 行×24 列のマトリクスで b, h, a の関数である。[H] は応力-ひずみ関係式の係数行列であり

$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

と表せる。 E, ν はヤング率, ポアソン比である。ところで, z 軸方向への波の伝播特性より $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A e^{-ik_a}$ が成り立つから, 式(4)より $\mathbf{F}_A$ は $\mathbf{u}_A$ のみによって表される。ただし, k は k_m を表す。

(2) 直方体要素 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 4 の剛性マトリクス

(1)と同様な手順で計算を進めると次の関係式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_C \\ \mathbf{F}_A \end{Bmatrix} = \left(\int [B_t]^T [H] [B_t] d(\text{vol}) \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_A \end{Bmatrix} \quad (6)$$

波の伝播特性より $\mathbf{u}_C = \mathbf{u}_A e^{ik_a}$ が成り立つから, $\mathbf{F}_A$ は $\mathbf{u}_A$ のみによって表される。

(3) 有限要素領域の剛性マトリクス

(1), (2)より得られた $\mathbf{F}_A$ と $\mathbf{u}_A$ の関係式を加え合わせると次のようになる。

$$\mathbf{F}_A = \left(\int [\bar{B}_S]^T [H] [B_S] d(\text{vol}) \right) \mathbf{u}_A \quad (7)$$

ここで [B_S] は 6 行×12 列の複素マトリクスである。今 a を微小量であるとすれば, 上式は次のようになる⁷⁾。

$$\mathbf{F}_A = a \left(\int [\bar{B}^*]^T [H] [B^*] d(\text{area}) \right) \mathbf{u}_A \quad (a: \text{微小量}) \quad (8)$$

ここで,

$$[B^*] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 & T_{12} & 0 & 0 \\ 0 & T_{21} & 0 & 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{31} & 0 & 0 & T_{32} \\ T_{21} & T_{11} & 0 & T_{22} & T_{12} & 0 \\ 0 & T_{31} & T_{21} & 0 & T_{32} & T_{22} \\ T_{31} & 0 & T_{11} & T_{32} & 0 & T_{12} \\ T_{13} & 0 & 0 & T_{14} & 0 & 0 \\ 0 & T_{23} & 0 & 0 & T_{24} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} & 0 & 0 & T_{34} \\ T_{23} & T_{13} & 0 & T_{24} & T_{14} & 0 \\ 0 & T_{33} & T_{22} & 0 & T_{34} & T_{24} \\ T_{33} & 0 & T_{13} & T_{34} & 0 & T_{14} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$T_{1j} = \partial h_j / \partial x, \quad T_{2j} = \partial h_j / \partial y,$$

$$T_{3j} = -ikh_j \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

$$h_1 = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{x}{h}\right), \quad h_2 = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

$$h_3 = \frac{x}{h} \cdot \frac{y}{b}, \quad h_4 = \frac{x}{h} \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

以上により, 下式(10)で表されるマトリクス $[L]_E$ は, z 軸方向に調和波が伝播する場合の有限要素領域における微小厚さ a の要素に対する剛性マトリクスを表すことが知られる。

$$[L]_E = a \left(\int [\bar{B}^*]^T [H] [B^*] d(\text{area}) \right) u_A \quad (10)$$

行列 $[B^*]$ はHwang & Lysmer⁷⁾が導出した $[B^*]$ に等しい。有限要素領域内の全要素に対する剛性マトリクスは行列 $[L]_E$ を重ね合わせることによって得られる。

3.1.2 有限要素領域における運動方程式

有限要素領域内の微小厚さ a の全要素に対する運動方程式は次のようになる。

$$a[M]_E \{\ddot{u}\}_E + a[K]_E \{u\}_E = \{p\}_E \quad (11)$$

ここで $[M]_E$ は質量マトリクス, $[K]_E$ は剛性マトリクスであり, $\{\ddot{u}\}_E$ は節点における加速度ベクトル, $\{u\}_E$ は変位ベクトル, $\{p\}_E$ は節点に作用する外力のベクトルである。 $\{p\}_E$ には, 薄層要素領域と有限要素領域の間の境界面上に作用する力も含まれる。

3.2 薄層要素領域の解析

3.2.1 薄層要素領域における固有方程式の導出

(1) 剛性マトリクスの導出

図-5は, 図-4に示される2つの直方体要素に隣り合った同じ寸法の2つの直方体要素を表す。面13, 14, 2, 1をD面と名付けると, D面上の節点の力 F_D と変位ベクトル u_D の関係は, 式(8)と同様にして

$$F_D = a \left(\int [\bar{B}^*]^T [H] [B^*] d(\text{area}) \right) u_D \quad (a: \text{微小量}) \quad (12)$$

節点 j の力, 変位ベクトルを F_j, u_j と表すと

図-5 隣り合った直方体要素

$$F_A = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}, \quad F_D = \begin{Bmatrix} F_{13} \\ F_{14} \\ F_2 \\ F_1 \end{Bmatrix}, \quad u_A = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \quad u_D = \begin{Bmatrix} u_{13} \\ u_{14} \\ u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

と表される。また, F_j, u_j は x, y, z 方向成分により次のように表される。

$$F_j = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \end{Bmatrix}, \quad u_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

薄層要素領域における固有値問題を解くために, x 方向に $e^{i(\omega t - \lambda x)}$ の形で伝播する波動を仮定すれば, 図-5から分かるように次式が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} e^{-i\lambda h}, \quad \begin{Bmatrix} u_{13} \\ u_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} e^{i\lambda h} \quad (15)$$

式(8), (13), (15)から得られる $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$ と $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ との関係式と, 式(12), (13), (15)から得られる $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$ と $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ との関係式を重ね合わせ, 更に h を微小量にとると

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = ah \left(\int_0^h [\bar{B}B]^T [H] [BB] dy \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (a, h: \text{微小量}) \quad (16)$$

となる。ここで $[BB]$ は b, y, k, λ により表される6行×6列の複素マトリクスである。式(16)の積分を実施し, ベクトルの順序を変えると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{Bmatrix} = ah[L] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} \quad (a, h: \text{微小量}) \quad (17)$$

ここで $[L]$ は剛性マトリクスである。

(2) 運動方程式

図-6に示すように薄層要素領域を n 層に分割する。深さ方向の要素に対して剛性マトリクスを加え合わせ後, 微小面積を有する四角柱に対する運動方程式をつ

図-6 薄層要素領域

くと次のようになる。

$$ah[M]\{\ddot{u}\} + ah[K]\{u\} = \{p\} \quad (18)$$

ここで, $[M]$ は $3n \times 3n$ の質量マトリクス, $[K]$ は $3n \times 3n$ の剛性マトリクスで $[L]$ を加え合わせたもの, $\{p\}$ は外力ベクトルである。 $\{u\}$ は変位ベクトルであり

$$\{u\} = (u_1 v_1 w_1 \dots u_n v_n w_n)^T$$

と表せる。ただし, 節点番号は地表面上の点から順番に付けなおしたものである。なお, $n+1$ 番目の節点は基盤上の節点であるが, 基盤上での変位はゼロとなるため省略した。質量が節点に集中すると仮定すれば $[M]$ は次のようになる。

$$[M] = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \rho_1 b_1 & & & & & \\ & \rho_1 b_1 & & & & \\ & & \rho_1 b_1 & & & \\ & & & \rho_1 b_1 + \rho_2 b_2 & & \\ & & & & \rho_1 b_1 + \rho_2 b_2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \rho_{n-1} b_{n-1} + \rho_n b_n \\ & & & & & & & \rho_{n-1} b_{n-1} + \rho_n b_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここで, ρ_j, b_j は第 j 層の密度, 層厚である。

(3) 固有方程式

式(18)において, $\{p\} = \{0\}$, $\{\ddot{u}\} = -\omega^2 \{u\}$ とおくと λ に関する固有方程式が得られる。

$$([K] - \omega^2 [M])\{u\} = \{0\} \quad (20)$$

上式を詳しく書くと次のようになる。

$$(\lambda^2 [A^*] + \lambda(k[B_1^*] + [B_2^*]) + k^2[C^*] + k[D^*] + [E^*] - \omega^2 [M^*])v = 0 \quad (21)$$

上式より, 固有値 λ , 固有変位ベクトル v を得ることができる。 0 はゼロベクトルである。 k, ω は式(3)中の k_m, ω_m に相当する。 $[A^*] \sim [M^*]$ は $3n \times 3n$ 行列であり, 各行列を構成する部分要素マトリクスを第 j 層に関して記すと以下のようになる。ただし, $l_j = E_j/(1+\nu_j)$ ($1-2\nu_j$), $m_j = b_j(1-\nu_j)/6$, $q_j = b_j(1-2\nu_j)/6$, $r_j = (4\nu_j-1)/4$ とする。

$$[A_j^*] = l_j \begin{bmatrix} 2m_j & 0 & 0 & m_j & 0 & 0 \\ 0 & q_j & 0 & 0 & q_j/2 & 0 \\ 0 & 0 & q_j & 0 & 0 & q_j/2 \\ m_j & 0 & 0 & 2m_j & 0 & 0 \\ 0 & q_j/2 & 0 & 0 & q_j & 0 \\ 0 & 0 & q_j/2 & 0 & 0 & q_j \end{bmatrix}$$

$$[B_{1j}^*] = \frac{b_j l_j}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_{2j}^*] = i l_j \begin{bmatrix} 0 & r_j & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ -r_j & 0 & 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & -r_j & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & r_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_j^*] = l_j \begin{bmatrix} q_j & 0 & 0 & q_j/2 & 0 & 0 \\ 0 & q_j & 0 & 0 & q_j/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_j & 0 & 0 & m_j \\ q_j/2 & 0 & 0 & q_j & 0 & 0 \\ 0 & q_j/2 & 0 & 0 & q_j & 0 \\ 0 & 0 & m_j & 0 & 0 & 2m_j \end{bmatrix}$$

$$[D_j^*] = l_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_j & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & r_j & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & r_j \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & -r_j & 0 \end{bmatrix}$$

$$[E_j^*] = \frac{3l_j}{b_j^2} \begin{bmatrix} q_j & 0 & 0 & -q_j & 0 & 0 \\ 0 & 2m_j & 0 & 0 & -2m_j & 0 \\ 0 & 0 & q_j & 0 & 0 & -q_j \\ -q_j & 0 & 0 & q_j & 0 & 0 \\ 0 & -2m_j & 0 & 0 & 2m_j & 0 \\ 0 & 0 & -q_j & 0 & 0 & q_j \end{bmatrix}$$

$$[M_j^*] = \frac{\rho_j b_j}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

式(21)は2次の固有方程式であり, 固有値は $6n$ 個得られる。これらを $\lambda_s (s=1, 2, \dots, 6n)$ とすると, このうち $x \rightarrow +\infty$ の方向へ伝わる波もしくは低減する波は, (i) λ_s が実数の場合には正值, (ii) λ_s が複素数の場合にはその虚部が負値, のいずれかの値をとる。物理的な性質よりこれらをみだす λ_s は $3n$ 個ある。これらを $\lambda_s (s=1, 2, \dots, 3n)$ とする。対応する固有変位ベクトル

を $\{v\}_s (s=1, 2, \dots, 3n)$ と書く。すると薄層要素領域内の層境界面での変位は次のように表せる。

$$\{u\} = \sum_{s=1}^{3n} \alpha_s \{v\}_s e^{-i\lambda_s x} e^{i(\omega_m t - k_m z)} \quad (23)$$

ここで、 α_s は各固有ベクトルの成分の割合を示す定数である。

(4) 薄層要素領域内を伝播する波動の一般解

薄層要素領域内の変位は鉛直方向 (y 軸方向) に一次的に変化するとすれば、第 j 層内の変位ベクトル u は次式で表される。

$$u = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{y}{b_j} u_j + \left(1 - \frac{y}{b_j}\right) u_{j+1} \quad (24)$$

ここで、 $u_j = (u_j v_j w_j)^T$, $u_{j+1} = (u_{j+1} v_{j+1} w_{j+1})^T$ は第 j 層の上、下面での変位ベクトルであり、式(23)の左辺のベクトルの成分である。すなわち

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{s=1}^{3n} \alpha_s v_{sj} e^{-i\lambda_s x} e^{i(\omega_m t - k_m z)} \\ u_{j+1} &= \sum_{s=1}^{3n} \alpha_s v_{s,j+1} e^{-i\lambda_s x} e^{i(\omega_m t - k_m z)} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで v_{sj} , $v_{s,j+1}$ は固有変位ベクトル $\{v\}_s$ の成分である。

(5) 有限要素領域と薄層要素領域の境界面上での等価節点力

第 j 層について考える。有限要素領域と薄層要素領域の境界面を $x=0$ 面とする。変位の一般解は式(24)のように表されるから、これを微分することによって第 j 層内の応力が計算できる。更に $x=0$ とおけば $x=0$ 面上での応力が求まる。 $x=0$ 面上での等価節点力は、面上で節点力がなす仮想仕事と、応力がなす仮想仕事とが等しくなるようにした次式から決める。

$$(P_j^T P_{j+1}^T) \left(\frac{\delta U_{bj}}{\delta U_{b,j+1}} \right) = \int \sigma_{bj}^T \delta u_{bj} d(\text{area}) \quad (26)$$

ここで、 $P_{j,j+1}$ は $x=0$ 面上単位長さ (z 軸方向) 当りの節点力ベクトル δU_{bj} , $\delta U_{b,j+1}$ は $x=0$ 面での節点変位ベクトルの変分、 σ_{bj} は $x=0$ 面上の応力ベクトル、 δu_{bj} は $x=0$ 面上の変位ベクトルの変分であり、いずれも項数 3 の列ベクトルである。式 (26) の積分を実施し、整理すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} P_j \\ P_{j+1} \end{pmatrix} = (-i[A_j^*][V_j][A] + [B_j][V_j]) \{\alpha\} \quad (27)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [V_j] &= \begin{bmatrix} v_{1j} & v_{2j} & \dots & v_{3nj} \\ v_{1,j+1} & v_{2,j+1} & \dots & v_{3n,j+1} \end{bmatrix} \\ \{\alpha\} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{3n} \end{pmatrix} \quad [A] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{3n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[B_j] = I_j \begin{bmatrix} 0 & \nu_j/2 & -ikb_j\nu_j/3 \\ (1-2\nu_j)/4 & 0 & 0 \\ -ikb_j(1-2\nu_j)/6 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_j/2 & -ikb_j\nu_j/6 \\ (1-2\nu_j)/4 & 0 & 0 \\ -ikb_j(1-2\nu_j)/12 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_j/2 & -ikb_j\nu_j/6 \\ -(1-2\nu_j)/4 & 0 & 0 \\ -ikb_j(1-2\nu_j)/12 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_j/2 & -ikb_j\nu_j/3 \\ -(1-2\nu_j)/4 & 0 & 0 \\ -ikb_j(1-2\nu_j)/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式(27)を第 1 層から n 層まで加え合わせると

$$\{P\} = (-i[A^*][V][A] + [B][V]) \{\alpha\} e^{i(\omega_m t - k_m z)} \quad (28)$$

ここで、 $\{P\}$ は $x=0$ 面上単位長さ (z 軸方向) 当りの節点力ベクトルである。式(25)より次式が成り立つ。

$$\{u_b\} = [V] \{\alpha\} e^{i(\omega_m t - k_m z)} \quad (29)$$

ここで $\{u_b\}$ は $x=0$ 面上の節点変位ベクトルである。式 (29) を式 (28) に代入すると、節点に作用する力と変位の関係式として次式を得る

$$\{P\} = (-i[A^*][V][A][V]^{-1} + [B]) \{u_b\} \quad (30)$$

3.3 有限要素解析

式(11)において、 $\{p\}_E$ を z 軸方向単位長さ当りの力 $\{P\}_E$ で表すと、次式のようにになる。

$$[M]_E \{u\}_E + [K]_E \{u\}_E = \{P\}_E \quad (31)$$

右辺の $\{P\}_E$ の中には、式 (30) で与えられる節点力ベクトルや外荷重などが含まれる。入力波として式(3)の如き定常調和波を想定しているので応答も調和波となる。したがって、応答節点変位の振幅は次式により与えられる。

$$[K]_A \{U\}_A = \{Q\}_A$$

ここで $[K]_A = [K]_E - \omega^2 [M]_E - [R]_R - [R]_L$

$\{U\}_A$ は変位振幅、 $\{Q\}_A$ は外荷重の振幅を表す。

$[R]_R$ は式 (30) の右辺の係数マトリクスを有限要素領域内の全節点をカバーするように拡張したものである。また $[R]_L$ は、 $x < 0$ 側にある薄層要素領域に関するマトリクスであり $[R]_R$ に相当する。両者は、伝達境界マトリクスとよばれることがあり、Lysmer ら⁶⁾の論文に示されているものに対応する。

4. 計算例

計算例として、図-7 に示す地盤上を、大きさ $P_0=20$ tf(196.2 kN) の鉛直集中荷重が、車間距離 $L=60$ m, 速度 $v=60$ km/h で走行する例を設定した。荷重に関しては、式(2)中の $f(t)$ で示される振動項がゼロである場合と $f(t) = (P_0/2) \cdot e^{i\omega_0 t}$ (ただし、 $\omega_0 = 20\pi$ rad/s) の2つのケースについて計算し、走行中の車両の振動が地

図-7 計算例として用いたモデル
(1tf=9.81 kN, 1tf/m³=9.81 kN/m³)

図-8 モデルの要素分割 (1tf=9.81 kN)

図-9 地表面の変位振幅の距離減衰

盤に与える影響を調べた。実際の計算では、地盤の有限要素分割は図-8 に示すようにし、また式(2)の Fourier 級数項は $n=72$ までとった。

図-9 は地表面の変位振幅の最大値が載荷点からの距離と共に減衰してゆく様子を示したものである。実線、破線、一点鎖線は、荷重が振動しながら走行する場合 ($f(t) = (P_0/2) \cdot e^{20\pi i t}$) の x, y, z 方向の変位振幅を表す。○×△で示した点は、一定荷重で静かに走向する場合 ($f(t)=0$) の x, y, z 方向の変位振幅を表す。この図より、荷重の振動は地盤振動に大きな影響を与え、この傾向は振動源からの距離が大となるほど顕著になることが分かる。

図-10 は地表面の加速度振幅の最大値と載荷点からの距離との関係を示したものである。減衰の傾向は図-9 と同様であるが、一定荷重項の影響は無視できるほど小さいことが分かる。

図-11 は谷口らの実測結果 (文献1) の中の (Fig. 9) と図-10 の y 方向成分 (上下動) とを比較したものである。谷口らの結果は、図-7 に示す地盤条件 (ただし、ポアソン比と減衰定数は筆者らが設定した) のもとで行った 20tf (196.2 kN) トラックの走行実験によるものである。理論解では、荷重の振動を調和波形で仮定しているなど、実測と理論を比較するにあたっていくつかの問題があるが、両者の減衰特性は似かよっており、加速度の値もオーダー的には類似している。走行車両の振動特性をより詳細に調べて $f(t)$ の形を決め、計算を行えば理論と実測を厳密に比較できるであろう。

図-10 地表面の加速度振幅の距離減衰

図-11 谷口、沢田の実測結果¹⁾と理論値との比較

図-12 $x=20\text{m}$ 地点における地表面運動の軌跡
(ただし計算値を示すプロットを直線で結んだ)

図-12 は $x=20\text{m}$ 地点の地表面の運動の軌跡を描いたものである。運動は Rayleigh 波の動きを示している。

5. 結 論

(1) 鉛直荷重が剛な基盤を有する水平弾性多層地盤

の表面もしくは内部を水平直線方向に進行する場合の地盤振動の状態を FEM によって解析する方法を示した。

(2) 走行荷重自体の振動により大きな地盤振動が発生する。静荷重の走行によって発生する地盤振動は小さく、荷重点から離れるにつれて急激に減衰する。

(3) いくつかの仮定を設定した上で、谷口らの実測結果と比較したところ、計算結果は実測地盤加速度の一部と類似した結果を与えた。

(4) 地表面の運動は Rayleigh 波の動きを示した。

謝辞

図面をトレースしていただいた小板橋技官に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Taniguchi, E. and Sawada, K. (1979): "Attenuation with distance of traffic-induced vibrations," *Soils and Foundations*, Vol.19, No.2, pp.15-28.
- 2) 谷口栄一・佐々木康・佐藤信一(1980): 盛土を伝播する振動に関する現場実験, 「第15回土質工学研究発表会講演集」, pp.1201~1204.
- 3) 岩崎敏男・常田賢一・後藤勝志(1981): 道路交通振動の軽減対策に関する調査(その2), 「第16回土質工学研究発表会講演集」, pp.1277~1280.
- 4) 藤 正廣・大保直人・片山恒雄(1980): 自動車によって発生する地盤振動の距離減衰特性, 「第35回土木学会年次学術講演会講演概要集 I」, pp.503~504.
- 5) 達下文一(1979): アスファルト舗装の構造による自動車交通振動低減のための実験, 「土と基礎」, Vol.27, No.8, pp.17~24.
- 6) Lysmer, J. and Waas, G. (1972): "Shear waves in plane infinite structures," *ASCE*, EM 1, pp.85-105.
- 7) Hwang, R.N. and Lysmer, J. (1981): "Response of buried structures to traveling waves," *ASCE*, GT 2, pp.183-200.