傾斜地盤中のトンネルの弾性解析

(Elastic Analysis of Sallow Tunneling under the Inclined Surface)

木 山 英 郎* (Hideo Kiyama)
藤 村 尚** (Hisashi Fujimura)
森 木 悟*** (Satoru Moriki)

キーワード：地盤／弾性／土圧／トンネル／変形
IGC：E1/E2

1. ま え が き

地下浅所のトンネル掘進による地表沈下の問題は、切羽の進行に伴うトンネル縦断面方向の影響を考慮する必要があるとして、三次元的解析手法の開発に研究の中心が移りつつある。しかしながら、複雑な地盤条件や隣接構造物への影響、あるいは沈下防止のための補助工法の検討といった実用面では、トンネル横断面での、主として有限要素法による、二次元弾性理論解析が現在なお有力な手段となっている。

その際基本となる、地盤の自重と地表面の影響を厳密に考慮した地盤変位の理論式がないため、例えばトンネル深さと地表沈下量の関係についても、一般的にはトンネルが深いほど地表沈下量は減少するものと考えられるが、全く逆の解析結果を与えている例も少なくない。このように変位解析では根本において不一致がみられるため、実測結果の解釈にも少なからず混乱をきたしているのが実情である。

更に傾斜地盤においては、水平地盤における正規分布曲線のような、地表沈下の標準曲線が知られておらず、傾斜角やトンネル深さと最大沈下位置や沈下トラフの左右幅の偏りとの関係など、基本的な沈下特性を早急に明らかにする必要がある。

傾斜地盤中のトンネル周辺の応力解は伊藤 (1951)¹⁾によって既に報告されている。これは Jeffery (1921)²⁾の解析手法を傾斜地盤の重力場に適用したものであり、応力関数が二重級数に展開されている。そのため、応力解析の目的には十分であるが、これを利用して変位関数を求めることは難しい。

先の水平地盤の変位解析³⁾の経験から、Mindlin

(1939)⁴⁾が求めた単純級数形の応力関数が変位関数の誘導に適していることが知られている。したがって、傾斜地盤に対してもこの形の応力関数を決定できれば、変位解析は可能となる。

本論文は、そうした応力関数の構成と対応する変位関数の決定、および得られた変位解の問題点と解析例について報告する。

2. 初期地盤内応力

図-1 に示すように、水平面と角 ζ をなす傾斜地盤において、地表面から垂直距離 h_0 の位置に中心をもつ、半径 r_0 の円形トンネルを掘削する場合を考える。地盤は完全弾性体と仮定し、座標軸 x, y を同図に示すようにとする。

トンネル掘削以前の地盤内各点の応力が地表面からの鉛直深さに相当する地盤重量のみによるものとすれば、地盤の単位体積重量を w として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -wy \cdot \sin \zeta \cdot \tan \zeta \\ \sigma_y &= -wy \cdot \cos \zeta \\ \tau_{xy} &= -wy \cdot \sin \zeta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

この自由土圧に加えて、 x 方向の変位を 0 に拘束する条件を付すと、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -wy \cdot \cos \zeta + wy \cdot \cos \zeta \\ &\quad \times \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} - \tan^2 \zeta \right) \\ \sigma_y &= -wy \cdot \cos \zeta \\ \tau_{xy} &= -wy \cdot \sin \zeta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

本論文では、式 (2) で与えられる初期地盤内応力を仮定する。

ところで、先の水平地盤内トンネルの変位解析³⁾において、水平方向 (x 方向) の変位を 0 に拘束した初期地盤内応力状態、すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -wy + 6S_0wy \\ \sigma_y &= -wy \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

あるいは、重力ポテンシャル Ω_0 と応力関数 χ_0 を用いて表した、

* 鳥取大学工学部海洋土木工学科 教授 (鳥取市湖山町南 4 丁目 101)

** 鳥取大学工学部土木工学科 助手 (鳥取市湖山町南 4 丁目 101)

*** 東洋建設 (有)

(1983. 9. 26 原稿受付・討議期限 1985. 7. 1, 要請があれば 1 か月の期限延長可能)

図-1 Co-ordinates and the forces required to annul the resultant of the stresses produced on $\alpha = \alpha_1$ by the body force

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0 &= -wy \\ \chi_0 &= S_0 wy^3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

とした場合の変位解を既に得ている。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \partial^2 \chi / \partial y^2 + \Omega \\ \sigma_y &= \partial^2 \chi / \partial x^2 + \Omega \\ \tau_{xy} &= -\partial^2 \chi / \partial x \partial y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

したがって、式(2)の中、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -(w \cos \zeta) y + 6 S_1 (w \cos \zeta) y \\ \sigma_y &= -(w \cos \zeta) y \\ \tau_{xy} &= 0; \quad S_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} - \tan^2 \zeta \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

の部分、式(3)において w を $w \cos \zeta$ 、 S_0 を S_1 と置き換えることによって水平地盤の解が利用できる。

結局、残りの初期地盤内応力、式(2-2) (以下、せん断初期応力場と呼ぶ) に対する解を求めればよいことになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} &= -w \sin \zeta \cdot y \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

3. せん断初期応力場の解

式(2-2)の初期応力状態は式(5)によって、次式のように重力ポテンシャル Ω_1 と応力関数 χ_1 で表しうる。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= -w \sin \zeta \cdot x \\ \chi_1 &= w \sin \zeta (xy^2/2 + x^3/6) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

図-1において、地表面を $\alpha = 0$ 、トンネル壁面を $\alpha = \alpha_1$ とする双極座標 (α, β) を導入すれば、式(6)および(2-2)はそれぞれ式(7)および(8)と書ける。ただし、水平地盤の解と係数を揃えるため $K_0 = -(1/2) w a^2 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1$ と置く。

$$\left. \begin{aligned} a \Omega_1 &= 2 K_0 \sin \zeta \sinh^2 \alpha_1 \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} \\ \chi_1 / J &= -K_0 \sin \zeta \sinh^2 \alpha_1 \\ &\times \left[\frac{\sinh^2 \alpha_1 \sin \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} + \frac{\sin^3 \beta}{3(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a \sigma_\alpha &= 4 K_0 \sin \zeta \sinh^2 \alpha_1 \\ &\times \frac{(\cosh^2 \alpha - 1)(\cosh \alpha \cos \beta - 1) \sin \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} \\ a \sigma_\beta &= -a \sigma_\alpha \\ a \tau_{\alpha\beta} &= -2 K_0 \sin \zeta \sinh^2 \alpha_1 \sinh \alpha \\ &\times \frac{(\cosh \alpha \cos \beta - 1)^2 - (\sinh \alpha \sin \beta)^2}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

この初期応力状態の地盤に $\alpha = \alpha_1$ のトンネルを掘削した場合の境界条件は次式となる。

$$(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_1} = (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_1} = 0 \quad (9-1)$$

$$(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_1} = (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_1} = 0 \quad (9-2)$$

この中、地表面の境界条件式(9-1)は満たされているので、トンネル壁面の条件式(9-2)を満たすように補助の応力関数を定めればよい。

そのためには、まず式(7)の重力ポテンシャル Ω_1 が $\alpha = \alpha_1$ 上につくる応力成分 $\sigma_\alpha, \tau_{\alpha\beta}$ の合力 X, Y, L を求めて、これを打ち消す応力関数 χ_2 を導入する。それには Jeffery²⁾ が示した次の関係を利用するのがよい。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} a(\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_1} &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\beta + b_n \sin n\beta) \\ a(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_1} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\beta + d_n \sin n\beta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

のとき、 X, Y, L は次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} X &= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - d_n) e^{-n\alpha_1} \\ Y &= -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n - c_n) e^{-n\alpha_1} \\ L &= -2\pi a \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ω_1 のつくる $(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_1}, (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_1}$ は式(8)の一部であって、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_1} &= a \Omega_1 = 2 K_0 \sin \zeta \sinh^2 \alpha_1 \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha_1 - \cos \beta} \\ &= 4 K_0 \sin \zeta \sinh^2 \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \sin n\beta \end{aligned}$$

$$a(\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_1} = 0$$

よって、 $a_n = b_n = c_n = 0$ 、 $d_n = 4 K_0 \sin \zeta \sinh^2 \alpha_1 e^{-n\alpha_1}$ を式(11)に用いて、次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} X &= -8\pi K_0 \sin \zeta \sinh^4 \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-2n\alpha_1} \\ &= -2\pi K_0 \sin \zeta = \pi r_0^2 w \sin \zeta \\ Y &= L = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

つまり、 $\alpha = \alpha_1$ 面に働く重力ポテンシャル Ω_1 の合力は、 x の正方向に $X = \pi r_0^2 w \sin \zeta$ なる大きさとなる(掘削土の重量の x 方向分力に相当する)。これを打ち消すには x の負の方向に等大の集中力をトンネル中心に作用させればよい。そのための応力関数 χ_2 は、図-1に示す

ように注1)作用点をトンネル中心から双曲座標の極 c_1 ($\alpha=\infty$)に移し, x 負の方向の集中力 $X_1=-\pi r_0^2 w \sin \zeta$ と反時計回りのモーメント $L_1=\pi r_0^2 w \sin \zeta (h-a)$ に分解することによって, $\alpha>0$ 領域で変位の一価性を保証する次の応力関数を得る。

$$\frac{\chi_2}{J} = -K_0 \sin \zeta \left[\phi \sinh \alpha - \coth \alpha_1 \right. \\ \left. \times \phi (\cosh \alpha - \cos \beta) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \alpha \sin \beta \right]$$

ここに ϕ は β 曲線の接線が x 軸となす角である。

この χ_2 は境界条件, 式 (9-1) の $(\sigma_a)_{\alpha=0}=0$ を満足しているが, $(\tau_{a\beta})_{\alpha=0} \neq 0$ であるので, 補助の応力関数を加えて $(\tau_{a\beta})_{\alpha=0}=0$ も満たすように調整しておく。これを新たに χ_2 と書けば, 次式となる。

$$\frac{\chi_2}{J} = -K_0 \sin \zeta \left[\phi \sinh \alpha - \coth \alpha_1 \right. \\ \left. \times \phi (\cosh \alpha - \cos \beta) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \alpha \sin \beta \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\coth \alpha_1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right) \sinh 2\alpha \sin \beta \right] \quad (13)$$

この χ_2 によって, せん断初期応力場, 式 (8) がつくるトンネル壁面応力の合力を打ち消せたので, 後は壁面各点で境界条件, 式 (9-2) を厳密に満足するよう追加の応力関数 χ_3 を導入すればよい。 χ_3 としては $\alpha=0$ の境界条件, 式 (9-1) を満足するものを用いる。すなわち,

$$\frac{\chi_3}{J} = -K_0 \sin \zeta \left[I_4 \cosh 2\alpha \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(\alpha) \sin n\beta \right] \\ f_n(\alpha) = S_n [\cosh(n+1)\alpha - \cosh(n-1)\alpha] \\ + T_n [(n-1) \sinh(n+1)\alpha \\ - (n+1) \sinh(n-1)\alpha] \quad (14)$$

式 (7) の Ω_1, χ_1 , 式 (13) の χ_2 , 式 (14) の χ_3 を合わせた, $\Omega = \Omega_1$, $\chi/J = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3)/J$ を双極座標の応力式 (15) に代入し, $(\tau_{a\beta})_{\alpha=\alpha_1} = (\sigma_a)_{\alpha=\alpha_1} = 0$ となるように未知定数 I_4, S_n, T_n を決定する。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_a &= \left[(\cosh \alpha - \sin \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right. \\ &\quad \left. - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cosh \alpha \right] \left(\frac{\chi}{J} \right) + a\Omega \\ a\sigma_\beta &= \left[(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right. \\ &\quad \left. - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] \left(\frac{\chi}{J} \right) + a\Omega \\ a\tau_{a\beta} &= -(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\chi}{J} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

すなわち, 次式となる。

注・1) 掘削土の重量の y 方向分力に相当する $Y=\pi r_0^2 w \cos \zeta$ の消去のための, $Y_1=-Y$ の作用も示してある。これについては水平地盤中のトンネル解析³⁾で取り扱われた。結局, 傾斜地盤中のトンネル解析においても, X_1, L_1, Y_1 を合わせて掘削土の重量に相当する鉛直方向の力を消去することになる。

$$\left(\frac{a\tau_{a\beta}}{K_0 \sin \zeta} \right)_{\alpha=\alpha_1} \\ = -(\cosh \alpha_1 - \cos \beta) \\ \times \left[2 \sinh^3 \alpha_1 \frac{(\cosh \alpha_1 \cos \beta - 1)^2 - (\sinh \alpha_1 \sin \beta)^2}{(\cosh \alpha_1 - \cos \beta)^4} \right. \\ \left. - \left(\coth \alpha_1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right) (\cosh 2\alpha_1 - 1) \cos \beta \right. \\ \left. - \frac{\sinh \alpha_1 (\cosh \alpha_1 \cos \beta - 1)}{(\cosh \alpha_1 - \cos \beta)^2} \right. \\ \left. - I_4 \sinh 2\alpha_1 \cos \beta - \sum_{n=2}^{\infty} n f_n'(\alpha_1) \cos n\beta \right] = 0 \quad (16-1)$$

$$\left(\frac{a\sigma_a}{K_0 \sin \zeta} \right)_{\alpha=\alpha_1} \\ = 4 \sinh^4 \alpha_1 \frac{\sin \beta (\cosh \alpha_1 \cos \beta - 1)}{(\cosh \alpha_1 - \cos \beta)^3} \\ + \sinh^2 \alpha_1 \left[2 \left(\coth \alpha_1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right) \sinh \alpha_1 \sin \beta \right. \\ \left. - \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha_1 - \cos \beta} \right] \\ + 4 I_4 \sinh^2 \alpha_1 \cosh \alpha_1 \sin \beta - 3 f_2(\alpha_1) \sin \beta \\ - \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\sinh \alpha_1 f_n'(\alpha_1) + \frac{1}{2} (n-2)(n-1) f_{n-1}(\alpha_1) \right. \\ \left. - (n^2-1) \cosh \alpha_1 f_n(\alpha_1) + \frac{1}{2} (n+1)(n+2) \right. \\ \left. \times f_{n+1}(\alpha_1) \right] \sin n\beta = 0 \quad (16-2)$$

式中の三角関数の分数項は次のフーリエ級数展開式を用いて, $\sin n\beta$ と $\cos n\beta$ の項として整理できる。

$$\frac{(\cosh \alpha_1 \cos \beta - 1)^2 - (\sinh \alpha_1 \sin \beta)^2}{(\cosh \alpha_1 - \cos \beta)^4} \\ = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n(n^2-1) e^{-n\alpha_1} \cos n\beta \\ \frac{\cosh \alpha_1 \cos \beta - 1}{(\cosh \alpha_1 - \cos \beta)^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\alpha_1} \cos n\beta \\ \frac{(\cosh \alpha_1 \cos \beta - 1) \sin \beta}{(\cosh \alpha_1 - \cos \beta)^3} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n \coth \alpha_1) e^{-n\alpha_1} \sin n\beta \\ \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha_1 - \cos \beta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \sin n\beta$$

この結果, 式 (16-1) より,

$$I_4 = \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \tanh \alpha_1 - 1 \quad (17-1)$$

$$f_n'(\alpha_1) = -2 \sinh \alpha_1 \left[1 - \frac{2}{3} (n^2-1) \sinh^2 \alpha_1 \right] e^{-n\alpha_1} \quad (17-2)$$

式 (16-2) より,

$$f_2(\alpha_1) = -\frac{4}{3} \sinh^2 \alpha_1 (2 \sinh \alpha_1 + \cosh \alpha_1) e^{-2\alpha_1} \quad (17-3)$$

$$f_n(\alpha_1) = -\frac{4}{3} \sinh^2 \alpha_1 (n \sinh \alpha_1 + \cosh \alpha_1) e^{-n\alpha_1} \quad (17-4)$$

を得る。式 (17-2) と (17-4) を式 (14) に用いて係数 S_n, T_n は次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} S_n &= \frac{f_n(\alpha_1)(n^2-1)\sinh n\alpha_1 \sinh \alpha_1 + f_n'(\alpha_1) \times (\sinh n\alpha_1 \cosh \alpha_1 - n \cosh n\alpha_1 \sinh \alpha_1)}{2(\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1)} \\ T_n &= \frac{-f_n(\alpha_1)(\sinh n\alpha_1 \cosh \alpha_1 + n \cosh n\alpha_1 \sinh \alpha_1) + f_n'(\alpha_1) \sinh n\alpha_1 \sinh \alpha_1}{2(\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

以上で、式 (2-2) で与えられたせん断初期応力場に掘削されたトンネルに関する Ω と χ は完全に定まったことになる。

4. 傾斜地盤中のトンネル周辺の応力解と変位解

前節で求めた初期応力状態、式 (2-2) に対する Ω_1 と χ_1, χ_2, χ_3 ；および先に報告した水平地盤に対する Ω_0, χ_0 の w を $w \cos \zeta$ と置くことによって初期応力状態、式 (2-1) を満足するよう修正した Ω_0 と χ_0 ；を加えることによって初期応力状態、式 (2) で与えられる傾斜地盤下のトンネルに関する重力ポテンシャル Ω と応力関数 χ の厳密解が次式のように定まる。

$$\begin{aligned} a\Omega &= 2K_0 \cos \zeta \sinh^2 \alpha_1 \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \\ &\quad + 2K_0 \sin \zeta \sinh^2 \alpha_1 \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi/J &= K_0 \cos \zeta \left\{ \phi \sin \beta + K_1 \alpha \sinh \alpha \right. \\ &\quad + K_2 \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ &\quad + K_3 (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta + K_4 \sinh 2\alpha \cos \beta \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[L_n (\cosh(n+1)\alpha - \cosh(n-1)\alpha) \right. \\ &\quad + M_n ((n-1) \sinh(n+1)\alpha \\ &\quad \left. - (n+1) \sinh(n-1)\alpha) \right] \cos n\beta \Big\} \\ &\quad + K_0' \cos \zeta \left\{ \frac{\sinh^3 \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \right. \\ &\quad + K_2' \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ &\quad + K_3' (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta + K_4' \sinh 2\alpha \cos \beta \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[L_n' (\cosh(n+1)\alpha - \cosh(n-1)\alpha) \right. \\ &\quad + M_n' ((n-1) \sinh(n+1)\alpha \\ &\quad \left. - (n+1) \sinh(n-1)\alpha) \right] \cos n\beta \Big\} \\ &\quad - K_0 \sin \zeta \left\{ \sinh^2 \alpha_1 \left[\frac{\sinh^2 \alpha \sin \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \frac{\sin^3 \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \right] \right. \\ &\quad + \phi \sinh \alpha + I_1 \phi (\cosh \alpha - \cos \beta) + I_2 \alpha \sin \beta \\ &\quad \left. + I_3 \sinh 2\alpha \sin \beta + I_4 \cosh 2\alpha \sin \beta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{n=2}^{\infty} [S_n (\cosh(n+1)\alpha - \cosh(n-1)\alpha) \\ &+ T_n ((n-1) \sinh(n+1)\alpha \\ &- (n+1) \sinh(n-1)\alpha)] \sin n\beta \Big\} \quad (20) \end{aligned}$$

ここに、

$$K_0 = -\frac{1}{2} w a^2 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1, \quad K_1 = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},$$

$$K_2 = \frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \coth \alpha_1, \quad K_3 = -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)},$$

$$K_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \coth \alpha_1 - 1 \right)$$

$$L_n = \frac{e^{-n\alpha_1} \sinh \alpha_1 (\sinh n\alpha_1 \cosh \alpha_1 - n \cosh n\alpha_1 \sinh \alpha_1)}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1}$$

$$M_n = \frac{e^{-n\alpha_1} \sinh^2 \alpha_1 \sinh \alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1}$$

$$K_0' = S_1 w a^2, \quad S_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} - \tan^2 \zeta \right)$$

$$K_2' = 3 \coth \alpha_1 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1, \quad K_3' = -\frac{3}{2} \operatorname{cosech}^2 \alpha_1$$

$$K_4' = \frac{3}{2} \coth \alpha_1 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1$$

$$L_n' = -\frac{n(n^2-1) \sinh^2 \alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1}$$

$$M_n' = \frac{n \sinh \alpha_1 (n \sinh \alpha_1 + \cosh \alpha_1) + e^{-n\alpha_1} \sinh n\alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1}$$

$$I_1 = -\coth \alpha_1, \quad I_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \left(\coth \alpha_1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right),$$

$$I_4 = \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \tanh \alpha_1 - 1$$

$$S_n = \frac{\sinh^2 \alpha_1 \left[(n \cosh \alpha_1 - \sinh n\alpha_1 \coth \alpha_1) e^{-n\alpha_1} - \frac{2}{3} n(n^2-1) \sinh^2 \alpha_1 \right]}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1}$$

$$T_n = \frac{\sinh^2 \alpha_1 \left[\frac{2}{3} n \sinh \alpha_1 (n \sinh \alpha_1 + \cosh \alpha_1) - \frac{1}{3} e^{-n\alpha_1} \sinh n\alpha_1 \right]}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1}$$

応力成分 $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ は式 (19), (20) を式 (15) に用いて計算される。この中、下線を施した重力ポテンシャルならびに応力関数の一部は初期地盤内応力、式 (2) を与える。したがって、これらが誘起する変位成分はトンネル掘削以前に既に地盤内に生じている初期変位状態を表す。トンネル掘削に伴う地盤変位としては、これら初期応力に関する項を除いた残りの応力関数によるものを解析すればよい。

応力関数 χ に対する変位関数 Q は次式で計算される。

$$\frac{Q}{J} = \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right) \frac{\chi}{J} d\alpha d\beta \quad (22)$$

ここに、積分定数は次式を満たすように決定する必要がある。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right) \frac{Q}{J} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\chi}{J} = 0 \quad (23)$$

式(20)の χ (下線を施した項は除外して)を式(22), (23)に用いて Q を決定すれば次式となる。

$$\begin{aligned} Q/J = & 2K_0 \cos \zeta \{ \sin \beta \ln(\cosh \alpha - \cos \beta) \\ & + K_1 \beta \sinh \alpha + K_2 \beta (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ & + K_3 \sinh 2\alpha \sin \beta + K_4 \cosh 2\alpha \sin \beta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [L_n(\sinh(n+1)\alpha - \sinh(n-1)\alpha) \\ & + M_n((n-1)\cosh(n+1)\alpha \\ & - (n+1)\cosh(n-1)\alpha)] \sin n\beta \} \\ & + 2K_0' \cos \zeta \left\{ K_2' \beta (\cosh \alpha - \cos \beta) \right. \\ & + K_3' \sinh 2\alpha \sin \beta + K_4' \cosh 2\alpha \sin \beta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [L_n'(\sinh(n+1)\alpha - \sinh(n-1)\alpha) \\ & + M_n'((n-1)\cosh(n+1)\alpha \\ & - (n+1)\cosh(n-1)\alpha)] \sin n\beta \} \\ & - 2K_0 \sin \zeta \left\{ \sinh \alpha \ln(\cosh \alpha - \cos \beta) \right. \\ & + I_1(\cosh \alpha - \cos \beta)(\ln(\cosh \alpha - \cos \beta) - 1) \\ & + I_2 \beta \sin \beta - I_3 \cosh 2\alpha \cos \beta - I_4 \sinh 2\alpha \cos \beta \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} [S_n(\sinh(n+1)\alpha - \sinh(n-1)\alpha) \\ & + T_n((n-1)\cosh(n+1)\alpha \\ & - (n+1)\cosh(n-1)\alpha)] \cos n\beta \} \quad (24) \end{aligned}$$

ここに、各係数は応力関数の式(21)と共通である。

以上に求めた応力関数、式(20)と変位関数、式(24)を次式に用いて、 α 方向、 β 方向の変位成分 u_α, u_β を計算できる。

$$\left. \begin{aligned} Eu_\alpha = & (1+\nu)(1-2\nu) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \right] \left(\frac{\chi}{J} \right) \\ & + (1+\nu)(1-\nu) \left[-\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} \right] \left(\frac{Q}{J} \right) \\ Eu_\beta = & (1+\nu)(1-2\nu) \left[\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} \right] \left(\frac{\chi}{J} \right) \\ & + (1+\nu)(1-\nu) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \right] \left(\frac{Q}{J} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

5. 計算結果と考察

5.1 変位解の問題点

初期地盤内応力を式(2-1)と式(2-2)に分割し、前者に対しては水平地盤の解を利用している。この解にお

いて、集中力の作用を表す応力関数 $\phi \sin \beta$ の項に対応する変位関数 $\sin \beta \ln(\cosh \alpha - \cos \beta)$ の項がつくる y 方向の変位が、トンネルから遠く隔たった点において無限大に発散する。したがって、この変位解の適用がトンネル近傍に限られることは前報で詳述したとおりである。

更に、今回求めたせん断初期応力場、式(2-2)に対する集中力の作用を表す応力関数 $\phi \sinh \alpha$ の項に対応する変位関数 $\sinh \alpha \ln(\cosh \alpha - \sin \beta)$ の項がつくる x 方向の変位が、同様にトンネルから遠方で無限大に発散する。

これら2つの項の存在により、傾斜地盤に対する変位解の適用はトンネル周辺の有限領域に限られる。このことは、地下浅所のトンネル掘削に伴う地表沈下の解析を目的とする場合には実用上の支障とならない。

今一つは変位場の基準点(不動点)の問題がある。応力関数、式(20)が応力に関する限り厳密解を与えていることから、上記の問題は変位関数を求める式(22)の積分定数の決定にある。積分定数は変位の適合条件から導かれる式(23)の制約を受けているが、それでもなお、並進ならびに回転の剛体変位を表す項の存在を許している。

変位関数、式(24)において $K_0 \cos \zeta$ と $K_0' \cos \zeta$ に関する項については、水平地盤の解において検討したように、 y 軸に対する変位の対称性と、 y 方向変位を $y=a$ ($a=\infty$ 極の深さ)のトンネル壁面を零点に選ぶことによって、近似的に $a=\infty$ 極を基準点とした解を得た。それは、単に適合条件式(23)を満たすよう積分定数を決定することによって、特別な剛体変位に関する付加項を加えることなく達成された。

残された問題は、傾斜地盤の解で新たに加わった式(24)における $K_0 \sin \zeta$ に関する項にある。この項に関しては、変位場の対称性や明確な不動点が存在しない。そこで、上述の結果を考慮して適合条件式(23)を満たすことのみを条件に積分定数を決定し、剛体変位に関する特別な付加項を考慮しないことにした。したがって、この変位解の適用性は、計算によって得られる地盤の変位状態、ことにトンネル周辺と地表面の変位状態の観察から実用的な判定を下す以外に方法はない。

5.2 計算例

地盤の変位は式(25)の u_α, u_β から、鉛直変位 u_v と水平変位 u_h に変換して計算した。傾斜地盤中のトンネル掘削に伴う地盤変位の一例を図-2に示す。図は各点の u_v, u_h をベクトルの的に合成して示してある。トンネル中心を通る鉛直軸 y_0 を境に、山側の地盤と谷側の地盤とに相当な動きの差が見られる。また、トンネル上方の地盤が、水平地盤の場合のように空洞へ向かう直線的な移動から、一例を連続的な矢印で示すように、空洞に

図-2 Displacements in a inclined ground with a near surface tunnel ($h_0/r_0=5$)

図-3 Surface subsidence curves due to tunneling in different depths

図-4 Surface subsidence curves due to tunneling in differently inclined grounds ($h_0/r_0=5$, $\nu=0.25$)

向かう曲線状の移動に変化するなどの特徴をもつ。また、図示した範囲内では、地盤変位は極く自然であり前項 5.1 で指適した変位解の問題点が支障を生じてないことがわかる。

図-5 Deformations of circular tunnels (a) in different depths and (b) in differently inclined grounds

図-6 Tangential stress σ_β around the tunnel in different depths under the inclined surface

図-3 は地表沈下曲線がトンネル深さによって変化する様子を示す。最大沈下量は h_0/r_0 で表したトンネル深さによってほとんど増減しないこと、最大沈下を示す位置は、トンネルが浅い ($h_0/r_0=2$) 場合ほぼトンネル中心の鉛直上方地点 (O_2') にあるが、深くなるにつれてそれより谷側へ移動すること、などがわかる。ポアソン比による影響も大きい、これは主として x 方向変位拘束とした初期応力状態、式 (2) におけるポアソン比の効果によるものである。

地盤の傾斜角 ζ の変化に伴う地表沈下曲線の変化の一例を図-4 に示す。水平地盤を基準にして、傾斜角 ζ の増加とともに、沈下トラフ幅の山側への増大、最大沈下量のわずかな増大、最大沈下地点の谷側への移動などが認められる。

図-5 (a), (b) は図-3, 図-4 に対応するトンネル壁面の変位状態を示す。図-5 (a) は水平地盤と $\zeta=30^\circ$

の傾斜地盤を対比して、トンネル深さの影響を示す。傾斜地盤において h_0/r_0 の増加とともに、トンネルクラウン付近の沈下の著しいことと、スプリング部の拡幅、空洞の回転状の変位を伴うことなどが観察される。

図-5 (b) は地盤の傾斜角 ζ の影響を示す。上記 h_0/r_0 の影響に比べると大きくはないが、 ζ の増加が上記した h_0/r_0 の増加の影響と同一の傾向を示すことがわかる。

以上のように、水平地盤に比べて著しい傾斜地盤のトンネル変形は、図-6 に示す壁面応力 σ_β の相違による。傾斜地盤においてクラウン部の引張り応力の集中と、スプリング部の圧縮応力の集中とが著しい。また、この最大圧縮応力の作用点に向かって、トンネル空洞が回転状の変位を行っていることがわかる。

5.3 最大地表沈下量と沈下トラフ幅

水平方向変位 u_h を無視し、鉛直方向変位 u_v のみに注目して、最大地表沈下量 $u_{v,s}$ とトンネル深さ h_0/r_0 の関係を示すと図-7 (a) のようである。水平地盤に比べると傾斜地盤の $u_{v,s}$ は大きくなるが、両者とも、 h_0/r_0 に無関係にほぼ一定値を示す。

図-7 Dependence of (a) maximum surface subsidence $U_{v,s}$ and (b) tunnel crown subsidence $U_{v,c}$ on the depth of tunnel h_0/r_0

図-8 Relationships between the subsidence ratio $U_{v,s}/U_{v,c}$ and the tunnel depth h_0/r_0

一方、図-7 (b) に示すように、トンネルクラウン付近の最大沈下量 $u_{v,c}$ はトンネル深さの増加とともに増大する。ここでも傾斜地盤の $u_{v,c}$ のほうが大となる。

そこで両者の比 $u_{v,s}/u_{v,c}$ と h_0/r_0 の関係を求めると図-8 のようになる。 $u_{v,s}/u_{v,c}$ の値は h_0/r_0 の増加とともに減少する。また、水平地盤と傾斜地盤におけるこの関係がほとんど一致している。

つまり、前報で報告したように、地表沈下量の基本としてトンネルクラウンの沈下を同程度に抑えることができれば、深いトンネルほど地表沈下量は小さくなると理解される。更に、 $u_{v,s}/u_{v,c} \sim h_0/r_0$ 関係が地盤の傾斜に関係なく一意的に定まることは、傾斜地盤の地表沈下特性を水平地盤のそれから推定するうえに大いに役立つものとする。

次に地表面に生ずる沈下トラフの幅 ($2X_t$) とトンネル深さ h_0/r_0 の関係を水平地盤について図-9 (a) に実線で示す。これは図-10 に示すように、トンネル中心から勾配 45° の線分で囲まれた範囲が沈下領域とみなして得られる $X_t = h_0$ の線 (図-9 (a) の点線) によって近似できる。

一方、 $\zeta = 30^\circ$ の傾斜地盤の解析値は図-9 (b) に実線で示される。これも図-10 に示すようにトンネル中心

図-9 Half wide of surface subsidence trough X_t (a) in the horizontal ground and (b) in the inclined ground

図-10 Simplified method for calculation of X_t

から勾配 45° の線分で囲まれた沈下領域を仮定すると、山側のトラフ幅 $X_{t,u} = h_0 \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \zeta\right) - \tan\zeta \right]$ 、谷側のトラフ幅 $X_{t,l} = h_0 \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \zeta\right) + \tan\zeta \right]$ となり、それらは図-9 (b) に点線で示される。水平地盤に比較した山側の沈下トラフ幅の増加と谷側の沈下トラフ幅の減少の傾向は補えているが、山側の沈下トラフ幅の過大評価が著しい。これは、図-2 に示したように傾斜地盤の変位が空洞に向かって曲線状に伝達されることによるもので、こうした沈下領域の直線近似法の限界とみななければならない。

6. 結 論

掘削土の自重効果が無視できない地下浅所 ($h_0/r_0 < 10$) のトンネル掘削に伴う地表沈下について、傾斜地盤を対象に2次元弾性解析を行って検討した。結果を要約すると以下のものである。

(1) 傾斜地盤に対する変位解析は、水平地盤における同様に、Mindlin の手法にならって単純級数形の応力関数を求めることによって、比較的容易に変位関数を構成し、解析解を得る。

(2) 得られた解は式 (19), (20), (21) および (24) にまとめられ、それらは先に求めた水平地盤の解と、傾斜地盤に特有のせん断初期応力場の解とから成る。集中力の作用による無限遠点での変位発散と、剛体変位に対する基準点 (不動点) のあいまいさの問題が残るが、有限範囲での実用計算には支障がない。

(3) 計算結果、傾斜地盤における地表沈下曲線は、水平地盤における正規分布曲線とは相当異なった形状となる。すなわち、地盤の傾斜角の増加とともに、山側へ

の沈下範囲の拡大、ならびに最大地表沈下量の増大と最大沈下点の谷側への移動を生じ、左右非対称な地表沈下曲線となる。

(4) それらは、傾斜角の増加によって生ずるトンネル壁面の著しい応力集中と集中位置の偏り、それに伴うクラウン部の沈下量の増大と空洞の回転状の変位に帰因する。

(5) 傾斜地盤におけるトンネル深さの増加は、上記傾斜角の増加と同様に、トンネル壁面の応力集中の増大に伴うクラウン部の沈下量が著しい増大と地表面の沈下トラフ幅の比例的な増大を招くが、最大地表沈下量にはほとんど影響を与えないのが特徴である。

(6) 最大地表沈下量とクラウンの沈下量との比で整理することによって明らかとなった地表沈下の基本的事項として、トンネル深さとともに増加するクラウンの沈下を浅いトンネルの場合と同程度に抑えることができれば、深いトンネルほど地表沈下量は減少すること、およびその量的関係が水平地盤と傾斜地盤を通じて、つまり地盤の傾斜角に無関係にほぼ一意的に定まっていることの二点が強調される。

参 考 文 献

- 1) 伊藤富雄(1951): 傾斜面の下に掘ったトンネル周辺応力について, 「土木学会誌」, 36 巻 2 号, pp.77~80.
- 2) Jeffery, G. B. (1920): "Plane stress and plane strain in bipolar co-ordinates," Trans. Royal Society, Series A, Vol. 221, pp. 265-293.
- 3) 木山英郎・藤村 尚(1982): 地下浅所のトンネル掘削に伴う地表沈下の弾性解析, 「土質工学会論文報告集」, 22 巻 3 号, pp. 161~169.
- 4) Mindlin, R. D. (1939): "Stress distribution around a tunnel," Proc. ASCE, Vol. 65, No. 4, pp. 619-642.