研究ノート

砂地盤上の円形基礎の支持力に関する剛塑性解析

(Rigid-plastic Analysis on Bearing Capacity of Circular Footings on Sands)

鷗 飼 恵 三¹⁾ (Keizoh Ugai)

キーワード：支持力／砂／塑性 (IGC : E3)

1. ま え が き

砂地盤の帯基礎（2次元）の支持力問題については多くの優れた研究がなされており^{1),2),3)}、定量的、定性的にその全容が明らかにされてきている。一方、3次元基礎（長方形、円形など）に関する研究はそれほど多くない。特に、理論面からのアプローチは少ないように思われる。本論文では、砂地盤上の円形基礎の支持力問題に絞りを、剛塑性論的立場から考察を行う。

Larkin⁴⁾は、砂地盤上の滑らかな円形基礎の支持力を差分法により求め、支持力係数 $N_{73}=7.4(\phi=30^\circ)$ 、51 ($\phi=40^\circ$) の値を得た（これらの値は文献4）の表-2より計算した）。山口ら⁵⁾ および勝見⁶⁾ も、同様な問題をKötter 式の差分化により解いている。これらの結果を表-1 に示す。表-1 中の値は、いずれも砂地盤内に生じる中間主応力 σ_2 と最小主応力 σ_3 の値が等しいというKarman-Harr 仮定に基づいて計算されたものである。各文献ごとに N_{73} の値が異なるのは差分計算の精度の相違によると思われる。

いま、中間主応力係数として

$$b=(\sigma_2-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3) \quad (1)$$

を定義すると、Karman-Harr 仮定は $b=0$ のケースに相当する。ところで、実際の地盤の応力状態は円中心を通る鉛直線上では $b=0$ （三軸圧縮状態）であり、円から遠く離れたところでは平面歪状態に近づくと考えられる。従って、応力状態は円基礎中心直下を除いて $b>0$ を示すであろう。勝見⁶⁾は、実験より $b=0.15\sim 0.25$ の値を得ている。このようなことから、勝見⁶⁾は $b>0$ のケースについても N_{73} を計算した。結果を表-2 に示す。表-2 では $\sigma_2=\sigma_3(b=0)$ のケースと $\sigma_2=(\sigma_1+\sigma_3)/2$ ($b=0.5$) のケースが対比されている。Karman-Harr 仮定 ($b=0$) のケースは $b>0$ のケースに比べ例外なく

表-1 砂地盤上の滑らかな円形基礎の支持力係数 $N_{73}(\sigma_2=\sigma_3$ のケース)

	$\phi=20^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=40^\circ$
Larkin ⁴⁾	—	7.4	51
山口ら ⁵⁾	1.25	7.83	57.7
勝見 ⁶⁾	1.24	6.99	57.7
本研究	—	—	52.45

表-2 勝見⁶⁾による N_{73} の計算値 (b 値が変化する場合, Mohr-Coulomb 規準)

	$\phi=10^\circ$	$\phi=20^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=40^\circ$
$\sigma_2=\sigma_3$	0.203	1.24	6.99	57.7
$\sigma_2=(\sigma_1+\sigma_3)/2$	0.168	0.821	3.33	15.2

大きな支持力を与えることがわかる。

ところで、表-2 の値は b 値が変化しても砂の内部摩擦角 ϕ は変化しないという仮定のもとに計算されたものである。つまり、砂は Mohr-Coulomb の破壊規準（以下、MC 規準と略記）に従うと仮定された。しかし、実際の砂では b 値の 0 からの増加は ϕ の増加を伴うのが普通であり、このため b 値の増加は N_{73} の増大を招く可能性が十分である。このことを確認するために、本研究では 3 つの砂の破壊規準式を想定し、支持力計算を行った。

2. 砂の破壊規準式

本研究で用いた砂の破壊規準式は次の 3 つである。

(1) Mohr-Coulomb 規準式 (MC 式と略記)

$$\sigma_1+\sigma_3=(\sigma_1-\sigma_3)\sin\phi_{TC} \quad (2)$$

(2) 松岡・中井規準式⁷⁾ (MN 式)

$$\begin{aligned} &(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1) \\ &=(9+8\tan^2\phi_{TC})\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad (3)$$

(3) Lade-Duncan 規準式⁸⁾ (LD 式)

$$(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^3=\kappa_1\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (4)$$

ただし、

$$\kappa_1=(3-\sin\phi_{TC})^3/[\cos^2\phi_{TC}(1-\sin\phi_{TC})]$$

ϕ_{TC} は排水三軸圧縮試験より得られる砂の内部摩擦角である。八面体面上でのこれらの形状の一部を図-1 に示す。

i) 群馬大学工学部建設工学科 助教授（桐生市天神町一丁目）
(1987.5.27 原稿受付・討議期限 1988.7.1, 要請があれば1か月の
期限延長可能)

図-1 八面体面上の3つの破壊規準線
($\phi_{TC}=40^\circ$ のケース)

3. 円形基礎の支持力係数

式(1)より

$$\sigma_2 = \sigma_3 + b(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (5)$$

が得られる。上式を式(3), (4)に代入して σ_2 を消去し, σ_1 と σ_3 のみの式としたのち,軸対称問題の応力平衡方程式に代入すると,文献(6), (9)にならってKötter式を導くことができる。これを差分化し,底面が滑らかな円形基礎の支持力係数 N_{r3} を計算した。なお,円形基礎の支持力 q は N_{r3} を用いて次式より計算される。

$$q = \gamma R N_{r3} \quad (6)$$

ここで, γ は砂の単位体積重量, R は円基礎の半径。

図-2(a)に3つの破壊規準式に関する N_{r3} と b 値との関係を示す。MN規準については $\phi_{TC}=35^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ の3ケース,LDおよびMC規準については $\phi_{TC}=40^\circ$ のケースのみ示した。なお, $b=0$ のとき3つの破壊規準式は一致するので,このとき N_{r3} も同一の値をとることに注意されたい。図-2(b)は,図-2(a)の N_{r3} の値を $b=0$ のときの N_{r3} の値で割って縦軸に示したものである。図-2(a), (b)より次のことがわかる。

(1) MC規準では b 値が増加すると N_{r3} が減少する。この理由は, b 値が増加しても ϕ は一定であるので砂の摩擦抵抗力は変化しないが, b 値が増加すると σ_2 が増加し,これが砂地盤内の要素を半径 r (図-2(c))の正方向に押し広げる分力を有するため,結果として支持力の減少をもたらすと考えられる。この傾向は,勝見の結果(表-2)と一致する。

(2) MN規準とLD規準では b 値の増加と共に

図-2(a) 3つの破壊規準式に関する N_{r3} と b 値との関係

図-2(b) $N_{r3}/(N_{r3})_{b=0}$ と b 値との関係

図-2(c) 砂地盤内の要素に作用する
中間主応力

N_{r3} も増大し、ある b 値で N_{r3} は極大値をとる。この理由は、 b 値が増加すると ϕ も増加するので、支持力の増大を生じることによる。同時に σ_2 も増加し、これは前述のように支持力を減少させるが、 N_{r3} が極大値をとるある b 値までは、前者の方が後者より卓越するためこのような結果が生じる。

(3) 実際の砂は MC 規準に従うことが少ないことを考慮すると、上記 (2) より Karman-Harr 仮定は砂地盤上の円形基礎の支持力 (剛塑性論的な意味での) を過小評価する可能性が高い。このことは、上記 (1) のような MC 規準を前提とした勝見の結果とは相反する。

図-3 に、 b の増加と共にすべり線場が拡大してゆく様子を示す (ただし、MN 規準、 $\phi_{TC}=40^\circ$ のケース)。

4. 帯基礎の支持力係数との比較

帯基礎の支持力係数 N_{r2} は 2 次元の Kötter 式を差分化することにより計算できる。 N_{r2} と前述の N_{r3} の間には次のような関係がある。ただし、 λ は底面が滑らかな円形基礎の形状係数に相当する。

$$N_{r3} = \lambda N_{r2} \quad (7)$$

この場合、地盤は平面ひずみ状態にあるため、砂が MN 規準や LD 規準に従う場合には、平面ひずみ状態での内部摩擦角 ϕ_{PS} は一般に ϕ_{TC} より大きくなる。 ϕ_{PS} の値は砂の破壊時の変形特性が与えられないと決定できないため、ここでは文献 10) と 8) に示されている豊浦砂と Sacramento River 砂の変形特性を用いて各砂の ϕ_{PS} を決定した。

(1) 砂が MC 規準に従う場合

この場合、 $\phi_{PS} = \phi_{TC}$ となるので、砂の変形特性がわからなくても ϕ_{PS} は決定できる。表-3(a) は $\phi_{TC}=40^\circ$ の場合における N_{r3} と N_{r2} の比較結果を示す。表の最下段には N_{r2} を 1 としたときの N_{r3} の比率も示した。

(2) 豊浦砂が MN 規準に従う場合

文献 10) に示される豊浦砂の強度・変形特性を用いて計算を行った。 ϕ_{PS} と b 値は、各々、 $\phi_{TC}=35^\circ$ のとき 39.5° , 0.383 , $\phi_{TC}=40^\circ$ のとき 44.7° , 0.395 , $\phi_{TC}=45^\circ$ のとき 49.7° , 0.409 となった。表-3(b) に $\phi_{TC}=35^\circ$, 40° , 45° の場合における N_{r3} と N_{r2} の比較結果を示す。

(3) Sacramento River 砂が LD 規準に従う場合

文献 8) に示される Sacramento River 砂の強度・変形特性を用いて計算を行った。 ϕ_{PS} と b 値は、各々、 $\phi_{TC}=38.5^\circ$ (ゆるづめ) のとき 44.4° , 0.199 , $\phi_{TC}=48.4^\circ$ (密づめ) のとき 56.4° , 0.191 となった。表-3(c) に $\phi_{TC}=38.5^\circ$, 48.4° の場合における N_{r3} と N_{r2} の比較結果を示す。

表-3(a) N_{r3} と N_{r2} の比較 (砂が MC 規準に従う場合、 $\phi_{TC}=40^\circ$)

N_{r2}	N_{r3}				
	$b=0$	0.05	0.1	0.2	0.3
43.74	52.45	46.08	40.73	32.31	26.08
1	1.20	1.05	0.93	0.74	0.60

表-3(b) N_{r3} と N_{r2} の比較 (豊浦砂が MN 規準に従う場合)

ϕ_{TC}	N_{r2}	N_{r3}				
		$b=0$	0.05	0.1	0.2	0.3
35°	39.70	18.74	22.59	25.62	27.29	24.16
	1	0.47	0.57	0.65	0.69	0.61
40°	111.39	52.45	67.65	78.80	80.26	64.78
	1	0.47	0.61	0.71	0.72	0.58
45°	350.83	168.98	240.18	286.49	266.76	189.26
	1	0.48	0.68	0.82	0.76	0.54

表-3(c) N_{r3} と N_{r2} の比較 (Sacramento River 砂が LD 規準に従う場合)

ϕ_{TC}	N_{r2}	N_{r3}			
		$b=0$	0.05	0.1	0.15
38.5° (ゆるづめ)	104.94	37.65	48.41	59.69	69.70
	1	0.36	0.46	0.57	0.66
48.4° (密づめ)	2325.0	485.82	708.72	1058.7	1367.2
	1	0.21	0.30	0.46	0.59

図-3 すべり線場の変化 (MN, $\phi_{TC}=40^\circ$)

(4) まとめ

以上の 3 ケースをまとめて図示したものが図-4 である。縦軸の N_{r3}/N_{r2} は式 (7) より底面が滑らかな円形基礎の形状係数 λ を表す。図-3 より、MN 規準と

図-4 N_{τ_3}/N_{τ_2} と b 値との関係
(表-3(a), (b), (c) のまとめ)

LD 規準に従う砂では λ は 1 以下の値 (0.2~0.8 程度) をとることがわかる。

5. 結 論

(1) 松岡・中井規準および Lade-Duncan 規準に従う砂地盤では, Karman-Harr 仮定は円形基礎の支持力値 (剛塑性論的な意味での) を過小評価する可能性が高い。この結論は, Mohr-Coulomb 規準を前提とした勝見の結果とは相反するものである。

(2) 松岡・中井規準および Lade-Duncan 規準に従う砂地盤では, 底面が滑らかな円形基礎の形状係数 (剛塑性論的な意味での) は 1 以下の値 (0.2~0.8 程度) になる。

参 考 文 献

- 1) Kimura, T., Kusakabe, O. and Saitoh, K. (1985): "Geotechnical model tests of bearing capacity problems in a centrifuge," *Geotechnique*, Vol.35, No.1, pp.33-45.
- 2) 小田匡寛・古戸幸博 (1982): 浅い基礎の支持力問題における進行性破壊の意義, 「土木学会論文報告集」, 第 321 号, pp.113~122.
- 3) 龍岡文夫・谷 和夫・森 浩樹 (1987): 砂地盤上の模型帯基礎の支持力への圧力レベルと模型サイズの影響, 「第 22 回土質工学研究発表会講演集」, pp.1091~1094.
- 4) Larkin, L. A. (1968): "Theoretical bearing capacity of very shallow footings," *ASCE*, SM6, pp.1347-1357.
- 5) 山口柏樹・木村 孟・寺師昌明 (1968): 極限支持力の精密解について, 「第 3 回土質工学研究発表会」, pp.333~338.
- 6) 勝見 雅 (1976): 中間主応力に注目した円形剛基礎の支持力に関する研究, 「土木学会論文報告集」, 第 252 号, pp.73~85.
- 7) Matsuoka, H. and Nakai, T. (1985): "Relationship among Tresca, Mises, Mohr-Coulomb and Matsuoka-Nakai failure criteria," *Soils and Foundations*, Vol.25, No.4, pp.123-128.
- 8) Lade, P. V. and Duncan, J. M. (1975): "Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil," *ASCE*, Vol.101, GT 10, pp.1037-1053.
- 9) 山口柏樹 (1969): 最上武雄編「土質力学」, 技報堂, pp.834~845.
- 10) 中井照夫・松岡 元 (1981): 任意応力経路下の土の変形挙動に関する統一的解釈, 「土木学会論文報告集」, 第 306 号, pp.23~34.