不規則四面体分割されたモデル空間への最短経路波線追跡法の適用

干 野 真*

Application of shortest path ray tracing to irregularly tetrahedralized model space

Makoto Hoshino*

ABSTRACT

A way to apply the shortest path ray tracing (SPR) method to irregularly tetrahedralized velocity structure and its efficiency are described. SPR is the ray tracing method utilizing Dijkstra's shortest path algorithm in network graph theory. The tetrahedralization by Delaunay tessellation is one of the irregular parameterization of 3D velocity structure in travel time tomography. The irregular parameterization has great advantage of flexible expression of velocity structure though the computational costs in ray-tracing are relatively high. The hybrid ray tracing between SPR (for initialization) and pseudo-bending (for optimization) might be more economic. It has been known as the well proven scheme in the sense of the simplicity and robustness. Though SPR was originally developed under regular parameterization, it can easily be expanded to irregular parameterized structure without any theoretical modification. We propose a simple design of network for SPR that conforms the shape of tetrahedron. Generally, the cost and accuracy of SPR depends on the network design. In this paper, we have carried out a synthetic examination with a complex velocity model to assess the cost and accuracy of SPR with irregular network. Result reveals that the proposed ray tracing method is practically economic and accurate (almost the same accuracy as SPR under the regular cubic cell model). Further, it has potential to obtain more accuracy by lower costs due to the economical network integrated with flexible element size.

Key words: Shortest path ray tracing, tetrahedron

1 はじめに

近年、走時トモグラフィにおいて、速度構造を不規則にパラメーター化することで、インバース問題の安定性と信頼性を改善することがトピックのひとつとなっている (例えば Spakman and Bijwaard, 2001; Thurber and Eberhart-Phillips, 1999; Curtis and Snieder, 1997)。

スカラー場の構造を不規則にパラメーター化する方法のひとつに、三角分割 (三次元では四面体分割) がある (Sambridge et al., 1995; Sambridge and Gudmundsson, 1998)。この方法によって、三次元の領域は形も大きさも不揃いな四面体で埋めつくされる。この特性は、場所によって異なるメッシュの細かさ、および起伏のある境界面の近似表現といった、直交格子や等辺長ブロッ

クのような規則的なパラメーター化では困難なことを可能にする。こうした利点から、この方法は走時トモグラフィに使われる以前から有限要素法解析の際のメッシュ分割のひとつとして使われてきた (驚津ほか, 1981)。

一般に走時トモグラフィにおいて、波線の密度は解析対象の領域の中で一様ではない。したがって、等間隔グリッドなどを用いる際には、一つのグリッド上でのパラメーター値 (速度またはスローネス) と関係する波線の数が、グリッド毎に異なることになる。こうした、データへの感度がパラメーター毎に異なるインバース問題は、感度の差の程度が大きくなるほど不安定になる。これに対し、不規則なパラメーター化で構造を表現するならば、波線の密度と交差性に合わせてモデルの細かさを

2004年12月3日原稿受付; 2005年9月20日受理

* 北海道大学地震火山研究観測センター

〒060-0810 北海道札幌市北区北10条西8丁目

Manuscript received December 3, 2004; Accepted September 20, 2005.

* Hokkaido University, Institute of Seismology and Volcanology

N10S8 Kita-ku Sapporo 060-0810 Japan

最適化することで、インバース問題が安定するように改善できる。そのためには空間的に粗密のある不規則グリッド、もしくはセルが必要となる。そして、四面体分割はそれに必要な特性を備えている。こうした理由から、四面体分割は速度内挿の際の計算量の多さというマイナス面をもつものの、近年の計算機的高速化による後押しもあって、走時トモグラフィーへ応用されるケースが増えている (Chiao and Kuo, 2001; Sambridge and Faletić, 2003; Zhou, 2004)。

しかし、四面体分割が地震波速度構造の表現として本格的に利用されはじめてからまだ10年も経ておらず、まだ手法について研究の余地を多く残している。特に、地震波線追跡法に関連した研究例は非常に少ない。波線追跡は走時トモグラフィーの解析の中でモデルパラメーターと観測データを関係づけるという非常に重要な役割をもっている。特に走時トモグラフィーでは、複雑な速度構造でも初動走時をもたらし最小走時経路を計算することが要求される。そのようなロバストな波線追跡法の不規則グリッドへの適用としては、二次元において、Rawlinson and Sambridge (2004) が Fast Marching Method (FMM) (Sethian and Popovici, 1999) を等間隔直交グリッドで使用されるものから不規則三角形要素へ拡張してもちいている。理論的には三角形 (二次元) から四面体 (三次元) へ拡張することも可能であるが、三角形 (二次元) の場合でさえ、すでに FMM が本来持つシンプルさを失っていると思われる。

したがって、本論文では四面体分割で不規則にパラメーター化された構造でも比較的シンプルに、精度の高い最小走時経路を求めることができる波線追跡法を提案する。比較的シンプルと言えるのは、元々シンプルな既存の手法を、そのシンプルさをそのままに、四面体分割構造に拡張利用するからである。本論文では、既存の実績のある地震波線追跡法のひとつである Nishi (2001) による等間隔直交 (立方体) グリッドでのハイブリッド型波線追跡を四面体分割構造に適用する。そして、仮想構造による数値実験によって、従来の立方体での用法と速度と精度の面で比較し、十分に四面体分割へ適用できることを示す。

2 最短経路波線追跡

Nishi (2001) による波線追跡法は、グラフ理論による最短経路波線追跡 (Shortest Path Ray-tracing, 以下 SPR) (Moser, 1991), によって得られた初期波線をシンプレックス法 (Nelder and Mead, 1965) によって最適化する方法である。以下ではこの手法をハイブリッド法と呼ぶことにする。

2.1 波線追跡のパラメーター化方法への依存性

一般に波線追跡手法は大きく二つのタイプに分けることができる。すなわち、実行速度を重視して波線経路を

反復修正するタイプと、最小走時という意味での精度 (ローカルミニマムの回避) を重視して波面をシミュレートするタイプである。たとえば前者の代表例は、Bending (Pereyra et al., 1980), Pseudo-bending (Um and Thurber, 1987) で、後者の代表例は、Finite Difference method (FDM) (Vidale, 1990; Podvin and Lecomte, 1991), FDM の亜種である Linear Travel time Interpolation (LTI) (Asakawa and Kawanaka, 1992), FMM, 及び SPR である。ハイブリッド法はちょうどこの二つのタイプ、すなわち速度指向と精度指向を掛け合わせたものという見方ができる。一般に前者のタイプは、パラメーター化の方法に依存しない。したがって、不規則なパラメーター化が問題となるのは後者のタイプである。

SPR は前述の後者のタイプ、すなわち波面をシミュレートするタイプの中で、不規則なパラメーター化に適しやすい。FDM, LTI, FMM, SPR とともに、その処理の主体は走時の外挿である。このとき、SPR 以外の手法では、外挿が行われる点の近傍における波面の進行方向が考慮されるので、外挿先と走時の増分は区画毎に外挿が行われる時点で計算される。しかし、不規則四面体分割のように区画毎に形状および隣接関係が異なる場合、外挿の手続きは非常に複雑化することが予想される。一方、SPR は最小走時経路を、固定グラフ、すなわちネットワークにおける最短経路問題として解く。これは言い換えれば、あらかじめ外挿先と走時の増分がネットワークによって固定されているということである。つまり、SPR は区画毎に波面の向きを調べる手続きがないので不規則な構造に対しても適用が簡単なのである。

SPR では通常、規則的な構造表現には規則的なネットワークデザインが使われる (Nakanishi and Yamaguchi, 1986; Saito, 1989; Zhang and Toksöz, 1998)。Nishi (2001) の手法もその一つで、三次元直交グリッド構造 (Thurber, 1983) への使用を目的として、Fig. 1(b) のように、経路は規則的に配置される。しかし、経路が規則的でなければならない理由はない。最短経路問題の解法として使われるダイクストラ法 (Dijkstra, 1959) が要求するのは、ノード間をつなぐパスの通過コスト (波線追跡の場合は2点間の走時) があらかじめ分かっている不変であることだけである。したがって、四面体分割構造でのネットワークを Fig. 1(a) のようにデザインし、不規則なネットワークで SPR を行うことができる。

SPR だけでは波線がジグザグになることによって生じる誤差が問題となる (Klimeš and Kvasnička, 1994)。Fischer and Lees (1993) と Vesnaver (1996) はこの問題に対し、SPR 後に波線を反復的に修正する方法を開発している。Nishi (2001) の手法もまた、これらの流れを汲んで、シンプレックス法によって波線を修正する

ものである。シンプレックス法は、前述の速度重視のタイプの波線追跡法に相当する。つまり、「SPRで初期化した後、反復的に波線を最適化する」ことがNishi (2001) のハイブリッド法の本質であるという考え方ができる。一般に反復的手法は良質の初期波線があれば、グローバルミニマムに収束することが知られている (Thurber and Ellsworth, 1980)。

一般には、ローカルミニマムを回避する目的の初期化から精度向上の目的の最適化へと向かう二段階のプロセスを持った波線追跡手法の全般がハイブリッド法と呼ばれる。セル境界のみを波線の間接点として初期化した後に最適化する改良点波源法 (Sassa et al., 1989) はその一例である。二段階のプロセスということで複雑さをイメージさせるが、ハイブリッド法はシンプルとロバストの両方を追及した形であると言える。

2.2 実験の目的

SPRのネットワークデザインは基本的に自由であることを上で述べたが、SPRの精度そのものは、このデザインによって大きく左右されることが知られている (Klimeš and Kvasnička, 1994; Zhang and Toksöz, 1998)。したがって、Fig. 1(a)の不規則なネットワークデザインによってえられた最短経路がハイブリッド法において十分な役割を果たすかどうかを確かめなければならない。そこで、本論文ではFig. 1(a)によるSPRの性能を、Nishi (2001) による規則的な場合 Fig. 1(b)と、ネットワークのデザインがもたらす精度の差という点で比較する実験を行う。実験では、両者を同じ速度構造下でネットワークデザイン以外の条件を等しくして、経路

と走時の両方の精度を計測する。

Nishi (2001) の手法は、すでに「Fermat」の名で、火山の複雑な地下速度構造での走時トモグラフィーと震源決定に用いられ、高い実績をあげている (西・清水, 2000)。この手法は、その信頼性およびネットワークデザインのシンプルさゆえに、本研究のような新手法の性能評価実験にとって、よい比較対象である。

また、本論文ではもう一つ、一様ネットワークと非一様ネットワークの比較実験も行う。四面体分割を速度構造に用いる利点のひとつとして、大きさの異なる要素の混在によって局所的に分解能を高められることが挙げられる (Sambridge and Faletić, 2003; Chiao and Kuo, 2001)。そこで、四面体の局所的な再分割に伴うネットワークの細分化が本手法にどのような影響を及ぼすかを調べる実験を行う。

3 四面体分割

四面体分割には、例えば立方体を5個、または6個に規則的に分割するような (鷲津ほか, 1981) 方法もあるが、本論文では不規則な分割として使われる場面 (Sambridge and Gudmundsson, 1998; Sambridge and Faletić, 2003; Zhou, 2004) を想定している。しかし、不規則に分割された四面体は大きさが場所によって大きく異なる可能性がある。すると、Fig. 1(a)のような経路デザインは場所によって細かさに大きな差を生むことになる。一方でこうした要素サイズの自由度の高さこそが不規則パラメーター化の利点でもある。しかし、まず、経路が不規則であることと、経路の細かさに偏差があることの効果を分離する必要がある。したがって、この利点はひとまず封印して、できる限り大きさの揃った要素分割によって、一様で且つ不規則なネットワークを構築して規則的なネットワークとの比較実験を行う。その後、非一様なネットワークを構築し、一様な場合と比較するという二段階の実験を行う。

そこで、次のような条件で四面体分割構造を構築する。

1. 四面体の頂点同士は一定距離以上近付かないように分布させる。

2. Delaunay 分割 (Sambridge et al., 1995) を使う。

これらは、すなわち「不規則ながらも細かさが一様な状態に近いネットワーク」を構築するために必要な条件である。そして、これらの中で Delaunay 分割の性質によるところが最も大きい。

3.1 Delaunay 四面体分割

Delaunay 四面体分割は、二次元における Delaunay 三角分割 (Delaunay, 1934) の三次元への拡張である。Delaunay 三角分割の定義は、「どの三角形の外接円もその三角形の頂点以外の頂点を内部に含まない」である。これは空円定理とよばれ、三次元では、四面体の外接球においてこの条件が満たされる。空円定理を満たす分割

Fig. 1 Overview of network for shortest path ray tracing. a) network on a tetrahedron. b) network on a cubic block (Nishi, 2001), NPE (node per edge)=4.

は、できるだけ形の整った（正三角形に近い）三角形による分割が実現できることが知られている（Overmars et al., 2000）。

Delauney 分割は頂点列に対して一意に決まるものではない。生成アルゴリズムによって異なる分割が生成されるので、使用した分割方法について述べておく。Delaunay 三角分割を構築するアルゴリズムの大筋は、Sambridge et al. (1995) で紹介されている。その中で用いられている Watson の逐次添加法は高次元でも可能である（Watson, 1981）。

二次元の場合において頂点が追加される際の再構成プロセスを Fig. 2 に示す。この図からわかるように、空円定理に反する外接円を持つ三角形を削除すると空洞ができる。この空洞の壁にある頂点と追加される頂点を接続することで新たな三角形の辺とすることができる。この方法は、頂点が追加される前の状態が Delaunay 分割であることを必要とし、それが満たされるならば追加後の状態も Delaunay 分割となることが保証されている。

3.2 一様不規則な頂点の分布の生成

Fig. 1 に、グリッド分割、および SPR で用いられるネットワークを示す。領域全体は 1 辺 10000 m とした。直交グリッドの方は、 $11 \times 11 \times 11 = 1331$ のグリッドを表している。そして、四面体分割の方は、同数（1331個）の頂点を不規則に分布して Delaunay 分割を行ったものである。このときの頂点の分布は、面と辺に直交グリッドの場合と同数の頂点が配置されるように分布させている。また、互いの最近距離が 600 m であるように分布させている。つまり、領域の角から始めて、各辺に 9 点、各面に 81 点、内部に 729 点をこの順番で生成してゆく。すでに生成された点との距離が 600 m 以下ならば不採用とし、採用された数が、上述の数を満た

すまで繰り返す。この 600 m という閾値は、試行錯誤によって決めたものである。この値がこれより大きくなるにつれ、点列生成の後半で点が入ることができるスペースがなくなる状況が発生しやすくなる。つまり、出来る限り間を離して頂点を分布させたということである。重要なのは、辺長に対する閾値の比率である。例えば、 $21 \times 21 \times 21 = 9261$ 個の頂点を分布する場合の閾値は 300 m である。このようにして作られた分布は厳密な意味での一様不規則分布（手塚, 2003）ではないが、本研究では後の実験に使用する分には十分に一様であると思なしている。

4 ネットワークデザイン

この節では、経路ネットを張る具体的な方法について説明する。これらの概観は Fig. 1(a), (b) に示されている。以降、それぞれを、「四面体単位ネット」、「立方体単位ネット」と呼ぶ。

経路ネットワーク中のノードとパスの数はネットワークの規模を表す指標としてもちいることができる。規則的なネットワークではノードとパスの数は決まった値となるが、不規則な場合は推定量となる。この節では、それぞれのデザインの説明に加え、ノードとパスの数を見積もる方法も説明する。

4.1 等間隔グリッドモデルでの経路ネット

等間隔グリッドモデルでのネットワークのデザインの詳細は Nishi (2001) を参照されたい。エッジあたりのノードの数は NPE (node per edge) とよばれる (Fischer and Lees, 1993)。Fig. 1(b) に示した外観は $NPE = 4$ の場合に相当する。NPE は通常、4 または 7 が適切とされ、それ以外の数を用いることは、コストの割りに効果が低いことが知られている (Fischer and Lees, 1993; Nishi, 2001)。

Table 1 は、X, Y, Z 方向のグリッド数を N_x, N_y, N_z とした場合の辺、面、ブロックの数と、それら一つ当たりのパスの数である。これにしたがって、全てのノード

Fig. 2 2D image of Watson's scheme (Watson, 1981). Circles indicate circumcircle of triangles.

Table 1 The number of Nodes and Paths on cubic network

Grid	$N_x N_y N_z$
Edge	$(N_x - 1) N_y N_z$ $+ (N_y - 1) N_x N_z$ $+ (N_z - 1) N_x N_y$
Face	$(N_x - 1) (N_y - 1) N_z$ $+ (N_x - 1) N_y (N_z - 1)$ $+ N_x (N_y - 1) (N_z - 1)$
Block	$(N_x - 1) (N_y - 1) (N_z - 1)$
Path (Edge)	$NPE - 1$
Path (Face)	$6NPE^2 - 16NPE + 10$
Path (Block)	$30NPE^2 - 96NPE + 76$
Node (Edge)	$NPE - 2$

Table 2 The number of paths on tetrahedral network.
The index of face is same as the opposite vertex.
The index of edge indicates the index of vertex
on both side

path	number
$P(G, V_i)$	1×4
$P(G, F_i)$	1×4
$P(G, E_i)$	1×6
$P(V_i, F_j), (i \neq j)$	3×4
$P(V_i, E_{i,k}), (i = j \cup i = k)$	3×4
$P(F_i, E_{i,k}), (i \neq j \cap i = k)$	3×4
$P(F_i, E_{i,k}), (i \neq j \cup i = k)$	3×4
$P(F_i, F_j), (i \neq j)$	$4C_2 = 6$
$P(E_{i,j}, E_{i,k}), (j \neq k)$	3×4
all	80

vertex: $V_i, i=1, \dots, 4$

centroid of body: G

centroid of face: $F_i, i=1, \dots, 4$

midpoint of edge: $E_{i,j}, i=1, \dots, 4, j=1, \dots, 4, i \neq j$

とパスの数を計算することができる。

4.2 四面体分割構造での経路ネット

一方、本手法の場合、四面体一つ当たりの経路ネットは、Fig. 1(a)のように四面体の頂点の他に、四面体重心、面の重心、辺の中点に設けられた計15個のノードとそれらを結ぶ80本（以下で説明）のパスによって構成される。重心以外のノード、および四面体の面と辺にあるパスは、いくつかの四面体で共有される。以下に挙げるノード間は、そのパス上に他のノードが存在するので、接続は行わない。

1. 頂点と頂点
2. 頂点と反対側の面重心
3. 頂点と反対側の面に含まれる辺の中点
4. 互いに頂点を共有しない辺の中点

このことを踏まえて、全ての接続を式として表したものを Table 2 に示す。

一つの、辺、面、内部のパスを数えると、それぞれ、2, 9, 32本となる ($2 \times 6 + 9 \times 4 + 32 \times 1 = 80$)。あとは、辺、面、内部それぞれの総数がわかれば、ノードとパスの総数もわかることになる。

4.3 四面体単位ネットのノードとパスの総数

ネットワークの規模を定量的に表すものとして、ノードとパスの具体的な数がわからなければならない。しかし、不規則に分布した頂点から生成した Delaunay 四面体分割では、四面体、およびその辺と面の数は、たとえ頂点の数が等しくても頂点の分布が異なるとわずかにバラツキをみせる。

そこで、このバラツキを見るために、Fig. 1(a)の下方向にあるような1331個の頂点からなる Delaunay 四面体

Fig. 3 Frequency of the number of bodies, faces, edges on tetrahedron after delauney tetrahedralization from 100 different distribution of 1331 ($11 \times 11 \times 11$) vertex.

分割を、異なる頂点分布で100通り作成した。Fig. 3は、辺、面、四面体の数の度数ヒストグラムである。いずれも、その分散は非常に小さいことがわかる。したがって、平均値を用いて経路ネットの規模を見積もる事に問題は無いとする。よって頂点数1331個の場合の辺、面、四面体の数の各期待値を、Fig. 3より8571, 13880, 6639と決める。そして、頂点数に対するこれらの比は、頂点数が増えてもおおよそ変わらないと考え、それぞれ6.6, 10.5, 5.0とする。そして頂点数を N とし、ネット全体の全ノード数は、 $(1 + 6.6 + 10.5 + 5.0)N = 23.1N$ となる。全パス数は、前節で導出した辺、面、内部あたりのパス数 (2, 9, 32) をもちいて $(6.6 \times 2 + 10.5 \times 9 + 5.0 \times 32) \times N = 267.7N$ となる。実験では、頂点数を三段階に変えて比較を行っているが、その際のノード数とパス数の実測値は、この式による見積りにほぼ一致した。

5 ネットワークの規模の比較

ここまでで、片方は見積りではあるものの両方のタイプのネットにおけるノードとパスの数が得られたので、それをネットワークの規模を表す指標として比較してみる。Fig. 4は、ノードの数、パスの本数、計算時間を、グリッド格子点（四面体頂点）の数を横軸としてプロットしたものである。グリッド数を横軸にとった理由は、それが構造パラメーター数、すなわちトモグラフィ問題の規模を示すからである。本手法による四面体単位ネットは、立方体単位ネットで $NPE=4$ の場合と比べて、パスの数はほぼ同数 (Fig. 4(b)) だが、ノードの

Fig. 4 The cost of network. a) Total number of nodes. b) Total number of paths. c) Total time (sec) of Dijkstra method. The vertical dashed lines indicates the number of grid points (i.e. 1331, 9261, 68921) in the experiments.

数が、3～4 倍となる (Fig. 4(a)) ことが分かる。つまり、その分だけネットワークが緻密である。立方体単位ネットでは $NPE=7$ の場合は、 $NPE=4$ の場合と比べて桁違いにノードとパスの消費が多くなり、四面体単位ネットよりもさらにネットワークが緻密になる。

最短経路問題を解くために使われるダイクストラ法 (Dijkstra, 1959) の計算コストのオーダーは、ヒープ構造の使用 (Moser, 1991) を前提として、

$$O((N+P) \log N) \quad (1)$$

となる (Overmars et al., 1997)。ここで N は全ノード数、 P は全パス数である。

これにしたがって計算コストを見積もってみる。四面体単位ネットのノード数は、立方体単位ネット ($NPE=4$) の 3～4 倍である。しかし、パスの数は同じで、しかもその数はノードよりも相対的に 2 オーダーほど多い。したがって、計算コストの比は 3～4 倍よりも少なく抑えられる。実際の計算時間の比は Fig. 4(c) に示す通り 2 倍程度である。不規則分割は $NPE=7$ よりもノード数が多いが、パスの数は少ないので結果的に $NPE=7$ よりも計算時間は少ない。因みに計算機環境は PC で CPU は Pentium4 (2 GHz), OS は linux2.4, 言語は C++, 時間の取得には sys/times.h の関数 times を用いた。

一方、メモリ消費量は、パス数を P 、ノード数を N として、

$$M_{path}P + 2M_{connect}P + M_{node}N \quad (2)$$

となる。 M_{path} はパス一本当たりの記憶容量、 M_{node} はノード一個当たりの記憶容量、 $M_{connect}$ はノードに接続されるパスのインデックスの記憶容量である。この式より、 M_{node} がよほど大きく無い限り、メモリ消費量の大半はノードよりもむしろパス数に比例することがわかる。

総じて、どちらも同規模の走時トモグラフィーに使用される場合、四面体単位ネットの計算機的負荷は立方体単位ネットでは $NPE=4$ の場合に比べて 2 倍程度である。

6 波線の最適化

本論文では、SPR で初期波線を得たあとの最適化には、経路の種類によらず Pseudo-bending (Um and Thurber, 1987) 法をもちいる。理由は、Nishi (2001) が用いたシンプレックス法よりも一般的で高速だからである。どちらを使っても、結局は初期波線から最寄りのミニマムへ収束する。Pseudo-bending 法は任意位置での速度と速度勾配を必要とする。四面体分割での走時トモグラフィーでは、一般に頂点に速度値を置き、内部を体積座標変換による区分線形法 (鷺津ほか, 1981), または、Natural Neighbor 法 (Sambridge et al., 1995) で内挿する。これらの内挿法は速度勾配も得ることができるので、Pseudo-bending は実用上問題は無い。

また、本手法では、SPR による初期化状態から最適化へスムーズに移行するために、次のような条件を用いている。

1. パスの走時コストは、両端のノードの位置での速度を用いて、台形近似によって求める。これは Nishi (2001) の方法と同じである。
2. 波線の両端は、それ自体をノードの一つとして、その位置を含む立方体または四面体に属するノードと接続し、ネットワークの一部とする。

7 数値実験

7.1 実験概要

まず、実験領域の概観を Fig. 5 にしめす。領域は $10 \times 10 \times 10$ (km) の立方体とする。深さ方向を Z の正の向きとし、上面を $Z=0$ とする。そして発震点は上面の角 $(0, 0, 0)$ にただひとつだけとする。Fig. 5 中に点で示したのが受振点である。受振点は発震点を中心とする半径 10 km の球面上に分布させる。こうすることで、どの波線も、発震点-受振点距離が等しくなる。受振点間隔は、偏角 5 度、伏角 5 度毎に設置する。Fig. 5 中の球は後に説明する速度ギャップを示している。

実験では 3 段階のネットワーク密度を用いる。すなわち、ブロックの大きさ (グリッド密度) は、1 km (グリッド数 $11 \times 11 \times 11$), 0.5 km ($21 \times 21 \times 21$), 0.25 km ($41 \times 41 \times 41$) の 3 段階を試行する。これによるグリッド数は 1331, 9261, 68921 個となる。四面体分割に

Fig. 5 Overview of the velocity structure used for the numerical experiment. Dots indicate receiver positions. Spheres indicate velocity anomalies.

Fig. 6 Schematic view of the ray dissimilarity. A solid line Q is theoretical ray-path. A broken line P is the ray-path to be evaluated. P_n is the nearest point on P from a node point Q_n on line Q.

は、これと同数の数の頂点を用いる。

実験では、走時だけでなく、より高精度な波線追跡法で求められた波線をリファレンス波線とし、それと比較することで波線経路そのものの評価も行う。

7.2 波線経路の評価方法

波線経路の定量的な評価として、リファレンス波線との不一致性である ray dissimilarity (Fischer and Lees, 1993; Nishi, 2001) を用いる。

Fig. 6 のように、評価対象の波線 P も厳密な波線 Q も離散化されているものとする。このとき Q の節点を q_n とし、 P 上で最も q_n に近い点を p_n とする。 p_n は、節点ではなく全ての波線セグメント上で探す。この p_n と q_n を用いて、以下の式で表される値を、この論文中で扱う ray dissimilarity と定義する。

$$\left(\sum_{n=0}^N \frac{|p_n - q_n|^2}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

ここで N は、 Q の全節点数である。したがって、ray

dissimilarity は、波線経路がリファレンス波線に近付くと小さくなり、逸脱するほど大きくなる。

7.3 速度構造

実用上は、四面体分割と立方体分割はそれぞれの構造固有の内挿法が使われる。しかし、本実験ではネットワークデザインの違いだけを結果に反映させるために、それらの内挿法は用いない。任意点の速度および速度勾配は、以下の、あらかじめ定義された速度関数によって求める。

速度関数は、まず、 $1.0 + 0.5z$ (km/sec) の勾配一定な構造を背景とする。そしてその中に、半径 1 km で内部が速度一定の、二種類の球を配置する (Fig. 5)。二種類の球はそれぞれ内部が低速度 (2.0 km/sec) と高速度 (5.0 km/sec) となっている。球の中心位置は領域の端から三分の一 (各座標値は 3.333 または 6.666 km) の地点とする。これらは Fig. 5 に色の濃さの違う球で示されている。二種類の球は互い違いに配置し、発震点に最も近い球 (中心座標 3.333, 3.333, 3.333) を高速度の球とする。

このような不連続性の高い構造では、比較対象となる正確な波線は解析的には得ることができない。そのため、できるだけ精度の高い数値的解法で得られた波線を、リファレンス波線として用いる必要がある。そうした目的としての走時場の計算に一次オーダーの Fast Marching Method (Sethian and Popovici, 1999) を用いた。またこの方法によって求められた走時場から波線を得るためには受振点から発震点へ向かって Euler 法を用いた。その際、グリッド間隔は 25 m の高密度で行い、Euler 法の刻幅は 10 m で行った。刻み幅一定であるということは、ray dissimilarity が評価される際に、式 (3) における q_n の間隔も一定であることを意味する。また、発震-受振間距離は 10 km なので、 N は 1000 以上の十分大きな数になる。

7.4 実験(1)

SPR だけの場合の ray dissimilarity を Fig. 7 に示す。立方体単位ネットの場合は、 $NPE=4$ と $NPE=7$ の場合を示してある。どちらも偏角 45° で対称となるので半分の範囲しか表示していない。四面体単位ネットの場合は、非対称なので偏角 90° 全部を表示した。四面体分割は不規則な頂点分布のひとつを用いたものである。図は上から下へと 1 km, 0.5 km, 0.25 km の三段階のグリッド密度による結果を示している。

Fig. 8 は、Pseudo-bending を行った後の ray dissimilarity である。Pseudo-bending の打ち切り誤差は、 10^{-3} sec とした。Fig. 7 と Fig. 8 を比べてみると、Pseudo-bending 後に ray dissimilarity が大きい波線は、初期波線の段階ですでにかなり大きな ray dissimilarity をもっていることがわかる。

Fig. 7 Ray dissimilarity distribution before applying ray-path modification using the pseudo bending method. (left and center column): Results of using regular grid type network of NPE=4 and NPE=7 respectively. These has symmetric with respect to azimuth 45 degree. (right column): Result of using tetrahedron type network.

Fig. 8 Ray dissimilarity distribution after pseudo bending ray-path modification. See the caption of Fig. 7 about other informations.

Fig. 9 は、Pseudo-Bending を行った後の波線 (Fig. 8) の走時からリファレンス波線の走時を差し引いたものである。この走時の超過量は ray dissimilarity (Fig. 8) と顕著な比例関係は見られない。理由としては、複雑な速度構造の波線追跡に以下の二種類の誤差が伴うためと考えられる。

1. 走時差が小さく、ray dissimilarity が大きいタイプの誤差：
グローバルミニマムと走時にあまり差は無いが経路が大きく異なるローカルミニマムに収束することが原因と考えられる。
2. 走時差が大きく、ray dissimilarity が小さいタイプ

プの誤差：

経路の差はわずかでも、局所的な低速度域を迂回できないことで、走時が大幅に増えることが原因と考えられる。

波線追跡ではこれら二種類の誤差を回避する能力が要求される。以下、それぞれの誤差をタイプ(1)、(2)と呼ぶことにする。

立方体単位ネットと四面体単位ネットのどちらにも、両方のタイプの誤差が見られる。また誤差の最大値もそれほど変わらない。

7.5 実験(1)の結果についての考察

立方体単位ネットは四面体単位ネットよりも比較的 ray dissimilarity の高い波線、すなわちタイプ(1)の誤差をもつ波線が多い。しかもそれらは特定の位置にあり、

Fig. 9 Travel time error after pseudo bending ray-path modification.

ネットが細かくなっても解消されない。ネットの規則性が原因であるという見地に立って、このことについて考察してみる。

特に ray dissimilarity の高い波線は偏角 15° に多く現れている。この中の一つに着目してみることにする。Fig. 10は、グリッドサイズ 0.25 km の立方体単位ネットでは $\text{NPE}=7$ の場合の、SPR波線とリファレンス波線の中から偏角 15° 伏角 0° の受振点へ入射する波線を表示している。また、球を置かない速度構造を用いた場合のSPR波線も表示している。これを見ると、リファレンス波線 (Fig. 10(a)) は高速の球には引き寄せられていない。これに対し、SPR波線 (Fig. 10(b)) は寄せられている。この波線の走時は 6.612 秒であった。一方、球を置かない場合のSPR波線 (Fig. 10(c)) の走時は 6.661 秒であった。こちらの方がリファレンス波線に経路が近く、グローバルミニマムへ収束するための

Fig. 10 Ray-paths in case where the receiver has azimuth $=15^\circ$ and dip $=0^\circ$ from the source location. Lower view is the orthograph for x-y plane. a) The reference ray-path obtained most accurate ray tracing (i.e. Fast Marching Method). b) The ray-path obtained only by SPR without ray-path modifications. c) The ray-path obtained only by SPR in the homogeneous back ground velocity.

SPR波線としては正しいものである。にもかかわらず、走時が大きくなってしまっているため、わずかの差で最短経路とはならなかったのである。このことがタイプ(1)の誤差の原因と考えられる。これら二つの波線経路の特徴を比べてみると、後半部分、すなわち受振点に近い方の半分において滑らかさに差があることが分かる。すなわち(c)よりも(b)の方が直線性が高く滑らかである。

Fig. 10の下図は、XY平面への投影図である。これを見ると、(b)の波線の後半は $Y=2500$ の平面に乗っていることがわかる。この平面は立方体ブロックの面に相当するため、XZ平面に対する角度が 0° であるパスが数多く存在する。

立方体単位ネットのような規則的なネットは、幾通りかの決まった角度をもつパスの集合である。したがって、Fig. 10のように、角度 0° 、または特定の平面に対して角度 0° のパス接続が存在する。しかも、Nishi (2001) によるネットワークデザインは立方体の面上に経路網が

集中している (Fig. 1)。そのため、走時の差は少ないが経路が大きく離れた複数の解の候補が存在する場合、正しい経路に近い (Fig. 10中(c)) にもかかわらず、適当な平面に乗らず、直線性が乏しくなる場合がある。また逆の場合として、適当な平面に乗ると、正しい経路と大きく異なるにもかかわらず部分的に非常に直線性が高い経路 (Fig. 10中(b)) となることでトータルの走時が小さくなる場合がある。こうしたことが、偏角 15° に受振点をもつ波線を含め、Fig. 8およびFig. 9において、走時の超過量が小さく ray dissimilarity の高い波線、すなわちタイプ(1)の誤差をもつ波線に起きていると考えられる。そして、規則性ゆえに角度の多様性に乏しいことが原因で誤差が生じるこの問題は、グリッド数とNPEを増やすことでは解決されないと考えられる。

一方、四面体単位ネットによるSPRの結果のうち、伏角 0° に受振点をもつものをFig. 11に示した。いずれの波線も同じ程度にジグザグしていることが分かる。これは規則ネットのような角度 0° で接続するパスが無く、角度の多様性が多いという不規則ネット固有の特徴である。この特徴のおかげで、ジグザグによる走時の増加量は確率的にどの波線でも同じ程度になると考えられる。したがって、走時の差が少ない解の候補それぞれに同じ分布を持つ誤差が加わるだけなので、SPRの段階での差がPseudo-bending後の走時の差となって現れる確率が比較的高いと考えられる。言い替えれば、不規則ゆえに特徴の無い経路のデザインが、タイプ(1)の誤差の原因となりえる波線の部分的な直線化を回避していると考えられる。

7.6 実験(2)

不規則四面体分割は本来、大小様々な要素を敷き詰め

Fig. 11 Ray-paths only with SPR rays in irregular network. All receiver positions are on $z=0$ surface (i.e. dip angle zero from source).

て構造を表現できるという利点をもっている。そうした利点は走時トモグラフィーにおいては、速度の不均質性の高い局所領域で高い分解能が得られる場合に、その領域だけ要素サイズを分解能に合わせるために活用すべきである。要素サイズが局所的に小さくなると、それに伴いSPRのネットワークの細かさが非一様となる。以下の実験(2)では、ネットワークの細かさの非一様性が本手法に与える影響を調べる実験を行う。

ここでは、実験(1)で用いた分割状態を不均一にする。3.1節で述べたように、Delaunay分割は、その定義を満たした状態で任意の位置に頂点を追加して再分割することができる (Fig. 2)。このことを活用して、次のように構造に関する先見的信息に基づいた頂点追加を行う。

1. 実験(1)で用いた分割構造の中で、速度ギャップの球面と交差する四面体を全て検索する。
2. 検索された全ての四面体の重心に頂点を加えて再分割する。

この操作は繰り返し行うことができる。

実験(1)におけるグリッドサイズ1 kmの不規則ネットに対して上述の細分化を二回行い、ray dissimilarityと走時の超過量の変化を調べた。Fig. 12は、100の異なる不規則分割を用いて同じ実験をした結果の平均を示している。比較のために、頂点数1331点と9261点の場合について、再分割前の平均、すなわち実験(1)の条件におけ

Fig. 12 Averaged ray dissimilarity and travel time surplus. a) first subdivision. b) secondary subdivision. c) no subdivision (vertex=1331). d) no subdivision (vertex=9261).

る平均も表示してある (Fig. 12(c), (d))。上述の局所的細分化によって、一回目 (Fig. 12(a)), 二回目 (Fig. 12(b)) と、しだいに全体の走時の超過量が減少してゆくことがわかる。一回目の頂点追加時の頂点数は平均1930点、二回目で平均4212点となった。計算時間及びメモリの量は頂点数に比例する (第5節) ので、二回目の走時については、およそ半分の計算コストで9261点の場合と同程度の精度に達しているといえる。走時の超過量の減少の推移は特に偏角 25° に受振点をもつ波線において顕著である。これらの波線は、ray dissimilarity は小さいが走時の超過量は大きく、タイプ(2)の誤差を含む波線の典型といえるものである。そして、今回の実験の操作によって最も改善されている波線でもある。したがって、局所的な経路細分化が効率良くタイプ(2)の誤差を減少させていると言える。

7.7 実験(2)の結果についての考察

偏角 25° に受振点をもつ波線のリファレンス波線は高速度の球内部を通り、さらに低速度の球の縁を通して迂回する。この場合、初期波線が不適切であると Pseudo-bending は低速度球を迂回するよりも、球の表面の適当な位置から、球内部を直線的に通過する経路へと収束してしまう傾向をもつ。このとき、走時は大幅に増えてしまうが、ray dissimilarity はそれほど大きくならない。実験(1)の考察 (7.5節) では、タイプ(1)の誤差は、偏角 15° に受振点をもつ波線のように、グローバルミニマムとほとんど走時差の無いローカルミニマムが経路の大きく異なる位置に存在することが原因であると考えることができた。それとは対照的に、走時差が大きいローカルミニマムがグローバルミニマムからわずかに離れた経路に存在することがタイプ(2)の誤差となって現れていると考えられる。偏角 25° に受振点をもつ波線のように、経路の一部分だけが離れてローカルミニマムに捉えられる場合はその典型と言える。

Klimeš and Kvasnička (1994) は、SPR に伴う誤差要因の種類と誤差の見積もりを行っている。その中で、今回の実験と関連のあるものは、「ジグザグによる正の誤差」、「速度構造の不均質性による正負の誤差」、「パスが速度不連続面を跨ぐ際の負の誤差」である。

低速度球内部を通る初期波線を SPR が導出してしまいう現象の原因には、「パスが不連続面を跨ぐ際の負の誤差」が最も大きく関係していると考えられる。パス一本の走時は台形近似によって近似される。したがって、不連続面を跨ぐパス上で、不連続面の位置がパスの中間よりも高速度寄りの場合、パス一本の走時はパスの直線に沿ってスローネスを積分した値よりも小さくなる。逆の (低速度寄りのときは大きくなる) 場合もあるので、確率的に相殺されると思われがちだが、走時の小さな経路を解とするのが SPR なので、不連続面を跨ぐ際の誤差は常に負の誤差となる。そしてパスが短いほど、この誤

差は軽減される (Klimeš and Kvasnička, 1994)。このことは、不連続面付近での平均パス長が長い場合、低速度球を迂回するよりも不連続面を跨いでショートカットする方が走時が短くなるケースが起きやすくなることを意味する。不連続面付近での経路の細分化は特に不連続面を跨ぐパスを短くすることから、こうしたケースの発生率を抑えると考えられる。すなわち、不連続面を跨ぐ際の負の誤差が軽減されることで、不連続面を跨がない正しい初期波線が導出される確率が高まると考えられる。

ところで、不連続面付近での経路の細分化による影響はタイプ(2)の誤差の減少だけではない。Fig. 12(a) から (b) へと、偏角 15° に受振点をもつ波線は不連続面付近での経路の細分化に伴い ray dissimilarity が増えている。すなわち、タイプ(1)の誤差の発生率増大という副作用をもたらしている。実験(1)の考察で述べたように、これらの受振位置では、リファレンス波線よりわずかに遅れて到達する準リファレンス波線が存在する。以下、Pseudo-bending がリファレンス波線に収束できる SPR 波線を R-SPR 波線、準リファレンス波線に収束してしまう SPR 波線を Q-SPR 波線と呼ぶことにする。

経路の細分化は、SPR の時点でのトータル走時を小さくする。「ジグザグによる誤差」は常に正の誤差であり、これもやはり経路の平均パス長が短くなることで解消されるからである (Klimeš and Kvasnička, 1994)。しかし、今回その恩恵を受けるのは Q-SPR 波線だけである。R-SPR 波線は不連続面から離れているため、細分化に影響されない。その結果、Q-SPR 波線が R-SPR 波線よりも走時が小さくなる確率が高くなったと考えられる。しかし、二回目の細分化 (Fig. 12(c)) では、ray dissimilarity の増加はほとんど見られない。したがって、こうした空間的に偏った細かさをもつ経路配置が誤った初期波線である Q-SPR 波線を導出させてしまう確率は際限無く高くなることはないと推測される。Q-SPR 波線の走時の平均は、細分化前 (Fig. 12(a)) では不均質性による誤差が正の誤差として強く現れていて、経路のカーブの複雑さに対して経路の細かさが不足気味だったために大きくなっていったと考えられる。そして、一回目の細分化によって本来の走時の平均に大きく近付いたと考えられる。このことは、今回の実験ではタイプ(1)の誤差の発生率増加という悪い副作用として現れている。

しかしながら、細分化されるのがリファレンス波線が通る領域だった場合は、全く逆のケースが生じると推測できる。つまり、今回の実験の場合、もしも高速度の球を通るほうがリファレンス波線だった場合、悪い副作用とはならず、むしろ正しい初期波線が導出される確率が上がり、タイプ(1)の誤差を減少させる良い副作用となることが予測できる。実際、偏角 20° に受振点をもつ波線のいくつかは、偏角 15° の場合と逆に、リファレンス波線が高速度球を通る。そしてやはりわずかな走時差で競

合する準リファレンスが波線が存在する。Fig. 12で、これらの波線の ray dissimilarity が細分化後に減少しているのは、良い副作用によるものと考えられる。

8 議 論

本手法は、SPR (shortest path ray-tracing) の後、Pseudo-bending によってジグザグな経路を修正するハイブリッド法である。その際、SPR に要求されるのは、Pseudo-bending の前処理としての「ローカルミニマムの回避能力」である。

実験(1)の結果から、ハイブリッド法が、(1)走時誤差は小さいが経路誤差が大きい、(2)経路誤差は少ないが走時誤差が大きい、という二つタイプの誤差を含むことがわかった。実験(1)の結果から、タイプ(1)の誤差はネットワークが規則的な場合、あるいは不規則で細かさが非一様の場合に生じやすいと考えられる。また、実験(2)の結果から、タイプ(2)の誤差は速度構造の不連続性または不均質性の高さに対してネットワークの細かさが部分的に不足している場合に生じやすいと考えられる。したがって、ネットワークが不規則であること自体は規則的である場合に比べて精度の面で劣ることは無いと言える。

実験(1)の考察 (7.5節) では、タイプ(1)の誤差が大きい波線の一本を調べた。その結果、経路候補の間の走時差はトータル走時の1%にも満たなく、ほとんど同時に入射するマルチパスと言ってもよい程度の差であった。これを許容誤差と考えるなら、ほぼ等しい走時をもつマルチパスと見なすことができる波線のうち、わずかに早く到達するものを選択できる能力には大きな意味は無い。したがって、一様分解能における不規則ネットが規則ネットより特に優れているわけではない。

実験(2)では、部分的な経路の逸脱が原因となっているタイプ(2)の誤差に対して、ネットワーク全体を細分化せずとも部分的に要素を小さくして経路を細かくするだけで誤差を大幅に軽減できることを示した。誤差が軽減される仕組みは、今回の実験においては、速度不連続面をパスが跨ぐ際の負の誤差の減少によるものと推測した。しかし、これはタイプ(2)の誤差の要因の一つであり、偏角25°に受振点をもつ波線にはそれが特に強く現れていたに過ぎないと考えられる。実際には Klimeš and Kvasnička (1994) が列挙した複数の誤差が複合的要因となると考える方が自然である。「不連続面による誤差」以外の誤差もやはり、その原因となる経路不足を生じている領域のパス長が短くなることで軽減されているはずだが、どれほど軽減できているのかは、今回の実験からはわからない。

また、今回の実験では不連続面が存在する場所、すなわち経路不足の場所について先見の情報に基づいて頂点を追加して要素を再分割した。しかし、実用上、走時トモグラフィーにおいて構造の局所的なグリッド密度の増加は、インバース問題の性質を改善するという目的か

ら、むしろ波線の密度と波線同士の直交性を考慮して行うべきである。したがって、局所的に要素サイズを小さくすることが意味を持つ領域とは、波線が集中して分解能が高く、同時に実際の速度の不均質性も高い領域である。そして、その領域では波線追跡には周辺よりも高い精度が要求されるはずである。本手法は要素サイズにネットワークの細かさが追従することで、その要求を満たすことができる。すなわち、全体的に無駄の少ないネットワークを構築することで、高い精度を比較的少ない計算量で実現することが期待できる。

以上の事をより明確にするために、実際に走時トモグラフィーに用いてみるのが今後の課題である。また、今回提案した四面体内部の経路 (Fig. 1(a)) は、非常にシンプルなものである。Zhang and Toksöz (1998) は一つのノードからみたパスが等角の放射状になるように配置し、角度を多用化することが精度を高めることを見出している。今回提案した経路の構築法では、四面体の辺を通るパスと、辺の中点同士を結ぶパスは平行になっている。パスの角度をより多様化するために、この点を改良する必要があるかもしれない。今後、精度と計算コストとメモリ消費の間のバランスを考慮しつつ、より適切なデザインを考案することが一つの課題である。

9 結 論

最短経路波線追跡 (SPR) を初期波線として pseudo-bending 法を行うハイブリッド型波線追跡法を、不規則四面体分割による速度構造表現に適用した。本来、SPR は規則的にパラメータ化された構造に規則的なネットワークを構築して行われる。しかし、本手法は不規則四面体に沿って経路を構築するため、経路ネットワーク自体が不規則になってしまう。このことが、精度の低下を招かないことを確かめるため、規則的なネットワークとの比較実験を行った。また、四面体要素のサイズの非一様性と本手法の精度との関係を調べる実験も行った。

その結果、次のことがわかった。

1. 不規則四面体分割に適用する際、我々の提案するネットワークデザインは、最短経路探索に要する計算コストが、通常用いられる立方体を単位としたデザインよりも2倍ほど高くなる。
2. 仮想構造による数値実験の結果、不規則ネットが規則ネットに劣るような要因は見当たらない。
3. 四面体要素のサイズの非一様性は、本手法に経路の非一様性をもたらす。すなわち、波線追跡に精度が必要とされる領域が他の領域よりも小さな要素で構成されるならば、無駄の少ないネットワークとなることで、低コストながら高精度の結果が得られることが期待できる。

以上より、計算コストと精度のトレードオフが少々精度側に偏るものの、SPR と pseudo-bending のハイブリッ

ド波線追跡法は不規則四面体分割でパラメータ化された速度構造にも十分適用できる。

謝 辞

本論文をまとめるにあたり、貴重な御意見を下さった2名の匿名の査読者に深く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- Asakawa, E. and Kawanaka, T. (1992) : Seismic ray-tracing using linear travel time interpolation. *Geophysical Prospecting*, **41**, 99–111.
- Chiao, L. Y. and Kuo, B. Y. (2001) : Multiscale seismic tomography. *Geophys. J. Int.*, **145**, 517–527.
- Curtis, A. and Snieder, R. (1997) : Reconditioning inverse problems using the genetic algorithm and revised parameterization. *Geophysics*, **62**, 4, 1524–1532.
- Delone, B. N. (1934) : Sur la sphere vide. *Bull. Acad. Science USSR : Class Sci. Math.*, **VII**, 793–800.
- Dijkstra, E. W. (1959) : A note on two problems in connection with graph. *Numer. Math.*, **1**, 269–271.
- Fischer, R. and Lees, J. M. (1993) : Shortest path ray tracing with sparse graphs. *Geophysics*, **58**, 7, 987–996.
- Klimeš, L. and Kvasnička, M. (1994) : 3-d network ray tracing. *Geophys. J. Int.*, **116**, 726–738.
- Moser, T. J. (1991) : Shortest path calculation of seismic rays. *Geophysics*, **56**, 1, 59–67.
- Nakanishi, I. and Yamaguchi, K. (1986) : A numerical experiment on nonlinear image reconstruction from first-arrival times for two-dimensional island arc structure. *J. Phys. Earth*, **34**, 195–201.
- Nelder, J. A. and Mead, R. (1965) : A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, **7**, 308–313.
- Nishi, K. (2001) : A three-dimensional robust seismic ray tracer for volcanic regions. *Earth Planets Space*, **53**, 101–109.
- Overmars, M., de Berg, M., van Kreveld, M., and Schwarzkopf, O. (1997) : *Computational Geometry : Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Overmars, M., de Berg, M., van Kreveld, M., and Schwarzkopf, O. (2000) : コンピュータ・ジオメトリ：アルゴリズムと応用。近代科学社。
- Pereyra, V., Lee, W. H. K., and Keller, H. B. (1980) : Solving two-point seismic ray tracing problems in a heterogeneous medium. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **70**, 79–99.
- Podvin, P. and Lecomte, I. (1991) : Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity models : a massively parallel approach and its associated tools. *Geophys. J. Int.*, **105**, 271–284.
- Rawlinson, N. and Sambridge, M. (2004) : Wave front evolution in strongly heterogeneous layered media using the fast marching method. *Geophys. J. Int.*, **156**, 631–647.
- Saito, H. (1989) : Travel times and raypaths of first-arrival seismic waves : Computation method based on Huygens's principle. *59th SEG meeting, Dallas, USA, Expanded Abstracts*, 244–247.
- Sambridge, M., Braun, J., and McQueen, H. (1995) : Geophysical parameterization and interpolation of irregular data using natural neighbours. *Geophys. J. Int.*, **122**, 837–857.
- Sambridge, M. and Faletič, R. (2003) : Adaptive whole earth tomography. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **4**, 3.
- Sambridge, M. and Gudmundsson, O. (1998) : Tomographic systems of equations with irregular cells. *J. Geophys. Res.*, **103**, B1, 773–781.
- Sassa, K., Ashida, Y., Kozawa, T., and Yamada, M. (1989) : Improvement in the accuracy of seismic tomography by use of an effective ray tracing algorithm. In *MMIJ/IMM Joint Sympo.*, Japan. Kyoto, 129–136.
- Sethian, J. A. and Popovici, A. M. (1999) : 3-d traveltimes computation using the fast marching method. *Geophysics*, **64**, 2, 516–523.
- Spakman, W. and Bijwaard, H. (2001) : Optimization of cell parameterizations for tomographic inverse problems. *Pure Appl. Geophys.*, **158**, 8, 1401–1423.
- Thurber, C. and Eberhart-Phillips, D. (1999) : Local earthquake tomography with flexible gridding. *Comput. Geosci.*, **25**, 809–818.
- Thurber, C. H. (1983) : Earthquake locations and three-dimensional crustal structure in the coyote lake area, central California. *J. geophys. Res.*, **88**, B10, 8226–8236.
- Thurber, C. H. and Ellsworth, W. L. (1980) : Rapid solution of ray tracing problems in heterogeneous media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **70**, 4, 1137–1148.
- Um, J. and Thurber, C. H. (1987) : A fast algorithm for two-point seismic ray tracing. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **77**, 3, 972–986.
- Vesnaver, A. L. (1996) : Irregular grids in seismic tomography and minimum-time ray tracing. *Geophys. J. Int.*, **126**, 147–165.
- Vidale, J. E. (1990) : Finite-difference calculation of traveltimes in three dimensions. *Geophysics*, **55**, 5, 521–526.
- Watson, D. F. (1981) : Computing n-dimensional delaunay tessellation with application to voronoi polytopes. *The Computer Journal*, **24**, 2, 167–172.
- Zhang, J. and Toksöz, M. N. (1998) : Nonlinear refraction traveltimes tomography. *Geophysics*, **63**, 5, 1726–1737.
- Zhou, H.-W. (2004) : Direct inversion of velocity interfaces. *Geophys. Res. Lett.*, **31**.
- 鷲津久一朗・宮本 博・山田嘉昭・山本善之・河井忠彦 (1981) : 有限要素法ハンドブック I 基礎編。培風館。
- 西 潔・清水 洋 (2000) : 雲仙火山中央部の3次元地震波速度構造。地球惑星科学合同大会予稿集。
- 手塚 集 (2003) : 超一様分布列の数理。In 統計科学のフロンティア11・計算統計 I・確率計算の新しい手法。岩波書店。