線形逆散乱解析による多孔質弾性体中の不均質部の形状再構成

山本晃司*・北原道弘**

Shape reconstruction of scatterers in poroelastic media using linearized inverse scattering analysis

Koji Yamamoto* and Michihiro Kitahara**

ABSTRACT

The Linearized Inverse Scattering Analysis using Born approximation is applied to the Biot's Poroelastic model for the visualization of scatterers in porous media. Spatial and frequency distribution of the scattering amplitude is used for the shape reconstruction of a scatterer in which solid frame and/or pore fluid properties are different from surrounding media. The inversion method is based on the field integral expression of the scattered field, its linearization by Born approximation, and a direct inversion method by using the Inverse Fourier Transform. In this paper, theoretical background and numerical formulations of the method are described, and some examples of the reconstructed form of scatterers using simulated scattered field are shown. The examples show the applicability of the inversion method to the fluid filled porous material. The limited aperture problem is also discussed using the numerical results. It is shown that the reconstruction of scatterer geometry is still available with some degree of the lack of information.

Key words: biot, poroelasticity, inversion, born approximation

1. はじめに

資源開発や環境問題では逆解析手法による地層中の物性値分布のイメージングが課題となっており、特に流体挙動のモニタリングは重要な問題である。そのための手法として坑井間トモグラフィなどの弾性波を用いた技術が使われていて、EOR (Nur and Wang, 1987; 横田ら, 2003), メタンハイドレートからのガス生産 (Bauer *et al.*, 2004), 二酸化炭素の地中隔離 (大下, 2002) などの分野に適用されている。

これらで現在一般に用いられている手法は初動走時トモグラフィ (LaPorte *et al.*, 1973) である。この手法は、レイパスの理論に基づいて波の屈折・伝播の問題を考え、観測した波の到達時刻や波形を再現するように、

速度構造の最適解を求めるものである。この手法は波長が不均質部のスケールよりも短い場合に成立する高周波近似であるといえる。

さらに散乱波動場も考慮した波形情報を用いた最適化を図るフルウェーブインバージョン (Pratt and Worthington, 1990; Pratt, 1999) の手法があり、最急降下法等の収束計算によって速度構造の最適解を求めている。それに対して、本論文で扱う線形逆散乱解析 (Linearized Inverse Scattering Analysis) は、均質媒体中に置かれた散乱体からの散乱波強度の空間及び周波数分布と散乱体領域の形状を解析的に結びつけて再構成する逆解析手法である (Rose and Opsal, 1982; Hsu *et al.*, 1984; Rose, 1984; Schmerr *et al.*, 1989)。

本手法は、弾性体の問題については定式化と同時に実

2005年3月29日原稿受付; 2005年11月18日受理
物理探査学会第110回 (平成16年度春季) 学術講演会で一部を発表

* 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻
980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06
(現 銕石油天然ガス・金属鉱物資源機構)
(〒261-0025 千葉県千葉市美浜区浜田 1-2-2)

** 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻
980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06

Manuscript received March 29, 2005; Accepted November 18, 2005

A part of this paper was presented at the 110th SEGJ conference, 2004

* Tohoku University, Department of Civil Engineering
Aoba 6-6-06, Sendai 980-8579, JAPAN
(Presently, Japan Oil, Gas and Metals National Corporation 1-2-2, Hamada, Mihama-ku, Chiba, Chiba 261-0025, Japan)

** Tohoku University, Department of Civil Engineering Aoba
6-6-06, Sendai 980-8579, JAPAN

験的検証も行われている (Kitahara and Hirose, 1998; Kitahara *et al.*, 2002; 山田ら, 2003; 宮腰・山田, 2005) が, ここではこの手法を流体で飽和した多孔質体に拡張する。間隙流体の影響を表現するために, Biot による飽和多孔質弾性体のモデル (Biot, 1956; Biot, 1962) を用いて, 固体骨格と間隙流体のいずれかあるいは双方の物性が周囲と異なる領域を散乱体と考慮して, 観測された散乱波からその形状を求める手法の数値的基礎を示す。また, 数値解析で得られた模擬的な散乱波を利用して, 間隙流体の物性が周囲と異なる領域の形状の再構成が可能であることを示す。

2. 散乱波動場の積分表現

2.1 Biot の多孔質弾性モデル

本論文で間隙流体の影響をモデル化するために用いた Biot の多孔質弾性モデルは, 空間が弾性体の粒子骨格とその孔隙を飽和する圧縮性の間隙流体で構成され, 粒子, 粒子骨格, および間隙流体の弾性係数とともに, 多孔質体の浸透率と流体の粘性が弾性波速度を定めると考える。

弾性体では, 場の性質は2つの弾性パラメータ (Lamé 定数 μ, λ) と1つの質量パラメータ (密度 ρ) で記述され, 媒質の運動は三次元空間では3つの自由度 (変位: $\mathbf{u}$) を持ち, 2種類の波 (縦波及び横波) が生じる。それに対して, Biot の多孔質弾性体を記述するには, 4つの弾性パラメータ (骨格の Lamé 定数 μ 及び λ , Biot の有効応力定数 α , Biot の弾性定数 M) と, 2つの質量パラメータ (全体系の密度 ρ 及び流体密度 ρ_f), 孔隙率 (β), 及び散逸に関わる定数 (b) の8つの独立したパラメータが必要で (Biot and Willis, 1957), 空間の各点において流体の圧力 p と固体の変位 $\mathbf{u}$ の4つの自由度が現れる。

また多孔質弾性体を媒質とする波動には, 横波 (ここでは T -波と表す), 及び速い縦波と遅い縦波の2種類の縦波 (ここではそれぞれ $L1$ -波と $L2$ -波と表す) の3つの波が現れ, 孔隙間を移動する流体の流動抵抗によりエネルギーの散逸が生じ, それに伴い波速の分散性が生じるという弾性体中の波とは異なる特徴が現れる (Biot, 1956; Biot, 1962)。Biot モデルによる波の性質については狐崎 (2004), Yamamoto and Kitahara (2004) で詳しく議論されている。

弾性体の Navier-Cauchy 方程式に対応する, 均質な多孔質弾性体における運動方程式は次のように書ける。

$$L_{ij}q_j = -f_i \quad (1)$$

ここで, L_{ij} は微分演算子であり, 4×4 要素の行列 $[L_{ij}]$ で表され, 固体変位に関係する要素 $[L_{ij}]$, 流体圧力に関係する要素 L_{44} , 及び相互の連成効果に関係する要素 $\{L_{i4}\}$ 及び $\{L_{4j}\}^T$ のそれぞれからなる部分行列に分けて次のように表すことができる (Yamamoto and

Kitahara, 2004)。

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} [L_{ij}] & \{L_{i4}\} \\ \{L_{4j}\}^T & L_{44} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} C_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} + \omega^2 \tilde{\rho} \delta_{ij} \right] & \left\{ -\tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\ \left\{ \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}^T & \left[\frac{1}{\omega^2 \tilde{m}} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{M} \right] \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで, 次の複素多孔質弾性パラメータを使用した。

$$\tilde{m} = \frac{\rho_f}{\beta} - ib, \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\rho_f}{\tilde{m}}, \quad \tilde{\rho} = \rho - \beta^2 \tilde{m} \quad (4)$$

また, C_{kij} は固体骨格部に関する弾性テンソルで,

$$C_{kij} = \lambda \delta_{ki} \delta_{lj} + \mu (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}) \quad (5)$$

と書ける。これ以降, 大文字の添え字 (I, J) は1~4の値をとり, そのうち1~3はデカルト座標系の空間座標を, また, 4は流体圧力に関する項であることを示す。小文字の添え字 (i, j) は1~3の値をとり, 空間座標を示す。

また, $\mathbf{q}$ は固体の変位 $\mathbf{u}$ と流体圧力 p より構成される一般化された変位 ($\mathbf{q} = \{\mathbf{u}^T, p\}^T$) であり, また $\mathbf{f}$ は物体力を示すベクトルで,

$$\mathbf{f} = \left\{ \left\{ \rho b_i + \frac{\rho_f^2}{\tilde{m}} c_i \right\}^T, \left\{ \frac{\rho_f}{\omega^2 \tilde{m}} c_k \right\}^T \right\} \quad (6)$$

と定義される。ここで, $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ はそれぞれ単位質量の全体系および流体に加わる物体力を示す。

2.2 不均質部による散乱波動場

次に, 均質な多孔質弾性体の中に, その内部では均質な局所的な不均質がある問題を考える。ここで, 境界 S によって囲まれた閉領域 D を考えると, 運動方程式(1)の二つの解 $\mathbf{q} = \{\mathbf{u}^T, p\}^T$ 及び $\mathbf{q}^* = \{\mathbf{u}^{*T}, p^*\}^T$ は相反定理

$$\int_D (f_i q_i^* - f_i^* q_i) dV = \int_S (s_i^* q_i - s_i q_i^*) dS \quad (7)$$

を満たす (Schmerr, 1998)。ここで ($\mathbf{f}, \mathbf{s}$) 及び ($\mathbf{f}^*, \mathbf{s}^*$) はそれぞれ解 $\mathbf{q}, \mathbf{q}^*$ に対応する物体力及び表面力を示す。

次に, Fig. 1 に示すように, 一定の多孔質弾性パラメータ ($\lambda, \mu, \tilde{\alpha}, 1/M, 1/\tilde{m}$) で定義された無限均質領域 D (母材) 中に, その内部では一定の物性値 ($\lambda + \Delta\lambda, \mu + \Delta\mu, \tilde{\alpha} + \Delta\tilde{\alpha}, 1/M + \Delta(1/M), 1/\tilde{m} + \Delta(1/\tilde{m})$) を持つ不均質領域 D^c (散乱体) が存在する状態を考える。領域 D 中の物性値の分布を表すために, 次の関数 $\Gamma(\mathbf{x})$ を導入する。

Fig. 1 Schematic of wave scattering by a scatterer D^c in a poroelastic medium D .

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{x} \in D^c \\ 0 & \text{for } \mathbf{x} \in D \setminus D^c \end{cases} \quad (8)$$

ただし、関数 $\Gamma(\mathbf{x})$ は領域 D^c 及び $D \setminus D^c$ 内では一定値であり、 D^c を囲む境界上では不連続となるが、便宜上この境界上で連続かつ2階微分可能であると考え、この関数を用いると、領域 D 内の点 $\mathbf{x}$ における任意の物性値 ϕ は次のように表すことができる。

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi + \Gamma(\mathbf{x}) \Delta \phi \quad (9)$$

物体力が作用していないと考えた場合、運動方程式(1)はこの系に関して次のように書きなおせる。

$$\begin{aligned} C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}) - \tilde{\alpha} p_{,i}(\mathbf{x}) + \tilde{\rho} \omega^2 u_i(\mathbf{x}) \\ = - [\Gamma(\mathbf{x}) \Delta \tilde{\rho} \omega^2 u_i(\mathbf{x}) \\ + \Delta C_{ijkl} \{ \Gamma(\mathbf{x}) u_{k,l}(\mathbf{x}) + \Gamma_{,j}(\mathbf{x}) u_{k,l}(\mathbf{x}) \} \\ - \Delta \tilde{\alpha} \{ \Gamma(\mathbf{x}) p_{,i}(\mathbf{x}) + \Gamma_{,i}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \}] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} u_{i,i}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\tilde{m} \omega^2} p_{,ii}(\mathbf{x}) + \frac{1}{M} p(\mathbf{x}) \\ = - \left[\Gamma(\mathbf{x}) \Delta \left(\frac{1}{M} \right) p(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \Delta \tilde{\alpha} \{ \Gamma(\mathbf{x}) u_{i,i}(\mathbf{x}) + \Gamma_{,i}(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) \} + \Delta \left(\frac{1}{\tilde{m}} \right) \frac{1}{\omega^2} \right. \\ \left. \times \{ \Gamma(\mathbf{x}) p_{,ii}(\mathbf{x}) + 2\Gamma_{,i}(\mathbf{x}) p_{,i}(\mathbf{x}) + \Gamma_{,ii}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

式(10)及び(11)では不均質領域 D^c に関係する項を右辺にまとめているが、これらの項は式(1)の物体力 $\mathbf{f}$ に対応していることがわかる。

この不均質部が波動場に与える影響を示すために、次に示す二組の解を用いて式(7)の相反定理を書き直すことにする。

はじめの組は単位集中心力 $\delta_{iN} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ を物体力とした場合の方程式の解の組であり、

$$\begin{cases} s_i = \{ \lambda G_{kn,k} \delta_{ij} + \mu (G_{in,j} + G_{jn,i}) - \alpha G_{4n} \delta_{ij} \} n_j \\ s_4 = \left(\frac{\rho_f}{\tilde{m}} G_{j4} + \frac{1}{\omega^2 \tilde{m}} G_{44,j} \right) n_j \\ q_i = G_{iN} \\ q_4 = G_{4N} \\ f_i = \delta_{iN} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ f_4 = \delta_{4N} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{cases} \quad (12)$$

と書ける。ここで $\delta(\mathbf{x})$ は Dirac のデルタ関数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。また、 $[G_{IJ}]$ は、方程式：

$$L_{IJ} G_{JK}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta_{IK} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (13)$$

の解で、基本解と呼ばれる。また、 $\mathbf{n}$ は D^c の境界の外向きの法線ベクトルである。基本解は Cheng *et al.* (1991), Dominguez (1992), 福井ら (1996), Yamamoto and Kitahara (2004) が具体的に与えている。本論文で用いたパラメータによる基本解を補遺1に示す。

もう一組の解は、不均質領域 D^c の影響を物体力におきかえた、式(10)及び(11)に対応する解の組であり、

$$\begin{cases} s_i^* = \{ \lambda u_{k,h} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \alpha \phi \delta_{ij} \} n_j \\ s_4^* = \left(\frac{\rho_f}{\tilde{m}} u_j + \frac{1}{\omega^2 \tilde{m}} p_{,j} \right) n_j \\ q_i^* = u_i \\ q_4^* = p \\ f_i^* = \Gamma(\mathbf{x}) \Delta \tilde{\rho} \omega^2 u_i(\mathbf{x}) \\ \quad + \Gamma(\mathbf{x}) \{ \Delta C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}) - \Delta \alpha \phi_{,i}(\mathbf{x}) \} \\ \quad + \Gamma_{,j}(\mathbf{x}) \{ \Delta C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}) - \Delta \alpha \phi(\mathbf{x}) \} \\ f_4^* = \Gamma(\mathbf{x}) \Delta \left(\frac{1}{M} \right) p(\mathbf{x}) \\ \quad + \Gamma(\mathbf{x}) \left\{ \Delta \tilde{\alpha} u_{i,i}(\mathbf{x}) + \Delta \left(\frac{1}{\tilde{m}} \right) \frac{1}{\omega^2} p_{,ii}(\mathbf{x}) \right\} \\ \quad + \Gamma_{,i}(\mathbf{x}) \left\{ \Delta \tilde{\alpha} u_i(\mathbf{x}) + 2\Delta \left(\frac{1}{\tilde{m}} \right) \frac{1}{\omega^2} p_{,i}(\mathbf{x}) \right\} \\ \quad + \Gamma_{,ii}(\mathbf{x}) \Delta \left(\frac{1}{\tilde{m}} \right) \frac{1}{\omega^2} p(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (14)$$

と書ける。

媒質 $D \setminus D^c$ 中の変位場 $\mathbf{q}$ は入射波 $\mathbf{q}^{\text{in}}$ と散乱波 $\mathbf{q}^{\text{sc}}$ の和で表される。そこで、これらの解を式(7)に代入し、境界 S を無限遠方 S^∞ に拡大する。さらに、Sommerfeld の放射条件より無限遠方では散乱波は零 ($q^{\text{sc}} = 0$) となることを利用して、相反定理は次のように書き直せる。

$$q^{\text{sc}}(\mathbf{y}) = \int_D G_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B_J(\mathbf{x}) dV_x \quad (15)$$

ただし、

$$B_i(\mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x}) \left[\Delta \tilde{\rho} \omega^2 u_i(\mathbf{x}) - \{ \Delta C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}) \} \right]$$

$$-\Delta \tilde{\alpha} p(\mathbf{x}) \delta_{ij} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \quad (16)$$

$$B_4(\mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x}) \left[\Delta \left(\frac{1}{M} \right) p(\mathbf{x}) - \left\{ \Delta \tilde{\alpha} u_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right. \right. \\ \left. \left. - \Delta \left(\frac{1}{\tilde{m}} \right) \frac{1}{\omega^2} p(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} \right] \quad (17)$$

である。式(15), (16) 及び(17) から, 散乱波動場 $\mathbf{q}^{\text{sc}}$ が, 領域 D^c と $D \setminus D^c$ の多孔質弾性パラメータの差の領域積分によって与えられることがわかる。ここで, $\mathbf{B}$ を等価散乱源と呼ぶこととする。また, ここでは $\Gamma(\mathbf{x})$ の微分に関する項は消去されて, 関数 $\Gamma(\mathbf{x})$ を連続かつ2階微分可能とした仮定の影響は現われないことがわかる。

2.4 散乱振幅

等価散乱源 $\mathbf{B}$ による遠方の散乱場を, 散乱波の種類ごとに分離した形で求めるために, 式(13)で定義された基本解に遠方近似を導入した表現:

$$G_{IJ}^{\text{far}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{q=T, L1, L2} \tilde{g}_{IJ}^q(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{ik_q r}}{r} \quad (18)$$

を用いる (Yamamoto and Kitahara, 2003)。ここで, q は散乱波の種類 ($q=T, L1$ または $L2$) を示し, k_q は q -波の波数を示す。また, r は散乱体と観測点 $\mathbf{y}$ の距離, $\hat{\mathbf{y}}$ は散乱体から観測点 $\mathbf{y}$ に向く方向ベクトルを示す。式(18)における $\tilde{g}_{IJ}^q(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}})$ の具体的な表現は補遺2に示す。散乱体半径の4~5倍の位置で計測する場合, 遠方近似は十分精度良く成立する。

式(16) 及び(17) より, 等価散乱源 $\mathbf{B}$ による遠方の散乱場 $\mathbf{q}^{\text{sc(far)}}$ は次のように書くことができる。

$$q_I^{\text{sc(far)}}(\mathbf{y}) = \int_D G_{IJ}^{\text{far}}(\mathbf{y}) B_J(\mathbf{x}) dV_x \\ = \sum_{q=T, L1, L2} \int_D \tilde{g}_{IJ}^q(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) B_J(\mathbf{x}) \frac{e^{ik_q r}}{r} dV_x \quad (19)$$

ここで, 入射波の種類を p -波 ($p=T, L1$ または $L2$) として, その入射に対する散乱波における q -波の寄与を示す散乱振幅 $A^{q:p}$ を次のように定義する。

$$A_I^{q:p}(\hat{\mathbf{y}}) = \int_D \tilde{g}_{IJ}^q(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) B_J(\mathbf{x}) dV_x \quad (20)$$

この散乱振幅を用いると, 散乱場は次のように書ける。

$$q_I^{\text{sc(far)}}(\mathbf{y}) = \sum_{q=T, L1, L2} A_I^{q:p}(\hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{ik_q r}}{r} \\ = \sum_{q=T, L1, L2} A_I^{q:p}(\hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{i \operatorname{Re}(k_q) r}}{r} e^{-\operatorname{Im}(k_q) r} \quad (21)$$

これらの式から, 無限媒質内に物性の不均質な領域が存在

する場合に, その不均質部に起因する散乱波の q -波成分の寄与は, 等価散乱源 $\mathbf{B}$ と基本解の遠方表現 $[g_{IJ}^q]$ から求められることがわかる。

3. BORN 近似による逆問題の定式化

3.1 Born 近似

式(20)で定義された散乱振幅 A^q には, 等価散乱源 $\mathbf{B}$ の中に散乱体形状に関する関数 $\Gamma(\mathbf{x})$ と散乱体内部での全変位場 $\mathbf{q}$ が含まれる。この全変位場は $\mathbf{q}$ は散乱体の形状の影響を受けるので, 式(20)は $\Gamma(\mathbf{x})$ に関する非線形の方程式であると言える。この方程式を $\Gamma(\mathbf{x})$ に関する線形の方程式とするために, Born 近似を導入する。すなわち, 散乱体 D^c 内部の変位場 $\mathbf{q} = \{\mathbf{u}^T, p\}^T$ が入射波 $\mathbf{q}^{\text{in}} = \{\mathbf{u}^{\text{in}T}, p^{\text{in}}\}^T$ に等しいと与える。入射波を平面進行波と仮定して, その伝播方向を示す単位ベクトルを $\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}}$, 粒子変位の方向を示す単位ベクトルを $\mathbf{d}^{\text{in}}$ と書いて,

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}) = u_0 d_i^{\text{in}} \exp(ik_p \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \mathbf{x}) \quad (22)$$

$$p(\mathbf{x}) = p^{\text{in}}(\mathbf{x}) = p_0 \exp(ik_p \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \mathbf{x}) \quad (23)$$

とする。この近似は, 散乱体が入射波の波長に対して十分小さいときに成立し, 低周波近似と考えることもできる。

ここで, 散乱波の伝播方向を示す単位ベクトルを $\hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}}$ と書く。すると, 式(18)で現れる基本解の遠方近似 $[\tilde{g}_{IJ}^q]$ は, 定数部分 $[\tilde{g}_{IJ}^q]$ と指数部分 $\exp(-ik_q \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}} \cdot \mathbf{x})$ に分けて, $\tilde{g}_{IJ}^q = \bar{g}_{IJ}^q \exp(-ik_q \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}} \cdot \mathbf{x})$ の形で書ける。

これらの記号を用いると, 式(20)は次のように書き直すことができる。

$$A_I^{q:p}(\hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}}) = \bar{g}_{IJ}^q \int_D \hat{B}_J(\mathbf{x}; \mathbf{q}^{\text{in}}) dV_x \quad (24)$$

ここで, $\hat{B}$ は式(16) 及び(17) の等価散乱源 $\mathbf{B}$ の表式中の $\mathbf{q}$ に $\mathbf{q}^{\text{in}}$ を代入したものと, 基本解 $[\tilde{g}_{IJ}^q]$ の指数部分 $\exp(-ik_q \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}} \cdot \mathbf{x})$ の積であり, 次のように書ける。

$$\hat{B}_I = \hat{b}_I \Gamma(\mathbf{x}) \exp\{i\mathbf{x} \cdot (k_p \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} - k_q \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}})\} \quad (25)$$

ここで,

$$\hat{b}_i = \Delta \tilde{\rho} \omega^2 u_0 d_i^{\text{in}} + ik_q (\Delta C_{ijkl} u_0 d_k^{\text{in}} ik_p \hat{p}_l^{\text{in}} \hat{p}_j^{\text{sc}} - \Delta \tilde{\alpha} \hat{p}_i^{\text{sc}} p_0) \quad (26)$$

$$\hat{b}_4 = \Delta \left(\frac{1}{M} \right) p_0 + ik_q \Delta \tilde{\alpha} u_0 \hat{p}_k^{\text{sc}} d_k^{\text{in}} - k_q^2 \Delta \left(\frac{1}{\tilde{m}} \right) \frac{1}{\omega^2} p_0 \quad (27)$$

である。次に, 散乱波の振動方向を示すベクトル $\mathbf{d}^{\text{sc}}$ を定義する。ここで, ベクトル $\mathbf{d}^{\text{sc}}$ 中の固体変位に関する部分 d_i は固体の振動方向を示す単位ベクトル ($d_i d_i = 1$) であり, d_4 は, 散乱波が縦波 ($L1$ -波または $L2$ -波) の場合は単位固体変位に対する流体圧力振幅の逆数を取り (Yamamoto and Kitahara, 2004), 横波 (T -波) の場合は $d_4 = 0$ とする。このベクトル $\mathbf{d}^{\text{sc}}$ と式(24)の両辺

との内積をとり、次のように書く。

$$\begin{aligned} A_I^{q,p}(\hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}})d_I^{\text{sc}} &= \bar{g}_{IK}^q \bar{b}_{KD} d_I^{\text{sc}} \int_D \Gamma(\mathbf{x}) \exp \{i\mathbf{x} \\ &\quad \times (k_p \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} - k_q \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}})\} dV_x \\ &= \bar{g}_{IK}^q \bar{b}_{IK} \int_D \Gamma(\mathbf{x}) \exp \{i\mathbf{x} \cdot (k_p \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} - k_q \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}})\} dV_x \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、行列 $[\bar{b}_{IJ}]$ は、

$$\bar{b}_{IJ} = \bar{b}_{IJ} d_I^{\text{sc}} \quad (29)$$

である。これらの表式から、散乱振幅と散乱体の形状を示す関数 $\Gamma(\mathbf{x})$ が定数 $\bar{g}_{IJ} \bar{b}_{IJ}$ によって線形に関係づけられることがわかる。

3.2 定数項の算出

ここでは、縦波 ($L1, L2$ -波) 入射、縦波 ($L1, L2$ -波) 観測の場合を考えて、行列 $[\bar{b}_{IJ}]$ 及び、定数 $\bar{g}_{IJ} \bar{b}_{IJ}$ の具体的な形を示すことにする。

今、入射波・散乱波双方が縦波の場合には、

$$d_I^{\text{in}} = \hat{\mathbf{p}}_I^{\text{in}}, d_I^{\text{sc}} = \hat{\mathbf{p}}_I^{\text{sc}} \quad (30)$$

が成立する。これらを用いて、式(29)で与えられた $\bar{b}_{IJ}$ を書き直し、 $L1$ -波の場合の基本解の遠方近似 $\bar{g}_{IJ}^{L1}$ を導入すると、 $L1$ -波散乱に関する比例定数 $\bar{g}_{IJ}^{L1} \bar{b}_{IJ}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{g}_{IJ}^{L1} \bar{b}_{IJ} &= -\frac{1}{2\pi(k_{L1}^2 - k_{L2}^2)} \left(\frac{1}{\bar{\rho}\omega^2} \right) (k_{L2_0}^2 - k_{L1}^2) \\ &\quad \times \left[k_{L1_0}^2 \left(\frac{\Delta \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right) (\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}}) u_0 - k_{L1} k_p \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right. \\ &\quad \times \{ \Delta \lambda + 2\Delta \mu (\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}})^2 \} u_0 \\ &\quad \left. - ik_{L1} \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\Delta \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) p_0 \right] \\ &\quad + \left[ik_{L1} k_{L2_0}^2 \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\Delta(1/M)}{1/M} \right) p_0 \right. \\ &\quad \left. - k_{L1}^2 k_Q^2 \left(\frac{\Delta \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) u_0 (\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}}) \right. \\ &\quad \left. - ik_{L1}^3 \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\Delta(1/\tilde{m})}{1/\tilde{m}} \right) p_0 \right] \quad (31) \end{aligned}$$

同様に、観測する波が $L2$ -波の場合には、

$$\begin{aligned} \bar{g}_{IJ}^{L1} \bar{b}_{IJ} &= \frac{1}{2\pi(k_{L1}^2 - k_{L2}^2)} \left(\frac{1}{\bar{\rho}\omega^2} \right) (k_{L2_0}^2 - k_{L2}^2) \\ &\quad \times \left[k_{L1_0}^2 \left(\frac{\Delta \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right) (\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}}) u_0 - k_{L2} k_p \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right. \\ &\quad \times \{ \Delta \lambda + 2\Delta \mu (\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}})^2 \} u_0 \\ &\quad \left. - ik_{L2} \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\Delta \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) p_0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left[ik_{L2} k_{L2_0}^2 \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\Delta(1/M)}{1/M} \right) p_0 \right. \\ &\quad \left. - k_{L2}^2 k_Q^2 \left(\frac{\Delta \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) u_0 (\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}}) \right. \\ &\quad \left. - ik_{L2}^3 \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\Delta(1/\tilde{m})}{1/\tilde{m}} \right) p_0 \right] \quad (32) \end{aligned}$$

が得られる。ここでは、次の波数を用いた。

$$k_{L1_0}^2 = \frac{\bar{\rho}}{\lambda + 2\mu} \omega^2, k_{L2_0}^2 = \frac{\tilde{m}}{M} \omega^2, k_Q^2 = \frac{\tilde{m} \tilde{\alpha}^2}{\lambda + 2\mu} \omega^2 \quad (33)$$

発信器と受信器に同じトランスデューサーを用いる計測法を Pulse-Echo モードといい、受信器に発信器とは別のトランスデューサーを用いて別の方向から計測する手法を Pitch-Catch モードという (Schmerr, 1998)。Pulse-Echo モードの場合には、入射方向と、観測する波の伝播方向が逆向きで

$$\hat{\mathbf{p}}^{\text{sc}} \cdot \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} = -1 \quad (34)$$

の関係が成り立つ。したがって、この場合の定数項 $\bar{g}_{IJ}^{L1} \bar{b}_{IJ}$ 及び $\bar{g}_{IJ}^{L2} \bar{b}_{IJ}$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \bar{g}_{IJ}^{L1} \bar{b}_{IJ} &= -\frac{1}{2\pi(k_{L1}^2 - k_{L2}^2)} \left[- (k_{L2_0}^2 - k_{L1}^2) \right. \\ &\quad \times \left\{ k_{L1_0}^2 \left(\frac{\Delta \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right) u_0 + k_{L1} k_p \left(\frac{\Delta \lambda + 2\Delta \mu}{\lambda + 2\mu} \right) u_0 \right. \\ &\quad \left. + ik_{L1} \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\Delta \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) p_0 \right\} + \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda + 2\mu} \left\{ ik_{L1} k_{L2_0}^2 \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\Delta(1/M)}{1/M} \right) - k_{L1}^3 \left(\frac{\Delta(1/\tilde{m})}{1/\tilde{m}} \right) \left. \right\} p_0 \\ &\quad \left. + k_Q^2 k_{L1}^2 \left(\frac{\Delta \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) u_0 \right] \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{IJ}^{L2} \bar{b}_{IJ} &= \frac{1}{2\pi(k_{L1}^2 - k_{L2}^2)} \left[- (k_{L2_0}^2 - k_{L2}^2) \right. \\ &\quad \times \left\{ k_{L1_0}^2 \left(\frac{\Delta \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right) u_0 + k_{L2} k_p \left(\frac{\Delta \lambda + 2\Delta \mu}{\lambda + 2\mu} \right) u_0 \right. \\ &\quad \left. + ik_{L2} \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\Delta \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) p_0 \right\} + \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda + 2\mu} \left\{ ik_{L2} k_{L2_0}^2 \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\Delta(1/M)}{1/M} \right) - k_{L2}^3 \left(\frac{\Delta(1/\tilde{m})}{1/\tilde{m}} \right) \left. \right\} p_0 \\ &\quad \left. + k_Q^2 k_{L2}^2 \left(\frac{\Delta \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) u_0 \right] \quad (36) \end{aligned}$$

Pulse-Echo モードを用いることで、入射波と散乱波の分離が容易になる。また、散乱波の中のそれぞれの波の成分を分離することは必ずしも容易でないが、先行して到達する $L1$ -波と、後続する T -波、 $L2$ -波の速度差を利用して $L1$ -波の主要部分を分離することは可能である。なお、代表的な砂岩の物性では $L2$ -波の速度は T -波と同程度かより遅くなる。

3.3 逆解析

Born 近似の導入により, 式(28)において散乱体 D^c の拡がり $\mathbf{A}^q$ が線形に結ばれた。この式を, 角周波数 ω を陽な形で引数に置いて書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned} A_K^{qp}(\hat{\mathbf{p}}^{sc}, \omega) d_K^{sc} \\ = \int_D \bar{g}_{IJ}^q \bar{b}_{IJ} \Gamma(\mathbf{x}) \exp[-is\omega \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}] dV_x \\ = \int_D \bar{g}_{IJ}^q \bar{b}_{IJ} \Gamma(\mathbf{x}) \exp[-i \operatorname{Re}(s) \omega \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}] \\ \times \exp[i \operatorname{Im}(s) \omega \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}] dV_x \end{aligned} \quad (37)$$

ここで, $s\omega \hat{\mathbf{p}} = k_q \hat{\mathbf{p}}^{sc} - k_p \hat{\mathbf{p}}^{in}$, また k_p は入射波の波数である。この形に書き改めると, 右辺の未知量は散乱体の拡がりを示す $\Gamma(\mathbf{x})$ のみとなる。

式(37)が Fourier 変換 $F(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ に類似した形をしていることから, 逆 Fourier 変換 $f(\mathbf{x}) = 1/(2\pi)^3 \int F(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}$ を利用して $\Gamma(\mathbf{x})$ を求めることができる。

散逸がない ($b=0$) 場合は波数の虚部 $\operatorname{Im}(s)=0$ であるため, 式(37)は Fourier 変換そのものである。入射波及び散乱波がともに $L1$ -波または T -波である場合は, 虚部は実部に比べて十分小さいので, 散逸の影響は通常無視できる。したがって, 逆 Fourier 変換:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \oint_{\Theta} \int_0^\infty \frac{A_K^{qp}(\hat{\mathbf{p}}^{sc}, \omega) \cdot d_K^{sc}}{\bar{g}_{IJ}^q \bar{b}_{IJ}} \exp[is\omega \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}] \\ \times d\omega d\Theta(\hat{\mathbf{p}}^{sc}) \end{aligned} \quad (38)$$

によって $\Gamma(\mathbf{x})$ を定め, 形状を再構成することができる。ここで, $d\Theta$ は微小立体角を示す。

しかし, 入射波または散乱波のいずれか, または両方が $L2$ -波の場合は, 波数虚部が無視できないので, 式(37)は Fourier 変換の形から大きくはずれる。入射波の散逸は小さいが, 散乱波の散逸が大きい場合を考えると, 実際に観測できる散乱波振幅は散逸の影響が含まれて $A^{qp} \exp[-\operatorname{Im}(k_q)r]$ となり, 虚部の影響はこの指数部分に集約できるので, 散乱波逆解析の式を次式で表すことにする。

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \oint_{\Theta} \int_0^\infty \frac{A_K^{qp}(\hat{\mathbf{p}}^{sc}, \omega) \cdot d_K^{sc}}{\bar{g}_{IJ}^q \bar{b}_{IJ}} \\ \times \exp[i \operatorname{Re}(s) \omega \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}] \\ \times \exp[-\operatorname{Im}(k_q)r] d\omega d\Theta(\hat{\mathbf{p}}^{sc}) \end{aligned} \quad (39)$$

式(39)は, $L1$ -波または T -波の入射による $L2$ -波の散乱を観測した場合に適用される。また, この式は空間内の積分に $\exp[-\operatorname{Im}(k_q)r]$ のウィンドウを与えていることに対応するので, 各周波数で, 波が散逸する以前の中心から一波長分の範囲を計算対象としているとも言える。

以上により, 各方位・各周波数の散乱振幅 $A^q(\hat{\mathbf{p}}^{sc}, \omega)$ を観測すれば, 散乱体の拡がり $\Gamma(\mathbf{x})$ を知ることがで

きる。

4. 数値解析で得られた散乱振幅による形状再構成の事例

4.1 解析モデル

多孔質体中の散乱体の形状を散乱場から求めることが可能であることを数値的に示すために, 数値解析で求めた散乱振幅を用いて形状再構成を試みる。散乱振幅は境界要素法を利用して得られる (Yamamoto and Kitahara, 2003; Yamamoto and Kitahara, 2004)。

散乱体としては, 多孔質弾性体内のキャビティ, 及び多孔質弾性体内の一定の領域の間隙流体が別の流体で置き換えられた状態を想定して, 固体骨格部の物性は変化せず, その領域の間隙流体の圧縮性のみが周囲と異なるインクルージョンがある場合を考える。多孔質弾性体の4種類ある弾性定数のうち流体の圧縮性が影響するのは Biot の弾性係数 M のみであり, 次のように書くことができる (Stoll and Bryan, 1970)。

$$M = \frac{K_s^2}{K_s \left\{ 1 + \beta \left(\frac{K_s}{K_f} - 1 \right) \right\}} - K \quad (40)$$

ここで K , K_s 及び K_f はそれぞれ固体骨格, 骨格構成粒子, 及び間隙流体の体積弾性係数であり, 構成粒子の圧縮性と骨格構造の圧縮性が大きく異なる ($K_s \gg K$) 場合は,

$$M = \frac{K_f}{\beta} \quad (41)$$

と近似することができる。そのため, 砂岩のようなポラスな地層では M は主として間隙流体の圧縮性によって定まると言える。したがって, ここでは地層内で間隙流体の相・成分が異なる領域を, M が周囲 (母材) と異なる領域として扱うことにする。

母材の物性値は, **Table 1** に示した数値を用いる。これらの値は, Detournay and Cheng (1993) に示されている各種砂岩の物性値を参考にして定めた。母材の間隙は水で飽和した状態であると考え, インクルージョンの問題ではその一部で間隙流体の体積弾性係数が母材の M の10%になった状態 ($\Delta M = -0.9M$) であると考ええる。

散乱体形状は, 半径1mの球, 半径が1mの短軸が回転軸で長軸半径が1.5mである扁平楕円体 (flat ellipsoid), または半径1.5mの長軸を回転軸とし短軸の半径が1mである長楕円体 (long ellipsoid) のいずれかとし, **Fig. 2** に示すように, Pulse-Echo モードで散乱波を捉えた状態をシミュレートする。ここで, 回転軸を x_3 軸とし, 回転軸からの角度を天頂角 θ と呼ぶことにする。

送信する波の種類は $L1$ -波であり, 受信する波は $L1$ -

波または L_2 -波のいずれかとする。

4.2 再構成の結果

はじめにインクルージョンの問題を考える。送受信する波はともに L_1 -波であり、使用する角周波数 ω は $2 \text{ krad/sec} \sim 8 \text{ krad/sec}$ の範囲とする。これは、波長としては 7.1 m から 1.8 m の範囲に対応し、散乱体の代表長 $a = 1 \text{ m}$ によって無次元化された波数 $a\text{Re}(k_{L1})$ の範囲では $0.66 < a\text{Re}(k_{L1}) < 2.64$ となる。ここでは散逸がない ($b = 0$) の場合の散乱振幅を用いた。また、観測は散乱体の全周で行う。

Fig. 3 及び **Fig. 4** に、扁平楕円体型及び長楕円体型散乱体の再構成像を示す。これらの図では、回転軸を

Table 1. Poroelastic parameters used in this paper

Symbols	Definition	Value
ρ	Bulk density	$\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$
ρ_f	Fluid density	$\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$
μ, λ	Lamé constants	$\mu = \lambda = 5.0 \text{ GPa}$
α	Biot's constant	$\alpha = 1.0$
β	Porosity	$\beta = 0.2$
M	Biot's modulus	$M = 12.5 \text{ GPa}$
b	Dissipation factor*	$b = 1 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$

Dissipation factor b is determined by following equation:
 $b = \eta/k$ where k : permeability $= 1 \times 10^{-12} \text{ m}^2$, η : fluid viscosity $= 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{sec}$.

Fig. 2 Configuration of simulated Pulse-Echo mode measurement.

む平面内における式 (39) の $\Gamma(\mathbf{x})$ の二次元面内及び三次元の分布と、 $\Gamma(\mathbf{x})$ がピークの値の半分の値となる面で囲んだ再構成像を表示している。また、図中の点線は散乱体の真の形状を示している。これらの図から、いずれの形状においてもほぼ真の形状に近い再構成像が得られており、ここで用いた比較的狭い周波数レンジの情報を元にしても、間隙流体の物性のみが周囲と異なる場合の形状再構成が弾性体と同様に可能であることが示された。

4.3 不完全なデータによる再構成像

現実の計測においては、散乱体の全周で波を送受信することは難しいと考えられる。また、使用できる周波数の範囲も送受信器の能力やノイズの問題から制約を受ける。このような限られた情報による逆問題は Limited aperture problem と呼ばれるが、これらのデータの不完全性が再構成像に与える影響を調べるため、式 (39) における空間域及び周波数域の積分範囲と再構成像との関係を調べる。

4.3.1 不完全な空間データによる再構成像

送受信器の設置できる場所が限られた状態を模擬して、空間域の積分範囲を限定しての再構成像を得た。ここでの計算条件は前節と同じである。

Fig. 5 は、天頂方向（図内の上方）で、天頂角 θ が $0 \leq \theta \leq 30^\circ$, $0 \leq \theta \leq 60^\circ$, $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲のみから送受信された場合の再構成 (x_3 - x_1 平面内の $\Gamma(\mathbf{x})$ の分布) である。積分範囲が広がるほどより実物に近い再構成像が得られるが、上半全体 ($\theta \leq 90^\circ$) のデータを使えば実質的に散乱体の拡がりを正確に捉えることができると言える。

一方、**Fig. 6** は、対称軸を取り囲むように側面から送受信して、天頂方向のデータが無い場合の再構成像であり、 $60^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$, $30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$, $10^\circ \leq \theta \leq 170^\circ$ の三つのケースについて示している。この場合は、前のケースよりも再構成像の精度が情報の欠落に敏感である。

いずれのケースでも計測範囲に面していない方向では再構成像が不明確になるが、このような比較的単純な形状の問題では使用するデータの空間内の一部が失われても、おおまかな広がりには依然捉えられていることがわかる。しかし、正確な再構成を行うには、対象の形状を特徴付ける軸方向のデータが揃っている必要がある。

4.3.2 周波数帯域と再構成精度

これまでは比較的狭い周波数レンジを使用しても一定の再構成像が得られることを示したが、ここでは得られた再構成像の精度と周波数の関係をやや定量的に示す。

ここでは半径 1 m の球形のキャビティを対象として、 L_1 -波を送受信する場合を考える。キャビティのモデルは、すべての多孔質弾性パラメータについて、 $\Delta\phi = -\phi$ であるとして再構成像を求めた。積分する角周波数 ω の範囲は、下限を 0.2 krad/sec のまま上限を 20 krad/

Fig. 3 Reconstructed image of a flat ellipsoid, $\Delta M = -0.9M$.

sec まで変化させる。この時の各周波数における散乱振幅を Fig. 7 に示す。この時の無次元化波数は $0.0897 \leq a\text{Re}(k_{L1}) \leq 8.97$ の範囲である。 $a\text{Re}(k_{L1}) < 1$ の範囲で散乱振幅は単調増加するが、それ以上の周波数では幾つかのピーク周波数を持って変化する。

再構成の周波数依存性は Fig. 8 に示す。ここでは、 x -軸上の $\Gamma(x)$ の分布を示しており、真の値は太実線で示されるように $|x| < 1$ では $\Gamma(x) = 1$ 、それ以外では 0 となる。

再構成されるべき $\Gamma(x)$ に比べると、最高周波数が 16 krad/sec までは、高周波のデータまで使用した結果の方が、階段関数状である本来の $\Gamma(x)$ に近いことが

Fig. 4 Reconstructed image of a long ellipsoid, $\Delta M = -0.9M$.

わかる。したがってより高い周波数まで利用すれば精度は向上すると考えられるが、20 krad/sec までとるとむしろ誤差が拡大している。これは、周波数が高すぎると Born 近似が成立しなくなることが一つの理由と考えられる。また、低周波のみを使用した場合も、散乱体のおおまかな広がりは示されているといえる。

4.4 散逸の影響がある場合-遅い縦波の受信

これまでの例では、散逸の影響が小さい $L1$ -波の入射及び散乱による形状再構成の例を見てきたが、ここでは散逸の影響が大きく現れる遅い縦波である $L2$ -波の散乱を観測する場合の形状再構成の事例を見る。入射波はこ

Fig. 5 Reconstructed image of a flat ellipsoid by the data of upper spaces ($\Gamma(\mathbf{x})$ distribution in x_3 - x_1 plane).

れまでと同じく L_1 -波である。

ここでは回転楕円体のキャビティの問題を考える。使用した角周波数は 0.2 krad/sec から 16 krad/sec で、キャビティの代表長 $a=1 \text{ m}$ によって無次元化された波数で示すと、 L_1 -波については、 $0.066 \leq a\text{Re}(k_{L1}) \leq 5.26$, $7.28 \times 10^{-6} \leq a\text{Im}(k_{L1}) \leq 1.33 \times 10^{-2}$, L_2 -波については、 $0.775 \leq a\text{Re}(k_{L2}) \leq 13.7$, $0.757 \leq a\text{Im}(k_{L2}) \leq 3.41$ である。Biot のモデルでは、散逸の効果は散逸定数 b に関する臨界周波数 $\omega_c = b\beta/\rho_f$ (Biot, 1956) より低い範囲で顕著となるが、ここでは ω_c は周波数の上限と下限のほぼ中間に当たる 8 krad/sec であり、これより高

Fig. 6 Reconstructed image of a flat ellipsoid by the data around the symmetric axis ($\Gamma(\mathbf{x})$ distribution in x_3 - x_1 plane).

い周波数域を使用した場合（高周波数域, $\omega \geq \omega_c$ ）、低い周波数域を使用した場合（低周波数域, $\omega \leq \omega_c$ ）のそれぞれについて再構成像を求めることにする。

再構成された平面楕円体及び長楕円体の像を **Fig. 9** 及び **Fig. 10** に示す。それぞれの図において、高周波数域を利用した場合と低周波数域を利用した場合のそれぞれの像を図示している。この結果から、散逸が無視できない場合では入射波・散乱波ともに L_1 -波の場合と比べると実際の形状との差が大きいが、おおまかな広がり

Fig. 7 Scattering amplitude of L1-and L2-wave scattering ($A^{L1;L1}$, $A^{L2;L1}$) in each frequency. Spherical cavity case.

Fig. 8 Dependency of the reconstructed image on used frequency range ($\Gamma(x)$ distribution on x_1 -axis).

形状が計算されていることがわかる。ただし、長楕円体で高周波成分のみを使った場合、低周波と同じ $\Gamma(x)$ の値の点を結ぶ面で作成した再構成像は元の形状とは大きく異なり、高い誤差のピークが生じる中心付近にしか値が現われないため、より小さな値に修正して表示している。このように、 $\Gamma(x)$ の閾値の設定により再構成像が任意性を持つことは本手法の一つの問題点といえる。

なお、臨界周波数より高い周波数を用いる方が散逸の影響は小さいが、一方で高周波では波長が短くなるため低周波近似が成り立たなくなり、特に音速の遅い L2-波の波長は入射波の L1-波に比べて短いため、誤差の要因となりやすいと考えられる。そのため、高周波と低周波いずれが有利かは一概には言えない。

実際には L2-波は減衰が大きい計測が難しく、また先に到達する L1-波から L2-波のみを分離することは困難なので、実用上この波が形状再構成に用いられることは考えにくい。ここで示した数値例によって、散逸の影響があっても形状再構成が可能であることが示された。

5. まとめと課題

領域型積分を用いた散乱振幅の表現と Born 近似を用いた逆解析手法により、形状の再構成が Biot の飽和多孔質体中でも実現できることを、数値計算による散乱振幅を用いて示した。この手法では、比較的狭い周波数レンジの散乱振幅のデータでも一定の精度で形状を再現できること、及び計測データの得られる方向が限られていても、ある程度散乱体の広がりを捉えることができることを示した。

本手法は、比較的low周波の弾性波を用いるため、送信のパワーを大きくできる、空間内の小さなスケールの不均質性の影響を受けにくい等の利点がある。数値計算上は、一般の逆解析で生じる、解の一意性が保証されないことや、収束性と得られる解が初期値に依存すること、また一般的に収束までの時間が膨大になりうることなどの問題を解決することができる。

一方で、本手法の基盤となっている、均質な場における弱い散乱体の仮定が現実の不均質な材料に適用できるのかという課題が存在する。この問題については、定式化と計測データの処理の両方のアプローチで解決することが必要であるが、Nakahata and Kitahara (2000) は完全反射面からの反射を参照波としてそれと計測した波の差から散乱波の成分を抽出することで媒質の影響を取り除く手法を開発し、この手法で不均質なコンクリート中の散乱体の形状を再構成することに成功している(山田ら, 2003)。さらに、参照波を均質材料から擬似的に作成するデータ処理手法も適用されて成功している(山田ら, 2004)。このように、対象散乱体サイズよりも小さなスケールの不均質部については、低周波近似の有利性から、データ処理法の向上により解決可能と思われる。しかし、地層境界の存在のようなより大きなスケールの不均質性については、均質な媒質中の散乱体という前提が崩れるため、データ処理のみでは対処できず、定式化を含めた今後の検討が必要である。

ここで示した数値計算例によって、二酸化炭素の地中隔離、ガス攻法等による EOR、メタンハイドレートの分解領域など、間隙流体の挙動が主たる関心である場合の探査・モニタリングに本手法が適用できる可能性が示された。多孔質体への適用という観点では、実際の地層の岩石に対する Biot モデルの適用性の検証も課題である。

今後、定式化と数値計算技術に加えて、計測技術及びデータ処理手法の向上をはかり、本手法がより現実の材

Fig. 9 Reconstructed image by the scattering amplitude of L_2 -wave. A flat ellipsoide (Isopleth surface on which $\Gamma(\mathbf{x})$ is 10% of their peak values).

料，現実の場の問題に適用できるものとなるように研究を進めたい。

謝 辞

本研究においては，東京工業大学大学院情報理工学研究科の廣瀬壯一教授，愛媛大学工学研究科の中畑和之講師，東北大学大学院工学研究科の岸野祐次教授，寺田賢二郎助教授，山田真幸助手のご指導をいただきました。ここに感謝申し上げます。また本論文の共著者である東北大学大学院工学研究科の北原道弘教授は2003年11月に逝去されました。ここに先生のご冥福をお祈りするとともに，御家族に哀悼の意を表します。また，匿名の二名の査読者より有益なご示唆をいただきました。重ねて感謝します。

Fig. 10 Reconstructed image by the scattering amplitude of L_2 -wave. A long ellipsoide (Isopleth surface on which $\Gamma(\mathbf{x})$ is 10% (low frequency) and 3% (high frequency) of their peak values).

参 考 文 献

- Bauer, K., Pratt, R. G., Weber M., Ryberg, T., Haberland, C. and Shimizu, S. (2004) : Mallik 2002 cross-well seismic experiment: project design, data acquisition, and modelling studies, Dallimore, S. R. and Collett, T. S. eds. *Scientific Results from the Mallik 2002 Gas Hydrate Production Research Well Program, Mackenzie Delta, Northwest Territories, Canada*, Geological Survey of Canada Bulletin 585.
- Biot, M. A. (1956) : Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 168-178.
- and Willis, D. G. (1957) : The elastic coefficients of the theory of consolidation, *J. Appl. Mech.*, **24**, 594-601.
- (1962) : Mechanism of deformation and acoustic propagation in Porous Media, *J. Appl. Phys.*, **33**, 1482-1498.
- Cheng, A. H.-D., Badmus, T. & Beskos, E. (1991) : Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution, *J. Eng. Mech. ASCE*, **117**, 1136-1157.
- Detournay, E. and Cheng, A. H.-D. (1993) : Fundamental poroelasticity, *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice, and Projects*, Vol. 2 Analysis and Design

- Methods*, eds. C. Fairhurst, 113-171, Pergamon Press, Oxford.
- Dominguez, J. (1992): Boundary element approach for dynamic poroelastic problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **35**, 307-324.
- 福井卓雄・船戸慶輔・井上耕一 (1996): Biot 物体中における波動問題の周波数領域境界要素法解析, 境界要素法論文集, JASCOM, **13**, 149-152.
- Hsu, D. K., Rose, J. H. and Thompson, D. O. (1984): Reconstruction of inclusions in solids using ultrasonic Born inversion, *J. Appl. Phys.*, **55**, 162-168.
- Kitahara, M. and Hirose, S. (1998): Elastodynamic inversion of 3D cavity from backscattering data, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Elsevier, 163-170.
- , Nakahata, K. and Hirose, S. (2002): Elastodynamic inversion for shape reconstruction and type classification of flaws, *Wave Motion*, **36**, 443-455.
- 狐崎長琅 (2004): 管の波からみた流体飽和多孔質媒質の縦波弾性波 (2004): Biot 理論の単純化モデル, 物理探査, **57**, 151-172.
- LaPorte, M., Lakshmanan, J., Lavergne, M. and Willim, C. (1973): Seismic measurements by transmission-application to civil engineering, *Geophys. Prosp.*, **21**, 146-158.
- 宮腰寛之・山田真幸 (2005): 計測波形を用いた三次元線形化逆散乱解析による任意形状欠陥の再構成, 第54回理論応用力学講演会講演論文集, 日本学会議, 83-84.
- Nakahata, K. and Kitahara, M. (2000): Shape reconstruction methods with incomplete data, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, **27**, 919-926.
- Nur, A. M. and Wang, Z. (1987): In situ seismic monitoring EOR: The petrophysical basis. SPE16865, *Proc. 62nd Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers*, Dallas, TX, 307-314.
- 大下敏哉 (2002): 枯渇油・ガス田の有効利用, 石油技術協会誌, **67**, 538-546.
- Pratt, R. G. & Worthington (1990): Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part 1: Acoustic wave-equation method, *Geophys. Prosp.*, **38**, 287-310.
- (1999): Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model, *Geophysics*, **64**, 888-901.
- Rose, J. H. and Opsal, J. L. (1982): Inversion of ultrasonic scattering data, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, **1**, 187-195.
- (1984): Exterior reconstruction of a three-dimensional scatterer, *Wave Motion*, **8**, 149-154.
- Schmerr, L. W., Sedov, A. and Chiou, C. P. (1989): A unified constrained inversion model for ultrasonic flaw sizing, *Res. Nondestr. Eval.*, **1**, 77-97.
- (1998): *Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation - A Modeling Approach*, Plenum Press, New York.
- Stoll, R. D. and Bryan, G. M. (1970): Wave attenuation in saturated sediments, *J. Acoust. Soc. Am.*, **5**, 1440-1447.
- 山田真幸・村上賢治・中畑和幸・北原道弘 (2003): 円柱側面からの計測波形による三次元欠陥像の再構成, 応用力学論文集, 土木学会, **6**, 69-76.
- ・大西正浩・北原道弘 (2004): 線形化逆解析法による非均質材料内の欠陥形状再構成, 応用力学論文集, 土木学会, **7**, 83-90.
- Yamamoto, K. and Kitahara, M. (2003): Characterization of scatterers in poroelastic media using far field integral representation, *Proc. 16th Engineering Mechanics Conference*, ASCE, Seattle, Washington.
- and Kitahara, M. (2004): A numerical method for wave scattering in poroelastic media, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, JSCE, **21**, 143s-158s.
- 横田俊之・西田明夫・溝畑茂治・島田伸介・村岡直 (2003): 石油 EOR における貯留層内流体挙動の把握—初動走時トモグラフィーを用いたモニタリング—, 物理探査, **56**, 181-189.

補遺-1: 多孔質弾性体の基本解

基本解 $[G_{IJ}]$ の具体的表現:

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_T r}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_{L1}^2 - k_{L2}^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{k_{L1}^2 - k_{L2}^2}{k_T^2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_{L1} r}}{r} \right) - \frac{k_{L1}^2 - k_{L2}^2}{k_T^2} \left(\frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_{L2} r}}{r} \right) \right\} \right] \quad (42)$$

$$G_{i4} = -\frac{k_Q^2}{4\pi\tilde{\alpha}} \frac{1}{k_{L1}^2 - k_{L2}^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{e^{ik_{L1} r}}{r} - \frac{e^{ik_{L2} r}}{r} \right) \quad (43)$$

$$G_{4j} = \frac{k_Q^2}{4\pi\tilde{\alpha}} \frac{1}{k_{L1}^2 - k_{L2}^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{e^{ik_{L1} r}}{r} - \frac{e^{ik_{L2} r}}{r} \right) \quad (44)$$

$$G_{44} = -\frac{M}{4\pi} \frac{k_{L2}^2}{k_{L1}^2 - k_{L2}^2} \left\{ (k_{L1}^2 - k_{L2}^2) \frac{e^{ik_{L1} r}}{r} - (k_{L1}^2 - k_{L2}^2) \frac{e^{ik_{L2} r}}{r} \right\} \quad (45)$$

補遺-2: 基本解の遠方表現

基本解の遠方表現 $[\tilde{g}_{IJ}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}})]$ の具体的表現:

$$[\tilde{g}_{ij}^T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\mu} \{ \delta_{ij} + k_T^2 (\hat{y}_i \hat{y}_j) \} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-ik_T \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{y}}} \quad (46)$$

$$[\tilde{g}_{ij}^{L1}] = \frac{1}{k_{L1}^2 - k_{L2}^2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{k_{L1}^2 (k_{L1}^2 - k_{L2}^2)}{k_T^2} (\hat{y}_i \hat{y}_j) \\ \frac{k_Q^2}{4\pi\tilde{\alpha}} ik_{L1} (\hat{y}_j) \\ -\frac{k_Q^2}{4\pi\tilde{\alpha}} ik_{L1} (\hat{y}_i) \\ -\frac{M}{4\pi} \frac{k_{L2}^2 (k_{L1}^2 - k_{L2}^2)}{k_{L1}^2 - k_{L2}^2} \end{bmatrix} e^{-ik_{L1} \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{y}}} \quad (47)$$

$$[\tilde{g}_{ij}^{L2}] = \frac{1}{k_{L1}^2 - k_{L2}^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\mu} \frac{k_{L2}^2 (k_{L1}^2 - k_{L2}^2)}{k_T^2} (\hat{y}_i \hat{y}_j) \\ -\frac{k_Q^2}{4\pi\tilde{\alpha}} ik_{L2} (\hat{y}_j) \\ \frac{k_Q^2}{4\pi\tilde{\alpha}} ik_{L2} (\hat{y}_i) \\ \frac{M}{4\pi} \frac{k_{L2}^2 (k_{L1}^2 - k_{L2}^2)}{k_{L1}^2 - k_{L2}^2} \end{bmatrix} e^{-ik_{L2} \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{y}}} \quad (48)$$