サブスペース法による比抵抗法三次元インバージョン

佐々木 裕*

要 旨

比抵抗法三次元インバージョンでは、解析領域の三次元化に伴いパラメータ数が非常に多くなるので、未知パラメータに係わる方程式が大規模となり、それを解くための計算時間が増大する。この問題を解決する1つの方法がサブスペース法である。サブスペース法は、パラメータの修正量を基底ベクトルと未知係数の線形結合で表し、パラメータ数よりも少ない数の未知係数を求めることにより計算の高速化を図る手法である。基底ベクトル数がパラメータ数に比べて少ないほど計算時間を短縮できる。しかし、サブスペース法が実際にうまく行くかどうかは、いかに逆問題に適合した基底ベクトルを選ぶかにかかっている。本論文では基底ベクトルとして、ラプラシアン・オペレータの逆行列で前処理した感度ベクトルを採用した。二極、三極、ダイポール・ダイポール法のいずれの電極配置でも、サブスペース法によるインバージョン結果は従来法の結果とほとんど差がなく、計算時間は従来法の数分の1に短縮できることを数値実験により確認した。

キーワード：サブスペース法・基底ベクトル・三次元インバージョン・比抵抗

1. はじめに

比抵抗法三次元インバージョンに関する研究は1990年代に盛んに行われ（たとえば Park and Van, 1991；神谷・島, 1994；Sasaki, 1994；杉本・井上, 1998）、基本的な方法論はそのころほぼ完成したといえる。その当時は、小規模な三次元インバージョンでも高価な高性能コンピュータを必要とし、インバージョンの計算規模はその時々コンピュータの能力に合わせて決めざるを得なかった。その後コンピュータの能力が飛躍的に向上したことに伴い、現在ではパソコンで三次元インバージョンを手軽に実施できる環境が整っている。とはいえ、計算に数日を要することもあるので、計算の高速化は依然として重要な課題である。

大規模な三次元インバージョンでは、フォワード計算が増大するだけでなく、モデル・パラメータ数の増加に伴い、未知パラメータに係わる方程式を解くための計算時間が増大する。これを短縮するための1つの方法がサブスペース法である (Kennett et al., 1987)。サブスペース法は、パラメータの修正量を基底ベクトルと未知係数の線形結合で表し、パラメータ数よりも少ない数の未知係数を求めることにより計算の高速化を図る手法で

ある。基底ベクトルの数がパラメータ数に比べて少ないほど計算時間を短縮できる。しかし、サブスペース法が実際にうまく行くかどうかは、いかに逆問題に適合した基底ベクトルを選ぶかにかかっている。Oldenburg et al. (1993) は、目的関数の勾配および前処理した勾配からなる様々な基底ベクトルの組み合わせを示し、比抵抗法二次元インバージョンの数値実験により有効性を比較評価している。本論文では、サブスペース法の比抵抗法三次元インバージョンへの適用性を数値実験により検討する。

2. 理 論

2.1 最小自乗インバージョン

比抵抗法探査によって得られた N 個のデータを列ベクトル $\mathbf{d}$, M 個のモデル・パラメータを $\mathbf{m}$, モデルの理論応答を $\mathbf{F}(\mathbf{m})$ と表すと、測定データに最も良く当てはまるモデルは、残差自乗和

$$\phi_d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{d} - \mathbf{F}(\mathbf{m})\|^2 \quad (1)$$

を最小化する $\mathbf{m}$ で与えられる。しかし、 $\mathbf{F}(\mathbf{m})$ は非線形であり、 ϕ_d を最小化する $\mathbf{m}$ は無数に存在する可能性がある。インバージョンの目的は、測定データを最も良く

2005年11月9日原稿受付；2006年9月22日受理

* 九州大学大学院工学研究院
〒819-0395 福岡市西区元岡744番地

©2006 SEGJ

再現できるだけでなく、地質的にも解釈が可能なモデルを見出すことである。そのためには先験的情報に基づく拘束条件を加えることが必要である (Constable et al., 1987)。そこで最小化すべき目的関数を

$$\Phi \equiv \phi_d + \lambda^2 \phi_m \\ = \|\mathbf{d} - \mathbf{F}(\mathbf{m})\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{Cm}\|^2 \quad (2)$$

とする。 ϕ_m はモデルの粗さを表している。 $\mathbf{C}$ はラプラシアン (2次微分)・オペレータであり、 λ はラグランジェ未定乗数 (正則化パラメータ) である。

Φ は $\mathbf{m}$ に関して非線形であるから、最小化するためには反復が必要である。初期値 $\mathbf{m}^{(0)}$ を与えて $\mathbf{F}(\mathbf{m})$ を初期値の近傍で線形化すると Φ は

$$\Phi = \|\Delta \mathbf{d} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{m}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{C}(\mathbf{m}^{(0)} + \Delta \mathbf{m})\|^2 \quad (3)$$

となる。ここで $\mathbf{A}$ は初期値 $\mathbf{m}^{(0)}$ における $N \times M$ の感度行列、 $\Delta \mathbf{m}$ は初期値に対する修正量を表し、 $\Delta \mathbf{d}$ はデータ残差

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{F}(\mathbf{m}^{(0)}) \quad (4)$$

である。 Φ を $\Delta \mathbf{m}$ に関して微分して、最小化の条件 $\partial \Phi / \partial \Delta \mathbf{m}_j = 0$ を考慮すると、正規方程式

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \Delta \mathbf{m} = \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{d} - \lambda^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{m}^{(0)} \quad (5)$$

を得る。ここで添字 T は行列の転置を表す。(5) 式は次元 M の連立一次方程式であり、これから $\Delta \mathbf{m}$ を求めることができる。しかし、実際の数値計算では正規方程式を経由しない方法が一般に用いられ、その方が計算精度は高いことが知られている (中川・小柳, 1982)。(5) 式を解くことは次式の最小自乗解を求めることと同じである。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \lambda \mathbf{C} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ -\lambda \mathbf{C} \mathbf{m}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

(6) 式の左辺の係数行列は $(N+M) \times M$ の長方形列である。(6) 式の解法としては修正 Gram-Schmidt 法や Householder 法による係数行列の QR 分解や、特異値分解法などがある。本論文では修正 Gram-Schmidt 法を用いている。(6) 式によるモデルの反復改良は、データ残差が適切なレベルに収束するまで行われる。収束の判定のため、rms 平均残差

$$R = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln \rho_{ai} - \ln \rho_{ai}^p)^2} \quad (7)$$

を定義することができる。ここで ρ_{ai} は見掛け抵抗の観測値、 ρ_{ai}^p は理論値を表す。反復が進んで観測値と理論値の差が小さくなったとき、 R は観測値の理論値に対する平均相対誤差を表す。従って、例えばデータに標準偏差 3% の正規分布ノイズが含まれているとすると、正しいモデルの rms 平均残差は 0.03 となる。

2.2 サブスペース法

サブスペース法では、 q 個の基底ベクトル $\{\mathbf{v}_i, i=1, \dots, q\}$ を用いて未知パラメータ修正量 $\Delta \mathbf{m}$ を次式で表す。

$$\Delta \mathbf{m} = \sum_{i=1}^q \alpha_i \mathbf{v}_i \equiv \mathbf{V} \bar{\alpha} \quad (8)$$

ここで $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q]$ は $M \times q$ 行列、 $\bar{\alpha}$ は q 個の未知係数 α_i から成る列ベクトルである。(8) 式を (6) 式に代入すると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{V} \\ \lambda \mathbf{C} \mathbf{V} \end{bmatrix} \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ -\lambda \mathbf{C} \mathbf{m}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

となり、求めるべき未知数の数は q となる。 q が M に比べて小さいほど計算時間を短縮できる。

基底ベクトルとしては、目的関数をいくつかの構成要素に分割したときの各要素の勾配、あるいはそれらを前処理したものが用いられる。 ϕ_d を個々のデータにまで分割し

$$\phi_d^i = [d_i - F_i(\mathbf{m})]^2 \quad i=1, \dots, N \quad (10)$$

と表すと、その勾配 $\nabla \phi_d^i$ は

$$\nabla \phi_d^i = 2[d_i - F_i(\mathbf{m})] \mathbf{a}_i^T \quad (11)$$

となる。ここで $\mathbf{a}_i$ は感度行列 $\mathbf{A}$ の第 i 番目の行ベクトルを表す。さらに定数を 1 とすると勾配は $\mathbf{a}_i^T$ となる (以下、感度ベクトルと呼ぶ)。Oldenburg et al. (1993) によれば、目的関数の勾配に $(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1}$ をかけると最急上昇方向を示すベクトルが得られることから、前処理としてこの逆行列が優れている。しかし、数値実験によると、 $\mathbf{C}$ がラプラシアン・オペレータの場合は、この前処理は有効ではなく、 $\mathbf{C}$ そのものの逆行列を用いることができる。すなわち、基底ベクトルを

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_i^T \quad i=1, \dots, N \quad (12)$$

とすることができる。この理由はよくわからない。 $\mathbf{C}$ が 1 次差分オペレータの場合は $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ はほぼラプラシアン・オペレータになることを考えると、 $\mathbf{C}$ がすでにラプラシアン・オペレータの場合には $(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1}$ をかけると感度ベクトルの平滑化が過度に行われるためかもしれない。

行列 $\mathbf{C}$ の 1 行あたりの非零成分数は最大 7 個と少ないので、 $\mathbf{C}$ の逆行列を直接求めるよりも

$$\mathbf{C} \mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i^T \quad i=1, \dots, N \quad (13)$$

を共役勾配法等の反復法により N 回解く方が計算時間は遥かに少ない。このような連立一次方程式は厳密に解く必要はなく、残差がある程度小さくなれば反復を打ち切ることができる (Oldenburg et al., 1993)。なお、 $\mathbf{C}$ は厳密には対称行列ではないが、対称とみなして反復法を適用する。(13) 式により求められる基底ベクトルの他に、定数からなるベクトルを加える。基底ベクトル数

が特に小さい場合、この定数ベクトルを加えることにより収束が良くなることがある。

3. 数値実験

実験に用いたモデルを Fig. 1 に示す。このモデルの特徴は平行な 2 本の断層と 3 本の脈が測線と斜交していることである。断層によって比抵抗は左側から 500 Ωm , 100 Ωm , 500 Ωm の 3 領域に区分される。脈の比抵抗はいずれも 10 Ωm , その潜頭深度は 10 m である。測線は長さが 300 m で、40 m の間隔で 3 本配置されている。有限要素法により作成した見掛け比抵抗データには標準偏差 3% の正規分布ノイズを加えた。三次元インバージョンでは、ブロック数（未知パラメータ数）を 8640 ($64 \times 15 \times 9$) とし、初期モデルは 400 Ωm の均質媒質、

Fig. 1 3-D resistivity model used to generate the synthetic data. (a) Horizontal section at a depth below 10 m from the surface. (b) Vertical section at $Y=0$. Electrode locations along three traverses are indicated by plus symbols.

反復回数は 7 回とした。フォワード計算に用いた節点数は 105,825 ($83 \times 51 \times 25$) である。計算はすべてパソコン (Petium4, 3.2 GHz, 2 GB メモリ) で行った。

3.1 二極法

最小の電極間隔を 10 m, 最大を 100 m とした。1 測線あたりのデータ数は 255, 3 測線合計のデータ数は 765 である。サブスペース法と従来法によるインバージョンの結果を Fig. 2 に示す。各図の第 1 段と 2 段はそれぞれ深度 15 m と 40 m における水平断面図, 第 3 段は $Y=0$ における垂直断面図である。2 つの結果を比べると実質的にほとんど差がない。サブスペース法と従来法による反復 7 回目の rms 平均残差はそれぞれ 0.033 と 0.032 であり、ともにノイズの標準偏差にほぼ収束している (Fig. 3)。一方, Table 1 により計算時間を比較すると、従来法による全計算時間は 14 時間 31 分である

Fig. 3 Plots of rms data misfit versus iteration number for the inversions resulting in the models shown in Figs. 2. Plots for the subspace and conventional inversions are shown by circle and plus symbols, respectively.

Fig. 2 The models recovered from the subspace (left) and conventional (right) inversions of the pole-pole data. The top and second rows show horizontal sections at depths of 15 m and 40 m, respectively. Vertical sections at $Y=0$ are shown in the bottom row.

のに対し、サブスペース法ではその約 1/5 の 2 時間 59 分である。従来法では修正 Gram-Schmidt 法の計算に要する時間は約 12 時間で全計算時間の大半を占めているのに対し、サブスペース法を用いた場合は基底ベクトルの計算を含めてわずかに 36 分である。この違いはサブスペース法では未知数の数を 8640 から 766 (データ数 + 1) に減らしたことによる。

3.2 地形を含む場合の二極法

上記のモデルに地形を加えたモデルを Fig. 4 に示す。このモデルには傾斜角 30° の山型の起伏が 2 つあり、それらの中心を結ぶ線上に中央の測線 ($Y=0$) が位置している。このモデルに対して前記と同様の条件で見掛け抵抗データを作成し、三次元インバージョンを実施した。地形をインバージョンに組み入れた場合と地形を考慮しない場合のサブスペース法インバージョン結果を Fig. 5 に示す。地形を組み入れた場合の解析結果は地形の起伏が存在しない場合の結果 (Fig. 2) とほぼ同じであり、地形がある場合でもサブスペース法が有効であることを示している。地形を考慮しない場合 (すなわち地表面が水平であると見なした場合) は、地形の影響

による偽像が明瞭に現れ、実際の構造とはかけ離れたものになっている。

3.3 三極法

Fig. 1 のモデルに対して、受信ダイポールの間隔を 10 m, 隔離係数 n を最大 10 とし、電流電極は受信ダイポールの左側にあるものとする。データ数は 735 である。サブスペース法と従来法によるインバージョン結果を Fig. 6 に示す。サブスペース法による結果は調査域外周でやや像がぼやけているが、2 つの結果は実質的には同じと言ってよい。サブスペース法と従来法による反復 7 回目の rms 平均残差はそれぞれ 0.0325 と 0.031 である。

Fig. 4 Plan view (a) and vertical section (b) of 3-D model with topography. Electrode locations along three traverses are indicated by plus symbols.

Table 1 A comparison of CPU times for 3-D subspace and conventional inversions. The CPU times used for the forward calculations include those for constructing the sensitivity matrices.

	CPU time (minutes)	
	Subspace	Conventional
Gram-Schmidt	27	728
Basis vectors	9	—
Forward cal.	143	143
Total	179	871

Fig. 5 The models recovered from the subspace inversions of the pole-pole data for the model in Fig. 4, taking into account the topography (left) and assuming a flat surface (right). The top and second rows show horizontal sections at depths of 15 m and 40 m, respectively, parallel to the surface. Vertical sections at $Y=0$ are shown in the bottom row. For comparison, topography is not shown in the vertical section.

Fig. 6 The models recovered from the subspace (left) and conventional (right) inversions of the pole-dipole data for the model in Fig. 1. The top and second rows show horizontal sections at depths of 15 m and 40 m, respectively. Vertical sections at $Y=0$ are shown in the bottom row.

Fig. 7 The models recovered from the subspace (left) and conventional (right) inversions of the dipole-dipole data for the model in Fig. 1. The top and second rows show horizontal sections at depths of 15 m and 40 m, respectively. Vertical sections at $Y=0$ are shown in the bottom row.

3.4 ダイポール・ダイポール法

ダイポール間隔を 10 m と 20 m の二種類とし、隔離係数を最大 6 とした。データ数は 648 である。サブスペース法と従来法によるインバージョン結果を Fig. 7 に示す。反復 7 回目の rms 平均残差はサブスペース法が 0.034、従来法が 0.033 であった。サブスペース法と従来法のインバージョン結果の違いは、このダイポール・ダイポール配置の場合が最も大きい。すなわち、サブスペース法による結果は調査域外周および深部において像がややぼやけ、分解能の低下も認められる。これは、感度の高い領域が電極系周辺に集中する割合が高く、そのため遠方で感度が小さくなるというダイポール・ダイポール配置の感度特性（佐々木，1996）を反映した結果と考えられる。しかし、基本的にはモデルを再現しており、サブスペース法は有効であるといえる。

4. まとめ

三次元インバージョンでは、未知パラメータ数が増大

することに伴い、未知パラメータに係わる方程式を解くのに要する計算時間が増大する。本論文では、解析精度は維持しながら、未知パラメータ数を実質的に大幅に減らすことができるサブスペース法を試みた。基底ベクトルは、ラプラシアン・オペレータの逆行列で前処理した感度ベクトルである。数値実験では二極、三極、ダイポール・ダイポール法のいずれの電極配置でもモデルをよく再現でき、計算時間を従来法の数分の 1 に短縮できた。ただし、ダイポール・ダイポール配置の場合には、サブスペース法において若干の分解能の低下が認められた。今後は実データを用いて、サブスペース法と従来法によるインバージョン結果の違いが実用上許容できるかどうかを確認する必要がある。

謝 辞

2 名の査読者には原稿の誤りを指摘していただくとともに、原稿を改善する上で有益な多くのご教示をいただいた。ここに記して厚く謝意を表します。

参 考 文 献

- Constable, S. C., Parker, R. L., and Constable, C. G. (1987) : Occam's Inversion : A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data, *Geophysics*, 52, 289–300.
- 神谷英樹・島 裕雅 (1994) : 二極法データを用いた三次元比抵抗自動解析法—実用的な地表探査法としての三次元比抵抗映像法—, *物理探査*, 47, 183–198.
- Kennett, B. L. N., Sambridge, M. S., and Williamson, P. R. (1987) : Subspace methods for inverse problems with multiple parameter classes, *Geophys. J. Int.*, 94, 237–247.
- 中川 徹・小柳義夫 (1982) : 最小二乗法による実験データ解析, *UP 応用数学選集*, 7, 東京大学出版会
- Oldenburg, D. W., McGillivray, P. R., and Ellis, R. G. (1993) : Generalized subspace methods for large-scale inverse problems, *Geophys. J. Int.*, 114, 12–20.
- Park, S. K., and Van, G. P. (1991) : Inversion of pole-pole data for 3-D resistivity structure beneath arrays of electrodes, *Geophysics*, 56, 951–960.
- Sasaki, Y. (1994) : 3-D resistivity inversion using the finite-element method, *Geophysics*, 59, 1839–1848.
- 佐々木 裕 (1996) : 比抵抗法および CSAMT 法二次元探査の分解能と精度, *応用地質*, 37, 19–28.
- 杉本芳博・井上 誠 (1998) : 土木分野における三次元比抵抗トモグラフィ, *物理探査*, 51, 676–687.

3-D resistivity inversion using a subspace method

Yutaka Sasaki*

ABSTRACT

In 3-D resistivity inversion, the number of the model parameters to be inverted is very large and hence the computing time for solving a large system of equations can be larger than that for forward modeling. The subspace method is investigated to circumvent this computational difficulty. The major benefit of using the subspace method is that the number of unknowns is reduced to the number of the basis vectors selected. The basis vectors chosen are the gradient of the segmented data misfit function multiplied by the inverse of the model roughness (Laplacian) operator. It is shown that the use of the subspace method allows significant reduction in computing time without serious degradation of inversion results.

Key words: subspace method, basis vectors, 3-D inversion, resistivity