岩石の地震波速度とその異方性：エネルギー論からのアプローチ

西澤 修*

要 旨

空隙や割れ目を含む岩石、および鉱物や割れ目の選択配向を含む岩石の地震波速度を求める方法を概観する。この種の問題では、弾性体のエネルギー変化から弾性定数を決める手法が一般的に用いられている。ここでは、この手法を理解するための準備として、弾性理論の基礎概念と弾性論における熱力学ポテンシャルの表記法を再確認した後、フックの法則や弾性定数を導く。これらの準備の後、異方性媒質における弾性定数の特徴を調べ、異方性岩石を伝播する地震波速度の特徴を調べる。地球科学で重要な異方性は横等方性 (transverse isotropy: TI) であるので、TI について手短に述べる。最後に、鉱物の弾性定数をもとに、集合体としての岩石の弾性的性質の記述方法、空隙や割れ目を含む岩石の弾性的性質を求めるためのモデル化の手法、およびモデル化に付随して定義されるクラックパラメータを扱う。

キーワード：空隙・クラック・弾性定数・地震波速度異方性・水平等方性・選択配向

1. はじめに

岩石の地震波速度は地下構造を知るための重要なパラメータであり、岩石の地震波速度の研究は岩石物性の主要な研究課題のひとつである。ここでは岩石の地震波速度を支配する要因の中で、鉱物の選択配向と空隙やクラックをとりあげ、それらに起因する地震波速度の異方性を議論する。ただし、扱うのは結晶質岩のような空隙率の低い岩石に適用されるモデルで、軟岩や砂岩に適用される粒子集合体モデルは対象外とする。なお、「地震波速度」は「弾性波速度」とほぼ同義であるが、実験室での計測や理論に対応して厳密に固体中を伝播する波動を意味する場合にのみ「弾性波速度」と記し、一般的には地震波速度と記す。

岩石は不均質媒質である。したがって岩石に弾性論を適用するときは岩石の不均質性を考慮せねばならない。現在では割れ目や空隙などの不均質を個別に記述したモデルを使い、コンピュータによる数値計算から岩石全体の弾性的性質や波動場を研究することが可能である

(Saenger and Shapiro, 2002; Saenger et al., 2004; Grechka and Kachanov, 2006a)。しかし、岩石はランダム不均質媒質であるため、統計的な扱いによって等価な均質媒質に置き換えることができる。

岩石を巨視的に等価な均質媒質に置き換え、これに対して弾性論を適用するためには、等価均質媒質への置き換えの妥当性を保証し、等価均質媒質の物性を決めるための具体的手段が必要である。たとえば、空隙を含む岩石であれば、これを巨視的等価媒質に置き換える計算式を導かなければならない。地震波の伝播では、地震波の波長と不均質サイズとの関係が、巨視的均質媒質への置き換えの妥当性を判断する根拠となる (Nishizawa and Fukushima, 2008; Aki and Richards, 1980; Sato and Fehler, 1998)。等価均質媒質の弾性的性質を決めるためには、個々の不均質に弾性論の構成式とフックの法則をあてはめるより、熱力学ポテンシャル (エネルギー) を介在させたほうが簡単である。そこで、弾性論と固体の熱力学に関する要点を最初に記述する。

一方、岩石は微細構造に起因する弾性的異方性を持つこともある。たとえば、変成岩や堆積岩には明瞭な面構造の見られるものがあり、実験室で地震波速度を計測すると、微細構造に関連した弾性波速度の異方性が見られる (Matsuzawa et al., 1995; Takanashi et al., 2001)。面構造が不明瞭な花崗岩やカンラン岩でも常圧での弾性波速度に異方性が見られるものもあり (Sano et al., 1992; 笠原ほか, 1968a,b), 花崗岩ではクラックの選択配向, カンラン岩ではカンラン石の選択配向が異方性の主要な原因である。岩石の地震波速度異方性の成因と空隙や割れ目を含む岩石の弾性的性質を理解するためのモデル, および異方性媒質中の地震波伝播の二つの話題を関連させて解説した文献は少ない。本論説は、地震波速度異方性について、岩石物性と地震波伝播の双方から考察し、地震波速度異方性に関する統一的理解を得るための試みである。

2. 弾性論の基本式

2.1 弾性固体

以下に述べる「物質」とは、一定の化学組成と分子（原子）構造で表わされるもので、媒質とは物質とその複合体を総称したものである。岩石は典型的な複合媒質であり、この弾性的性質を表現することを目標とする。

最初は均質な物質を考える。物質が変形すると、形状を元に戻そうとする復元力が物質内部に発生する。変形を維持するには、復元力に抗する力が物質内部に必要となる。物質内部の抗力を扱いやすい形に表現したものが、後に述べる応力である。気体では圧縮に対する反発力だけが存在し圧力となるが、固体では圧縮だけでなく、ねじれやずれに対する復元力も発生するので、この種の変形に対する抗力も考慮しなければならない。岩石の弾性を考えるときは、液体が気体や固体と接している境界での表面張力や内部の流体移動を引き起こす力を考慮する場合もあるが、ここでは単純に固体の変形に関連した力だけを扱う。

物質の変形の原因は外部から与えられる力や熱（温度変化）であるから、物質内部の力の原因は外部からの物理的作用である。外部からの力が媒質内部に様な応力場を作り出す場合もあるが、一般には外からの力によって様な応力場が形成されることはない。

外見的に変形が観測されなくても媒質内部に力が発生することがある。たとえば、変形を拘束した状態で媒質

Fig.1 The elastic restoring force exerted by changes of molecular or atomic positions. When a solid material deforms, the distances between molecules (atoms) are changed. A restoring force appears between each molecule (atom) to make it stay in an equilibrium position. To keep the material deformed, there is a constraint force inside the material. Stress can appear even without deformations.

に熱を与えれば、外見上変形は見られないが、内部に力が発生している。これは、復元力がゼロとなる平衡時の形状が熱膨張で変化したためで、拘束を取り去れば物質は膨張し、物質内部の力は消滅する。こうした拘束状態は、岩石を複合媒質でモデル化する際に現れ、岩石を扱う上で参考となる。

物質の変形は固体のエネルギー状態に変化をもたらす。固体中の原子や分子は規則的に配列した結晶構造の中で、本来の位置の周辺で熱運動しており、変形とはミクロ的には原子や分子の平均位置の変化である (Fig. 1)。こうしたミクロな原子・分子の位置変化に伴うエネルギー変化は、分子動力学的手法により計算される。後で見ると熱力学の原理に従い、エネルギー変化量から弾性定数が決められるので、変形時のエネルギーを変化から弾性定数を求め地震波速度を予測できる。実験室での測定が困難な地球深部物質の地震波速度はこの方法で推定される (川村, 1996; Miyake and Kawano, 2005)。

2.2 不均質媒質への弾性論の適用

物質の弾性的変形は物質のエネルギー状態を変化させるが、エネルギー変化量から変形の際の力（応力）や変形量（ひずみ）の関係を表す弾性論の式が導かれる (Landau and Lifshitz, 1965)。しかし、上のような原子や分子モデルが意味を持つのは厳密には欠陥のない固体である。実在する固体内部には、結晶格子のレベルでの転位や不純物が存在するため、実際は不均質を含む物質

を扱っていることになる。岩石もさまざまな鉱物が混じりあった不均質媒質であり、均質媒質に対して構築された弾性論を岩石に適用するには工夫が必要である。通常は、不均質の特徴的サイズに比べて十分大きな領域を考え、これを巨視的に一様とした等価な均質媒質に置き換え、この仮想的均質媒質に対して弾性論を適用する。例えば、空隙やクラックを含む岩石の弾性は、巨視的に等価な均質媒質で近似する。巨視的扱いができる最小体積を REV (Representative Elementary Volume) と呼ぶ (Guéguen and Palciauskas, 1994; Guéguen et al., 2004)。地球規模の地震学、物理探査、室内実験のそれぞれで REV の実際の大きさは異なるが、REV より大きな領域であれば均質物質に対する弾性理論が適用できる。

不均質媒質が変形すると媒質内部の変形状態も不均質となる。たとえば、Fig. 2 (a), (b) に示すように、弾性的性質の異なる物質が混じり合った場合、巨視的な弾性的性質はモデルによって異なる。(a-1), (a-2) は弾性的性質の異なる物質が球の内側と外側を占めた場合である。変形しにくい物質が外側にあれば、力を受けたときの変形量は小さいが、外側に変形しやすい物質があれば、全体の変形量は大きくなるだろう。また、(b-1), (b-2) は、同じ厚さの変形しやすい物質と変形しにくい物質が互層を形成しているが、この場合は力の加わる方向によって変形の割合が異なる。(b-1) では各層の面を通して力が連続的に加えられるが、各層の変形量は等しくない。いっぽう、(b-2) では両者の変形量は等しいが、受ける力は物質によって異なり、変形しにくい物質がより多くの力を受ける。このため、巨視的な弾性的性質は (b-1) と (b-2) とで異なり、等価均質媒質に置き換えれば、方向によって異なる弾性的レスポンスを示す異方性媒質となる。岩石中の鉱物の配置はこれらの図ほど単純ではなく、さらに複雑な組み合わせの集合体である。(c) は均質な媒質 (マトリックス：基質) 中に異種媒質 (介在物) が混入した状態である。ここで主に扱うのは (c) の場合で、介在物は岩石中の割れ目や隙間を満たす気体や水 (液体) などの流体である。

岩石のような複雑な不均質媒質に対しては、不均質部分に個別に弾性論を適用するのではなく、媒質全体のエネルギー変化に着目するのがよい。等しいエネルギー変化を与える巨視的均質媒質の弾性的性質を求め、これをもとに弾性的性質を表現する (Eshelby, 1957; Budiansky and O'Connell, 1976; Anderson et al., 1974; Nishizawa, 1982; Biot, 1956a,b)。以下に議論の準備として、弾性論

Fig. 2 Examples of heterogeneity composed of hard and soft materials. (a) Aggregates of spheres; (a-1) The hard spherical shell wrapping around the soft material. (a-2) the reverse case of (a-1). (b) Alternate layers of hard and soft materials subjected to forces in different directions: (b-1) the force acting perpendicular to the layering, and (b-2) the force acting parallel to the layering. (c) A flat penny shaped body is embedded into the homogeneous material.

In (a) and (b) the macroscopic elastic response differs between two cases. In (a), (a-1) is stiffer than (a-2), and in (b), (b-2) is stiffer than (b-1). In the cases (b) and (c), macroscopic elastic properties are anisotropic.

の基礎を簡単に記述する。

2.3 応力

Fig. 3 (2) のように弾性体内部の閉曲面で囲まれた領域 Ω 内に、微小体積要素 dv を考える。カーテシアン座標系は添え字を用いて x_i ($i = 1, 2, 3$) とする。すでに述べたように変形を受けた媒質内部には復元力に抗して変形を維持するための力 $\mathbf{f}$ が存在する。各微小領域 dv に作用する力の成分 f_i は、隣あった微小領域にも作用し、力の作用が繰り返されて Ω 表面の微小面積要素 dS から σ_i で出入りし、 Ω の外側の媒質に作用する。これを

Fig.3 We consider an arbitrary area Ω bounded by a closed surface in a homogeneous infinite solid medium. An area element dS is defined on the surface of Ω . We decompose the internal force inside Ω into the three components f_i ($i=1, 2, 3$). Forces acting on the Ω 's surface are due to the internal forces acting each volume element inside Ω , and each force equilibrates with the same force acting in the opposite direction. The forces interact with outside area through the surface of Ω . We write the force acting outside through the surface dS as σ_i . The force σ_i consists of the three component acting at the projection of σ_i on each coordinate plane ($\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$).

式で書くと

$$\int_{\Omega} f_i dv = \int_{\Omega} \sigma_i dS = \int_{\Omega} \text{div} \sigma_i dv \quad (1)$$

となる。 $\int_{\Omega}$ は Ω 全域に関する面積分や体積分を表す。最右辺はガウスの定理による。領域 Ω の微小極限では、

$$f_i = \text{div} \sigma_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (2)$$

となる。式の中で同じ添え字を繰り返すときは、それぞれに対する和を意味する。たとえば

$$\text{div} \sigma_1 = \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}$$

などである。ベクトル σ_i の成分, σ_{ij} を応力と呼ぶ。 σ_{ij} の具体的意味は Fig. 3 (1) に示したように、面積要素 dS を x_j 軸に垂直な各面に投影した面要素に作用する i 方向の力である。つまり、単位面積 dS に作用する i 方向の力 σ_i を、単位面積成分 $dx_i dx_j$ に作用するものに分解したものである。次に述べるひずみが変形による微小距離の積の変化分を、 $dx_i dx_j$ 成分で表現したときの係数であることと対比すると、応力とひずみの関係が明瞭になる。

σ_{ij} は $i, j = 1, 2, 3$ の組み合わせから 9 個の成分を持つ 3×3 のテンソルであるが、 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ が成り立つため、独立成分は 6 個となる。応力テンソルの対称性の根拠は、

A, B: before deformation
A', B': after deformation

$$dx' = \left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \right)$$

$$dy + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz$$

$$dz + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz$$

Fig.4 Changes in a line element by deformation. A and B are the nearby points inside the solid with a distance dx . After deformation, A and B move to A' and B', respectively. The displacement vector of AA', u , changes to $u + du$ at BB'. The line element AB has been changed to dx' after deformation. Strain is the coefficient for describing the change of the second order norm of the line element $|dx|^2$ after deformation.

Landau and Lifshitz (1965) など、弾性論の教科書で説明されている。

式 (2) は弾性体内部で常に成り立つ。波が伝播すれば、領域 Ω 内部で運動が生じるので、 f_i は微小体積要素の質量 (密度 ρ) と加速度の積で表わされる。 $\text{div} \sigma_i = 0$ のときは、媒質内部は静的な釣り合い状態にある。

2.4 ひずみ

応力は微小面積要素に作用する力で定義された。次に、変形による微小距離の 2 乗値の変化を調べる。弾性体内部では応力に対応した変位 $u = (u_1, u_2, u_3)$ が点 x に生じる。変形により Fig. 4 のように、点 A, B がそれぞれ点 A', B' に移動すると、線分 AB ($= dx$) は dx' に変化し、

$$dx' = dx + u(x + dx) - u(x) = dx + du \quad (3)$$

となる。 $|dx|^2$ の変化は

$$|dx'|^2 - |dx|^2 = |dx + du|^2 - |dx|^2 \quad (4)$$

で、 $d\mathbf{u}$ の各成分は変形勾配 $\partial u_i/\partial x_j$ を用いて、

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

であるから、

$$\begin{aligned} |d\mathbf{x} + d\mathbf{u}|^2 - |d\mathbf{x}|^2 &= 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_i dx_j \\ &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j \\ &= 2e_{ij} dx_i dx_j \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ただし、

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (6)$$

で、 e_{ij} をひずみと呼ぶ。ひずみとは $|d\mathbf{x}|^2$ の変化分を表現する際の、要素 $dx_i dx_j$ の係数である。式 (6) の右辺、括弧の中の第 3 項は変形勾配 $\partial u_i/\partial x_j$ が微小量であるとき、無視できる。通常は式 (6) を

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

で表わし、これをひずみと定義する。

完全な均質媒質が弾性変形した場合、変形勾配は全領域で微小量としていいが、内部に急激な不連続（たとえばクラックの先端など）を含む場合は、応力集中が起こり、これによって変形勾配も急激に大きくなる。極端な場合には、変形量が局所的に弾性変形の範囲を越え、回復不能な塑性ひずみの域に達する。実際、クラックの先端ではこのような状態と考えられる。複合媒質では、塑性的変形も考慮しなければならないが、媒質の持つエネルギーを評価すれば、この種の問題もとりこむことができる。ひずみと応力の関係は、次節の変形による内部エネルギー変化（弾性エネルギー）から明らかになる。

2.5 弾性エネルギー

全無限均質媒質を想定し、その中に Fig. 2 に示すような介在物が現れた場合を考える。介在物は、同じ物質が熱によって温度を上昇させたものと考えてもよいし、突然別の物質に置き換わったと考えてもよい。これによって内部応力状態が生じ、介在物と介在物の周辺が変形するが、無限遠では何の変化も生じていないとしてよい。そこで十分広い領域 Ω を想定し、介在物の発生によるすべての変化は Ω の中に限られるとする。

一例として、媒質内の一部で熱が発生した場合を考える。このとき、 Ω には熱エネルギーが付与され温度が上

昇し、熱膨張が発生するが、遠方に行くほど緩和される。これによって媒質の一部に仕事 δW が発生する。仕事に使われるエネルギーは Ω に与えられた熱 δQ の一部で、熱が領域 Ω から出ていかなければ、エネルギー変化を ΔU で表わして、

$$\Delta U = \delta Q - \delta W \quad (8)$$

となる（熱力学の第一法則）。熱の発生を伴わない変化で ($\delta Q = 0$)、媒質の一部が他の媒質へ置き換わったり、媒質の消失および不連続（転位や空洞）の発生であってもよい。

Ω 内の力が f であれば、微小量の変位 $\delta \mathbf{u}$ に対する仕事は

$$\delta W = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv = \int_{\Omega} f_i \delta u_i dv = \int_{\Omega} \text{div} \boldsymbol{\sigma}_i \delta u_i dv \quad (9)$$

である。最右辺をガウスの定理を用い、部分積分を利用して書き直せば、

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta u_i \boldsymbol{\sigma}_i \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Omega} \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dv \quad (10)$$

となる。

式 (10) 第一項は、 Ω の面を通しての力の作用を示しているが、 Ω を十分に大きくとり、境界での力がゼロとなれば、第 1 項はゼロとなる。したがって、式 (10) の第 2 項が、内部応力で δW を表現したものとなる。

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ などの関係を用いれば、

$$\begin{aligned} \delta W &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) dv \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dv \\ &= -\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dv \end{aligned} \quad (11)$$

となる。等方性媒質が静水圧を受ければ、固体内部の圧力を p として、 $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$ 、 $\delta e_{ij} = (1/3) \Delta V/V$ で、 ΔV が負であるから、式 (11) の値は負となり、式 (8) の内部エネルギーは増加する。

単位体積あたりの仕事量は、

$$\delta W = -\sigma_{ij} \delta e_{ij} \quad (12)$$

となる。また、応力・ひずみがゼロの状態から、変形が非常に緩やかに進行すると（準静的変形）、変形後の応力、ひずみ、 σ_{ij}, e_{ij} に対する単位体積あたりの仕事は式 (12) の積分により、

$$W = -\frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} \quad (13)$$

Fig.5 The relationship between the thermodynamic potential functions and the physical quantities. Thermodynamic potential functions are expressed by the pairs of the extensive and intensive variables. The extensive variables S and V are placed on the top layer corners and the intensive variables P and T are placed on the bottom layer corners. The corresponding extensive and intensive variables placed diagonally opposite each other. The variables in the left column have a minus. The minus sign should be removed when the stress and strain are used for describing the relationship.

となる。

δW は内部応力が行う仕事であり、気体の熱力学では PdV に対応する量である。ただし、気体では P はスカラー量で正值のみであるが、固体では応力 σ_{ij} の正負を表示する必要がある。

W は弾性エネルギーで、式 (8) により媒質の内部エネルギーの一部である。媒質の弾性エネルギーと応力-ひずみの関係は、次に見る熱力学ポテンシャルを介して統一的に理解できる。熱力学ポテンシャルからのアプローチは岩石の弾性的性質を記述する有効な手法である。

2.6 熱力学ポテンシャル

熱力学ポテンシャルは、さまざまな物理条件下でのエネルギー変化の方向を表現したもので、変化の方向や安定性を調べるのに使われる (山本, 1987)。ここでは、弾性体における熱力学ポテンシャルの表現式を見る。

気体の熱力学では示量変数 S (エントロピー) と V (体積), および示強変数 T (温度) と P (圧力) の中から二つの変数を選んだ組み合わせにより, Fig. 5 のような関係を持つ内部エネルギー $U(S, V)$, エンタルピー $H(S, P)$, ヘルムホルツ自由エネルギー $F(T, V)$, ギブスの自由エネルギー $G(T, P)$ がそれぞれ定義される。 T, P の負記号は, それらが一定としたときに現れる。

式 (12) で弾性体のエネルギー変化が計算できるので, 示量変数 V と示強変数 P は, 弾性体ではそれぞれ e_{ij} ,

σ_{ij} に置き換わる。 σ_{ij} にマイナス符号が付かないのは, 前節で述べたように, σ_{ij} の正負を考慮した弾性エネルギーが, 式 (12) で与えられるからである。

各ポテンシャルの変化分は

$$dU = TdS + \sigma_{ij}de_{ij} \quad \text{内部エネルギー} \quad (14)$$

$$dH = TdS - e_{ij}d\sigma_{ij} \quad \text{エンタルピー} \quad (15)$$

$$dF = -SdT + \sigma_{ij}de_{ij} \quad \text{ヘルムホルツの自由エネルギー} \quad (16)$$

$$dG = -SdT - e_{ij}d\sigma_{ij} \quad \text{ギブスの自由エネルギー} \quad (17)$$

となり, 以下の関係式が得られる。

応力 :

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \right)_S \quad (18)$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right)_T \quad (19)$$

ひずみ :

$$e_{ij} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \sigma_{ij}} \right)_S \quad (20)$$

$$= - \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T \quad (21)$$

応力とひずみは S や T を一定としたときの熱力学ポテンシャルの, 相互の変数に関する偏微分から得られる。ここから次節で導く弾性定数が定義される。

2.7 弾性定数と弾性コンプライアンス

式 (18), (19) をひずみ e_{ij} でさらに微分すると,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \right)_S = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} = c_{ijkl}^S \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \right)_T = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} = c_{ijkl}^T \quad (23)$$

となり, 応力・ひずみの存在しない状態を基準として, σ_{ij} と e_{ij} の関係式を一次式で近似すると, c_{ijkl}^S, c_{ijkl}^T は比例定数となって,

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^S e_{kl} \quad (24)$$

あるいは

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^T e_{kl} \quad (25)$$

が得られる。 c_{ijkl}^S と c_{ijkl}^T はそれぞれ, 断熱, 等温弾性定数と呼ばれる。式 (24), (25) はフックの法則と呼ばれる。弾性波が高周波の場合は, 変形で生じる内部エネルギーの増減が短時間で切り替わり, 付随して発生した

熱が周囲と平衡状態になる前に振動が通過し、断熱的变化となるため、 c_{ijkl}^S が弾性定数となる。弾性定数が c_{ijkl}^T となるのは、十分低周波の弾性波が通過するときで、変形で発生した熱が散逸し媒質が熱平衡に達して等温状態となるのに十分な時間が必要となる。しかし、常温では両者の違いは小さく、ほぼ同じ値と考えて差し支えないが、高温下では両者の違いが大きくなるので注意しなければならない (大野, 1996; 西澤, 2005)。ここでは両者を区別せず、単に c_{ijkl} と表記する。

式 (22), (23) と同様に、式 (20), (21) から σ_{kl} から e_{ij} を求める線形式の係数、 s_{ijkl}^S と s_{ijkl}^T が求められるが、両者を区別せず s_{ijkl} とする。 s_{ijkl} は弾性コンプライアンスで、 c_{ijkl} とは互いに逆行列の関係 ($s_{ijkl} = c_{ijkl}^{-1}$) にある。

以下では結晶のように対称性を持つ媒質を考えるが、岩石でも巨視的な等価均質媒質が対称性を持てば結晶と同等に扱う。任意の方向を向いた結晶に対して、岩石に固定した座標に対する弾性定数を計算するには 4 階テンソルの変換

$$c'_{ijkl} = c_{mnpq} \ell_{mi} \ell_{nj} \ell_{pk} \ell_{ql} \quad (26)$$

を行う。ここで c'_{ijkl} は固定座標系での弾性定数、 c_{mnpq} は結晶内に定義された座標系での弾性定数である。 ℓ_{mi} 等は結晶の座標軸 x_i の、固定座標軸 x'_i での方向余弦である。

各軸の方向余弦は Fig. 6 に示したオイラーの角 ψ, θ, ϕ で表し、以下の行列で示される。

$$\begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \sin \phi & \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \sin \phi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \cos \phi \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \cos \phi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (27)$$

ただし、2 番目の回転軸を Fig. 6 の x'_2 にとることもあり、式 (27) と異なる表現が使われることもある。

対称性により回転操作に関して不変な c_{ijkl} が存在するので、これらを等しいとすれば、ゼロとなる成分や c_{ijkl} 間の関係式が導かれ、独立な弾性定数の数が少なくなる。対称性は点群によって分類され、それぞれの点群に対し独立な c_{ijkl} が決まる (Love, 1927; 井田, 1982; 大野, 1996)。

物理探査で重要なのは、対称軸のまわりの任意の回転

Fig.6 Euler's angle

Any crystal orientation is described by the following three rotating operations. I. Rotate by an angle ψ around the x_3 axis. The axes x_1 and x_2 move to the x'_1 and x'_2 axes, respectively.

II. Rotate by an angle θ around the axis x'_1 . After the rotation, the axes $x'_2, x'_3 (= x_3)$ move to the x''_2 and x''_3 axes, respectively. θ and ψ are the same as the angular coordinates used in the polar coordinate system.

III. Rotate an angle ϕ around the axis x''_3 . The axes $x''_1 (= x'_1)$ and x''_2 move to the x'''_1 and x'''_2 axes, respectively.

Note, in some books, the x'_2 axis is selected as the axis for the rotation θ . In this case, the matrix of the direction cosines are different from those shown here. v

に対し弾性的性質が不変な場合で、横等方性 (transverse isotropy: TI) または水平等方性と呼ばれる。 x_3 軸が対称軸であれば、 $\theta = \phi = 0$ としてよい。方向余弦を示すマトリックスは以下の簡単な形になる。

$$\begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Fig. 6 の x_3 軸の周りの回転角 ψ に対し、 $\psi = \pi/6$ を代入する。この回転操作は点群の六方晶系における対称操作である。式 (28) を式 (26) に代入し、弾性定数が不変であれば、 $c'_{ijkl} = c_{mnpq}$ より以下の関係が導かれる

$$\begin{aligned} c_{1111} &= c_{2222} \\ c_{1212} &= (1/2)(c_{1111} - c_{1122}) \\ c_{1133} &= c_{2233} \\ c_{3131} &= c_{2323} \end{aligned}$$

c_{1122} は c_{1111} と c_{1212} で決まるため独立ではない。残りは c_{3333} 以外ゼロとなり、5 個の独立成分となる。

野外の観測では x_3 軸が鉛直か水平かで、それぞれ、VTI (Vertical Transverse Istotropy), HTI (Horizontal

Transverse Istotropy) と呼ばれる。水平成層構造が作る異方性では x_3 軸が鉛直方向となり VTI, 鉛直な断層や破碎帯が作る異方性は x_3 軸が水平方向となって HTI となる。Fig. 2 (b) で, 紙面の上下方向を鉛直軸とすれば, (b-1), (b-2) はそれぞれ, VTI, HTI となる。

3. 弾性波速度

3.1 基本式

基本式 (2) から弾性波速度の計算式を導く。式 (2) に, フックの法則, 式 (24) または式 (25) を適用する。本節に限り添え字 i, j, k, l の組は, k が波数を表す k と紛らわしいので使用せず, m, n, p, q とする。式 (2) における力の成分 f_m は, 弾性体内に運動が存在すれば, 密度と加速速度の積であるから,

$$f_m = \rho \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \text{div} \sigma_m = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial x_n}$$

となる。フックの法則 $\sigma_{mn} = c_{mnpq} e_{pq}$ から,

$$c_{mnpq} \frac{\partial e_{pq}}{\partial x_n} = \rho \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \quad (29)$$

となり, 左辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_{mnpq} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) \\ = \frac{1}{2} c_{mnpq} \left(\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_n \partial x_q} + \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_n \partial x_p} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

となる。式 (30) の p, q は c_{mnpq} が $p \leftrightarrow q$ の相互置換に対して等しいので, 括弧内の項は同じものとなり, 式 (29) は

$$c_{mnpq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_n \partial x_p} = \rho \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \quad (31)$$

となる。

解として, 内部減衰のない平面波 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$ を仮定すると,

$$(\rho \omega^2 \delta_{mq} - c_{mnpq} k_n k_p) u_m^0 = 0 \quad (32)$$

となる (Landau and Lifshitz, 1965; Carcione, 2007; Aki and Richards, 1980, 2002)。 k_n, k_p は波数ベクトル $\mathbf{k}$ の n, p 成分である。式 (32) は $\rho \omega^2$ を k_1, k_2, k_3 の二次式で表現するための固有値方程式で, 固有値が次式から求められる。

$$|c_{mnpq} k_n k_p - \rho \omega^2 \delta_{mq}| = 0 \quad (33)$$

ただし, δ_{mq} はクロネッカーのデルタで $m = q$ で $\delta_{mq} = 1$, $m \neq q$ で $\delta_{mq} = 0$ である。平面波の速度 $v = \omega/|\mathbf{k}|$ は $\mathbf{k}$ 方向の位相速度と呼ばれ, この 2 乗値 $(\omega/|\mathbf{k}|)^2 = v^2$ が, c_{ijkl} を係数に含む $\mathbf{k}$ の方向余弦の二次式と ρ の比で示される。3 個の固有値に対応する 3 個の固有ベクトル $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}$ は波の振動方向を示している。固有ベクトルは互いに直交するが, これらがすべて波の進行方向に平行あるいは直交しているわけではない。これについて, 次節の TI 媒質の地震波速度の導出で例示する。

式 (33) は, Christoffel の式 (Kelvin-Christoffel 式) と呼ばれる。また, ベクトル $\mathbf{k}$ の方向によって位相速度が異なる方位分散を示す式であることから, 分散関係式とも呼ばれる。方位分散の詳細は後節で群速度とともに議論する。

3.2 TI (横等方性) 媒質の位相速度

c_{ijkl} は $ij, kl = 11, 22, 33, 23, 31, 12, 32, 13, 21$ の組み合わせなので全部で 81 個あるが, 独立成分の数は一番対称性の低い場合でも以下に示すように 21 個である。まず,

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij} \quad (34)$$

が, 式 (22), (23) での, ひずみ e_{ij} の対称性より明らかであり, 独立な弾性定数の数を減らすことができる。 c_{ijkl} の ij と kl がセットで入れ替わるので, 弾性定数を c_{ijkl} ではなく, 以下の置き換えにより添え字を 2 個にした C_{ij} で表わすことができる。

$$\begin{aligned} 11 &\rightarrow 1, & 22 &\rightarrow 2, & 33 &\rightarrow 3, \\ 23, 32 &\rightarrow 4, & 32, 23 &\rightarrow 5, & 12, 21 &\rightarrow 6. \end{aligned}$$

たとえば, $c_{1111} \rightarrow C_{11}$, $c_{1122} \rightarrow C_{12}$, $c_{2323} = c_{3232} \rightarrow C_{44}$ などである。これらは Voigt の表記と呼ばれ, 岩石や固体の弾性定数データ集 (Anderson and Isaak, 1995; Simmons and Wang, 1971) ではこれが用いられる。計算機プログラミングでは c_{ijkl} のまま使い, i, j, k, l に関するループを計算式に組み込むほうが簡単で汎用性が高いが, 対称性の高い媒質では独立成分の数が少ないため, 弾性波速度の式を C_{ij} で記述するほうがわかりやすい。 C_{ij} 表記では弾性定数は 6×6 となり, 式 (34) より $C_{ij} = C_{ji}$ となって, 独立成分は最大 21 個となる。独立成分の数は対称性が高くなればさらに少なくなる。各対称性 (点群) に対する C_{ij} は Love (1927), Crampin (1989), 大野 (1996) などに示されている。

すでに見たように, TI の場合の 5 個の弾性定数は C_{11} ($=C_{22}$), C_{33} , C_{13} ($=C_{23}$), C_{44} ($=C_{55}$), C_{66} ($= (1/2)(C_{11} -$

Fig.7 Polarization directions of elastic waves in TI media.

The directions of polarization are shown for the qP -, qS -, and SH -waves. Except for the symmetry axis and the isotropic plane, the direction of polarization of the fastest wave is inclined from its propagation direction. This is the qP wave and appear as true P wave in the direction of the symmetry axis and the isotropic plane. The polarization direction of one of the slow wave is also inclined from its propagation direction. This is the qS wave (SV wave) and appear as true S wave in the direction of the symmetry axis and the isotropic plane. True S wave exists in all directions. This is the SH wave. Its polarization is parallel to the isotropic plane and always perpendicular to its propagation direction. qS and SH waves can be both the primary or secondary waves. The velocity difference between two waves is called shear-wave splitting.

$C_{12})$))である。TIでは、式(33)の k_n, k_p は x_3 軸からの角度 θ だけで表わされるので、 θ を変数として位相速度 $v = \omega/|k|$ を表すと、

$$v_{qP}(\theta) = \frac{(C_{11} \sin^2 \theta + C_{33} \cos^2 \theta + C_{44} + \sqrt{M})^{1/2}}{(2\rho)^{1/2}} \quad (35)$$

$$v_{qS}(\theta) = \frac{(C_{11} \sin^2 \theta + C_{33} \cos^2 \theta + C_{44} - \sqrt{M})^{1/2}}{(2\rho)^{1/2}} \quad (36)$$

$$v_{SH}(\theta) = \frac{(C_{66} \sin^2 \theta + C_{44} \cos^2 \theta)^{1/2}}{(2\rho)^{1/2}} \quad (37)$$

となる。ここで M は

$$M = [(C_{11} - C_{44}) \sin^2 \theta - (C_{33} - C_{44}) \cos^2 \theta]^2 + 4(C_{13} + C_{44})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (38)$$

である (Mavko et al., 1998; MacBeth, 2002; Carcione, 2007)。位相速度の下付文字 qP , qS は quasi- P , quasi- S の意味で、通常の P -波、 S -波とは異なり、波振動方向が伝播方向と一致、あるいは直交する、本来の P 波、 S 波ではないことを示す (Fig. 7)。ただし、 SH 波の振動方向は常に波の伝播方向と直交する。

対称軸方向 (x_3) とこれに垂直な等方面内 (x_1 で代表) に伝播する弾性波は本来の P 波、 S 波で、位相速度は、対称軸方向：

$$v_{P3} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \quad (39)$$

$$v_{S3} = v_{SH3} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (40)$$

等方平面内：

$$v_{P1} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad (41)$$

$$v_{SH1} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}} \quad (42)$$

$$v_{S1} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (43)$$

となる。ここで v_{S1} と v_{SH1} 、および v_{S3} と v_{SH3} はそれぞれ振動方向が互いに直交する。

Thomsen (1986) は弱い異方性の TI に対して、各方向の弾性波速度は以下の式で近似できるとした、

$$v_{qP}(\theta) = V_P(0)(1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^4 \theta), \quad (44)$$

$$v_{qS}(\theta) = V_S(0)(1 + \eta \sin^2 \theta \cos^2 \theta), \quad (45)$$

$$v_{SH}(\theta) = V_S(0)(1 + \gamma \sin^2 \theta), \quad (46)$$

ただし、 η は独立なパラメータではなく、

$$\eta = \left(\frac{v_P(0)}{v_S(0)} \right)^2 (\varepsilon - \delta). \quad (47)$$

である。 $\varepsilon, \gamma, \delta$ は、Thomsen の異方性パラメータと呼ばれ (η を含む場合もある)、 C_{ij} で表わすと、

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}} \approx \frac{v_P(\pi) - v_P(0)}{v_P(0)}, \quad (48)$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}} \approx \frac{v_{SH}(\pi) - v_{SH}(0)}{v_{SH}(0)}, \quad (49)$$

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})} \approx 4 \left[\frac{v_P(\pi/4)}{v_P(0)} - 1 \right] - \left[\frac{v_P(\pi/2)}{v_P(0)} - 1 \right], \quad (50)$$

となる。 ε, γ はそれぞれ P -, S -波の軸方向速度から近似的に決めることができ、また δ は x_3 軸から 45° の方向に伝播する qP 波の位相速度を知れば決めることができる。

TI の位相速度は θ に対して π の周期で変化し、対称性から $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲で速度変化を記述できる。式

Fig.8 Thomsen's approximation for TI. Phase velocity distribution plotted in the quadrant between the symmetry axis and the isotropic plane of TI.

The plotted curves are for different δ values when $\varepsilon = 0.2$, $\gamma = 0.3$. According to equation (47), the velocity distribution show a bulge in the qS phase velocity at $\theta = \pi/4$. The bulge extends as $\varepsilon - \delta$ show large positive values.

(44)~(46) はさらに $\pi/2$ の周期を持つ補正項が付け加わることを意味する。Fig. 8 は δ の異なる値に対する qP , qS , SH の速度を x_3 軸を含む面にプロットしたものである。Thomsen の近似式で qS 波は $\varepsilon - \delta$ が正のとき $\theta = \pi/4$ 方向に最大値を持ち、 $v_P(0)/v_S(0)$ の値が大きいと qS 波の位相速度が SH 波の位相速度を上回る場合がある。このとき、次に述べる群速度の多重化（三重縮重）が生じることがあり、複雑な波形が生じて地震波伝播の解析に困難を引き起こす (Sakai and Kawasaki, 1990; Vavryčuk, 2003)。最近、Berryman (2008) は、Thomsen の式にある $\theta = \pi/2$ 周期の制限を取り除いた近似式を提案した。この方法は、層状ケイ酸塩鉱物や粘土を含む岩石の異方性を理解するのに有効である (西澤・金川, 2009)。

3.3 TI 媒質での群速度と分散

平面波 $u = u^0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$ で $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ は時間と距離における位相を表す。位相の距離に関する項を一般的に表現すれば、

$$u = u^0 \exp[i\{\omega t - p(\mathbf{x})\}] \quad (51)$$

となり、 $p(\mathbf{x})$ は時間と周波数を固定したときの同一位相部分（波面）の空間的広がりを示す。時間を固定したとき、 $p(\mathbf{x})$ が等しい場所は波面の広がりスナップショットとなる。

特定の位相面が時間 $t + dt$ の後に距離 $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ 進むと、

同位相の条件は

$$\omega dt - \text{grad } p \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (52)$$

で、同一位相の移動速度

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \frac{\omega}{|\text{grad } p|} = v \quad (53)$$

が位相速度である (Mavko et al., 1998)。位相速度の逆数、 $|\text{grad } p|/\omega$ はスローネスで、

$$\text{grad } p = \mathbf{k} \quad (54)$$

で波数ベクトルが表現される。位相速度は波面の一部を局所的に平面波で近似したときの速度で、式 (54) の $\mathbf{k}$ は波面と垂直な方向を持つ。

ω が $\mathbf{k}$ に依存しなければ、 $\text{grad } p = \mathbf{k}$ で表わされる方向にすべての周波数の波が伝播するが、 $\mathbf{k}$ に依存する場合には、周波数あるいは $\mathbf{k}$ の方向ごとに位相速度が異なるため、伝播中に相互の干渉が生じる。角周波数 $\omega_0 + \delta\omega$ の波面の伝播を調べるため、式 (51) を $\omega_0 + \delta\omega$ で書き換え、

$$u = u^0 \exp[i\{(\omega_0 + \delta\omega)t - p(\mathbf{x})\}] \quad (55)$$

と書く。時間と位置が $(dt, d\mathbf{x})$ だけ変化すると、角周波数 ω_0 の局所的平面波に対する式 (52) の条件のほかに、

$$\delta\omega dt - \left(\frac{d(\text{grad } p)}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \delta\omega d\mathbf{x} = 0 \quad (56)$$

が現れ、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 1 / \left(\frac{d(\text{grad } p)}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} = (d\omega/d\mathbf{k})_{\omega=\omega_0} \quad (57)$$

が導かれる。 $\omega_0 - \delta\omega$ の場合も同様の条件が導かれ、式 (57) は $\delta\omega \rightarrow \pm 0$ で成り立つ。これは、角周波数 ω_0 周辺の波群が、 $d\omega/d\mathbf{k}$ で伝播することを意味し、群速度 (group velocity: v_{group}) と呼ばれる (深尾, 1978; Carcione, 2007)。

ω が $\mathbf{k}$ に比例すれば、 $d\omega/d\mathbf{k} = v$ で群速度は位相速度に等しいが、次に見るように両者に依存関係があれば、位相速度と群速度に違いが出る。依存関係には ω が $\mathbf{k}$ の大きさに依存する場合と方向に依存する場合とがある。前者の例として $|\mathbf{k}|$ の値が方向によらない場合を考える。Fig. 9 (a) に示すように位相速度 v が ω によって変化すれば、 v は k - ω 間の比例関係を示す係数（原点から点 (k, ω) への勾配）で、周波数ごとに異なる値を示す。 (k, ω) 点の局所的勾配が群速度 $d\omega/d\mathbf{k}$ で一般に v と一致しない。

Fig.9 Frequency dispersion relationship.

(a) The phase velocity changes with respect to the angular frequency ω .

(b) The relationship between the wavenumber k and the angular frequency ω .

For constant velocity (no dispersion), k and ω show a linear relationship. In anisotropic media, the slope of the linear relationship between k and ω depends on the propagation direction as shown in Fig. 10.

後者の例は異方性の均質媒質で、 v が $\mathbf{k}$ の方向に依り、 k - ω 関係が直線であっても、その傾きは $\mathbf{k}$ の方向によって変化する場合である。TI 媒質では、回転対称軸（主軸： x_3 軸とする）から等方位（ x_1 軸を含む面）までの全方位を、主軸からの角度 θ だけで表すことができ、 k_1 - k_3 面で $\mathbf{k}$ が表現できる。Fig. 10 のように k_1 - k_3 面上に ω 軸を立てると、原点から斜めに伸びる直線の傾きが位相速度を示し、傾きは k_1 - k_3 面上の方位角 θ によって変わる。つまり、位相速度を示す直線を $\mathbf{k}$ の各方向にプロットして形成されたコーン状の面は凹凸を持つ。この面上で $\omega = \omega_0$ の面との交線の局所的傾斜が v_{group} ($\text{grad}_{\mathbf{k}} \omega|_{\omega=\omega_0} = (d\omega/dk)|_{\omega=\omega_0}$) である。面に凹凸があるので、傾斜の方向が原点を向くとは限らない。交線を k_1 - k_3 平面上に投影したものは $1/v$ （スローネス）の θ に対する分布を示し、 $\text{grad}_{\mathbf{k}} \omega|_{\omega=\omega_0}$ を k_1 - k_3 平面に投影した直線と局所的に直交する。この直線の方法は v_{group} の方向で、点震源からの波の方向（波線方向）となるので、 v_{group} を波線速度とも呼ぶ (Thomsen, 1986, 2002;

Fig.10 Directional dispersion of the qS wave in TI media.

(a) The relationship between ω and $\mathbf{k}$. The angular frequency ω is shown as a function of the wavenumber vector $\mathbf{k}$ for the TI type anisotropy.

The surface is determined by the frequency-wave number relationship, equation (33). Small arrows show gradients at the surface of given by of equation (33).

(b) (b-1) A projection of the surface on the $\mathbf{k}$ plane.

The $|\mathbf{k}|$ - ω slope varies by the azimuth of $\mathbf{k}$ on the k_1 - k_3 plane as shown in (b-2). The slope forms a curved cone surface around the ω axis. The propagation direction of the wave is shown by arrows projected on the k_1 - k_3 plane, which show the gradients of the curved surface. The projection of the equiphase curve ($\omega = \text{const.}$) on the k_1 - k_3 is the curve of $\omega \times \text{slowness}$, with which the direction of the group velocity intersects orthogonally. The equation (eq:VgroupGeneral) will be explained from the triangle highlighted by the circle. $d\omega/dk = \tan(\xi - \pi/2)$, and $\cos \xi$ and $\sin \xi$ are $d\omega/d\Psi$ and $dk/d\Psi$, respectively.

Carcione, 2007).

なお、上の問題は、 $\text{grad}_{\mathbf{k}} \omega$ を、式 (33) の条件で求めているので、一般的に群速度は式 (33) の左辺を Ψ として、 $\Psi(k_1, k_2, k_3, \omega) = 0$ を条件として Ψ を $\mathbf{k}$ で微分すると、

$$\text{grad}_{\mathbf{k}} \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \text{grad}_{\mathbf{k}} \omega = 0$$

より (森口ほか, 1956),

$$v_{\text{group}} = \text{grad}_{\mathbf{k}} \omega = -\frac{\text{grad}_{\mathbf{k}} \Psi}{\partial \Psi / \partial \omega} \quad (58)$$

となる (Mavko et al., 1998; Carcione, 2007)。これが v_{group} 一般的表現である。Fig. 10 には式 (58) を図解したものを入れている。

遠方から到来する地震波の速度を、伝播距離に比べ狭い領域の観測で決めると、観測される地震波は平面波であるので位相速度が得られる。いっぽう、震源からの距離と同程度の領域の観測では、点震源から広がる波を観測するので、波動の伝播領域が異方性を持てば群速度を見ていることになる。

ω は k_1, k_2, k_3 の関数であるが、これを波数空間での極座標系, k, θ, ϕ で表現し、変換関係 $(\partial\omega/\partial k_1, \partial\omega/\partial k_2, \partial\omega/\partial k_3) \rightarrow (\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial\theta, \partial\omega/\partial\phi)$ を用いて $\text{grad}_k \omega (= v_{\text{group}})$ を計算することができる (森口ほか, 1956)。 $\omega = v(\theta, \phi)k$ を (k, θ, ϕ) で微分した

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = v, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\theta} = k \frac{\partial v}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\phi} = k \frac{\partial v}{\partial\phi}$$

を代入すると、 $\text{grad}_k \omega$ の各成分

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial k_1} &= v \sin\theta \cos\phi + \cos\theta \cos\phi \frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\sin\theta} \frac{\partial v}{\partial\phi} \\ \frac{\partial\omega}{\partial k_2} &= v \sin\theta \sin\phi + \cos\theta \sin\phi \frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\sin\theta} \frac{\partial v}{\partial\phi} \\ \frac{\partial\omega}{\partial k_3} &= v \cos\theta - \sin\theta \frac{\partial v}{\partial\theta} \end{aligned}$$

が得られ、

$$v_{\text{group}}^2 = v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial v}{\partial\phi} \right)^2 \quad (59)$$

となる。異方性が TI であれば、右辺第三項が消える。また、 $\tan\psi$ は v_{group} の成分の比 $(\partial\omega/\partial k_1)/(\partial\omega/\partial k_3)$ であるから、

$$\tan(\psi(\theta)) = \left(\tan\theta + \frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta} \right) / \left(1 - \frac{\tan\theta}{v} \frac{dv}{d\theta} \right). \quad (60)$$

となる。

$v_{\text{group}}(\theta)$ とその方向を示す $\psi(\theta)$ は θ によって変化するが $v_{\text{group}}(\theta)$ は $\psi(\theta)$ の一価関数ではない。このため、 v_{group} は ψ に対し縮重することがあり、 v_{group} を ψ に対してプロットした図にカスプが現れる (Fig. 11)。Fig. 11 は黒雲母片岩における qS 波の v_{group} の ψ に対する方位分布を示し、細い線はクラックのない岩石、太い線は岩石中のクラック中に気体を含む場合である (西澤・金川, 2009)。岩石がクラックを含むと v_{group} の方位分布図中でカスプが現れる ψ の範囲が狭くなる。

ここまでは弾性波の速度を周波数ごとの同位相部分の伝播として定義してきたが、パルス波形を追跡した研究

Fig.11 An example of the group velocity triplexation. The group velocity of qS wave shows triplexation when the phase velocity becomes significantly large around the off-axis directions. The angle of this figure is not equal to θ but ψ which is shown in Fig. 10, indicating the direction of the group velocity.

もある。Sakai and Kawasaki (1990) は TI 媒質でのパルス波の伝播を調べ、 qS 波と同じように速度の縮重が起こることを示した。

4. 地震波速度の測定

岩石の地震波速度は野外観測でも決められるが、微細構造の影響などを詳しく調べるためには実験室での測定が必要である。実験室でよく使われる方法はパルス透過法で、圧電素子を岩石試料に貼り、これにパルス電圧を印加して超音波を発生させ、超音波が試料を透過する時間と距離から弾性波速度を決める。長さの異なる標準試料に対する信号透過時間を同一条件で計測して、回路内の信号の遅れや、圧電素子の駆動に要する遅れ時間などのオフセット補正を行う。

いっぽう、結晶などの均質試料では反射波の位相の重ね合わせ (McSkimin, 1964) や、共振による弾性定数の決定法 (Demarest, 1971; Ohno et al., 2000; Isaak and Ohno, 2003) が用いられ、精密な測定が可能である。しかし、岩石では不均質構造による波形の乱れが大きく、微小な不均質による散乱波が生じて、エネルギーを媒質内に散逸させ、反射波など後続するシグナルに重なるため、多くの場合、上記の方法による精密測定は困難である。

通常、圧電素子からは P 波、 S 波に対応する振動が発生する。振動の粒子速度や加速度を時間に対して記録

Fig.12 Energy radiation patterns for the 5-mm diameter disc shaped piezoelectric transducers with surface dilation and surface shear. The radiation patterns are calculated for the 500-kHz harmonic source signal. Figures are modified from Fukushima et al. (2009).

し、この波形の最初の立ち上がり時刻から弾性波速度を決めることが多い。Fig. 12 は円盤状の圧電素子が厚さ方向に伸び縮みした場合と、円盤面にずれが発生した場合とに生じる振動エネルギーの方位依存性を示したものである (Tang et al., 1994; Fukushima et al., 2009)。どちらの場合にも P 波、 S 波が発生する。波形を扱うときは、圧電素子からの放射パターンの特徴も考慮しなければならない。

パルス透過法など透過弾性波による方法では、初動の立ち上がりで波の走時を決める場合と、同じ周波数の波形の位相遅れから決める方法があるが、いずれの場合も注意が必要である。パルスの立ち上がりは高周波極限の波の到達を意味し (Aki and Richards, 2002; 蓬田, 1989)、計測される波の速度は高周波極限の波の速度に対応するが、実際の波動の立ち上がりはそれほど急峻ではなく、高周波極限の弾性波速度とは言えない。一方、位相の遅れから速度を決める方法では、対象とする波形部分に卓越して含まれる周波数の波の位相速度を見ていることになるが、実験条件が変わると含まれる周波数スペクトルが変化することが多く、位相速度を正確に決めることが困難になる。さらに、異方性媒質では計測される速度が位相速度か群速度かという問題もある。Dellinger and Vernik (1994) は実験室では通常位相速度が計測されていると結論とした。

5. 不均質媒質の弾性的性質

5.1 多結晶媒質の弾性的性質

岩石は多数の鉱物結晶粒子の集合体である。岩石内部に空隙や割れ目が存在しなければ、岩石の弾性的性質は構成鉱物の弾性的性質に支配される。鉱物の弾性的性質は弾性定数 c_{ijkl} (あるいは弾性コンプライアンス s_{ijkl}) で表されるので、それぞれの結晶軸方位を持つ鉱物が岩石に固定された座標軸で示す弾性定数を求め、各々が占める体積割合を重みとして平均化すれば岩石の弾性定数が得られる。

岩石に固定された座標軸に対する弾性定数 c'_{ijkl} は、式 (26) より求められるので、 N 個の鉱物の集合に対する弾性定数は、

$$c'_{ijkl} = \sum_{v=1}^N [c_{mnpq}^{(v)} \ell_{mi}^{(v)} \ell_{nj}^{(v)} \ell_{pk}^{(v)} \ell_{ql}^{(v)}] \chi^{(v)} \quad (61)$$

となる。 $c_{mnpq}^{(v)}$, $\chi^{(v)}$, $\ell_{mi}^{(v)}$ 等はそれぞれ、 v 番目の結晶の弾性定数、体積割合、および式 (26) の方向余弦である。単一鉱物から成る岩石の弾性定数 $\bar{c}_{ijkl}$ は、

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ijkl} &= \int_{\Omega} w(\Omega) c_{mnpq}(\Omega) d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} w(\theta, \psi, \phi) c_{mnpq} \ell_{mi} \ell_{nj} \ell_{pk} \ell_{ql} \\ &\quad \times \sin \theta d\theta d\psi d\phi \end{aligned} \quad (62)$$

となる。 $w(\Omega)$ は方位立体角 Ω 内に配向している結晶の割合を表す。 $w(\Omega)$ の値は、走査型電子顕微鏡 (SEM) の電子線後方散乱回折 (EBSD) による結晶の方位分布から得られる。向きが完全に均等、すなわちランダムであれば、 $w(\Omega)$ は一定値 $1/8\pi^2$ となり、

$$\bar{c}_{ijkl} = \frac{1}{8\pi^2} c_{mnpq} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \ell_{mi} \ell_{nj} \ell_{pk} \ell_{ql} \sin \theta d\theta d\psi d\phi \quad (63)$$

となる。式 (63) の被積分項 $\ell_{mi} \ell_{nj} \ell_{pk} \ell_{ql} \sin \theta$ は、 $\sin$, $\cos$ の関数であるため、積分区間での周期変動に従い、値がゼロとなる添え字の組が現れ、 $\bar{c}_{ijkl}$ は c_{mmmm} , c_{mnpmp} , c_{mpmp} だけで表される (大南ほか, 1980)。鉱物がランダムに配向した場合の弾性定数の計算方法を付録 A. 1 に示す。このとき岩石は等方性となり、弾性定数は 2 個 (体積弾性係数とせん断弾性係数 K , μ , Lamé の定数, λ , μ , ヤング率とポアソン比 E , ν) だけである。

式 (付録. 1.3), (付録. 1.4) を用いた各種鉱物の弾性定数の計算結果は、Simmons and Wang (1971) に記載され

ている。同等の計算が s_{ijkl} に対しても可能である。 $\bar{c}_{ijkl}$ はフォークト (Voigt) 平均, $\bar{s}_{ijkl}$ はロイス (Reus) 平均で, 上記文献にそれぞれの値が記載されている。 $w(\Omega)$ が得られた場合は, Mainprice (1990) が公表している計算プログラムによって $\bar{c}_{ijkl}$ または $\bar{s}_{ijkl}$ を求めることができる。

5.2 空隙や割れ目を含む岩石の弾性的性質

地下の岩石には空隙や割れ目が存在し, 空隙や割れ目の中にはガスや水などの流体が存在する。このとき, 空隙や割れ目をマトリックス中に発生した介在物 (inclusion) と考え, マトリックスと介在物の弾性定数から介在物を含む媒質の巨視的弾性定数を計算し, 岩石の弾性定数とする。巨視的弾性定数を求めるには, マトリックス中に介在物が発生したときのエネルギー (熱力学ポテンシャル) 変化を計算する。式 (22), (23) で示したように, 弾性定数が熱力学ポテンシャルのひずみに対する 2 階微分であることから, Φ をヘルムホルツの自由エネルギーとすると,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = c_{ijkl} \quad (64)$$

となる。 Φ がギブスの自由エネルギーであれば,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} = c_{ijkl}^{-1} = s_{ijkl} \quad (65)$$

となる。

以下では, 応力を変数とした場合を取り上げる。介在物を含まないマトリックスだけの媒質に外力が作用すると, 媒質内部に均一な応力・ひずみの状態 σ_{ij}^A, e_{ij}^A が現れる。応力とひずみのない初期状態からの熱力学ポテンシャル変化量を Φ_0 とする。媒質内の一部の領域が介在物に置き換わると, 熱力学ポテンシャルは $\Delta\Phi$ だけ変化する。このとき, 外力が変化しなければ, $\Delta\Phi$ は外力が作りだした応力場と介在物が発生したときの変形によって生じる仕事量に等しい。以下では, 介在物を含む媒質を巨視的均質媒質とみなし, その弾性コンプライアンスを c_{ijkl}^* として, この値を決める方法を考える。

等価均質媒質中の平均応力場が変化しないと考えると, その弾性エネルギーは

$$\Phi_0 + \Delta\Phi = \frac{1}{2} c_{ijkl}^*{}^{-1} \sigma_{ij}^A \sigma_{kl}^A \quad (66)$$

と書くことができる。 c_{ijkl}^* を実効弾性定数と呼ぶ。介在物を含まない媒質の弾性変形による熱力学ポテンシャル

変化量は, 式 (13) より,

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^A e_{ij}^A = \frac{1}{2} s_{ijkl}^0 \sigma_{ij}^A \sigma_{kl}^A = \frac{1}{2} c_{ijkl}^0{}^{-1} \sigma_{ij}^A \sigma_{kl}^A \quad (67)$$

であるから, $\Delta\Phi$ を σ_{ij}^A と既知の弾性定数で表すことができる。式 (66) の左辺が $\sigma_{ij}^A \sigma_{kl}^A$ の項で表される。ポテンシャルの応力に対する二階偏微分が $c_{ijkl}^*{}^{-1}$ であることから, 式 (66) を σ_{ij}^A で 2 階偏微分して,

$$c_{ijkl}^*{}^{-1} = c_{ijkl}^0{}^{-1} + \Delta c_{ijkl}{}^{-1} \quad (68)$$

と表すこともできる。ここで, $\Delta c_{ijkl}{}^{-1}$ が $\Delta\Phi$ に起因する弾性コンプライアンス変化である。式 (66) あるいは式 (68) を $c_{ijkl}^*{}^{-1}$ と既存のコンプライアンス (マトリックス部分のコンプライアンス $c_{ijkl}^0{}^{-1}$ と介在物のコンプライアンス $c_{ijkl}'{}^{-1}$) だけの関係式で書くことができれば問題は解決する。

同様の式を, ひずみ e_{ij}^A が変化しない場合について書くことができるが, ポテンシャル変化量の絶対値は等しく符号が異なり (Eshelby, 1957; 竹内, 1972; 西澤, 2005), 対応するポテンシャルもギブスの自由エネルギーではなく, ヘルムホルツの自由エネルギーとなる。

介在物を含む媒質の弾性定数 (弾性コンプライアンス) の計算法は, これまでに数多く提案されているが (Mavko et al., 1998), それらはおおむね式 (66) あるいは式 (68) に基づいており, 相違点は補正項 $\Delta\Phi$ に相当する部分の計算法と, 介在物の量比が増したときの σ_{ij}^A の評価である。とくに, 後者はクラックの密度が大きい岩石を扱う際に問題となる。

$\Delta\Phi$ (あるいは $\Delta c_{ijkl}{}^{-1}$) をマトリックスや介在物のコンプライアンス $c_{ijkl}^0{}^{-1}, c_{ijkl}'{}^{-1}$ で表現する場合と, 新たに求めるべきコンプライアンス $c_{ijkl}^*{}^{-1}$ で表現する場合とがある。前者は介在物の量が少ない場合に成立し, 後者は介在物の量が多い場合にも有効とされ, 自己無撞着 (self-consistent) 法と呼ばれる (Budiansky and O'Connell, 1976; Mainprice and Humbert, 1994)。

$\Delta\Phi$ の計算には, 静的変形を仮定する場合と, 波動場の変化から評価する方法とがある。静的変形は低周波極限あるいは弾性波の波長が無限大の場合に相当する。野外で観測される地震波の波長に比べ, 岩石中の鉱物粒子や割れ目・空隙は十分小さいので, 地震波速度の問題は静的変形を仮定してよい。波動場を扱う方法では, $\Delta\Phi$ の波長依存性を考慮し, また, 振動の際の応力とひずみの位相ずれも扱うため, 地震波エネルギーの散逸を考慮できる (Hudson, 1981)。

Eshelby (1957) は stress-free strain を用いて静的変形時の $\Delta\Phi$ を表現した。stress-free strain は固有ひずみ (eigen strain) あるいは転移ひずみ (transformation strain) と呼ばれ、熱膨張など、媒質内部に弾性的応力を伴わないひずみである。Eshelby (1957) によれば、 $\Delta\Phi$ は介在物の形状とマトリックスの弾性定数によって定まるテンソル S_{ijkl} を用いて表現できる。この方法は、空隙やクラックを含む媒質の弾性定数計算法で頻繁に利用されているので、付録 A.2 にその概要を記した。

Garbin and Knopoff (1973), Garbin and Knopoff (1975) は応力下でのクラックの発生によるマトリックスの弾性的変形を求め、エネルギー量を計算した。クラックの変形量からエネルギーを求める手法は理解しやすいため、よく使われる。Budiansky and O'Connell (1976) はクラック先端の応力集中域が持つエネルギー量を Rice の J -積分 (岡村, 1976) で計算した。 J -積分はクラック先端のエネルギーを計算する手法で、応力拡大係数と媒質の弾性定数から求めることができる。応力拡大係数はクラックの形状とクラックの破壊様式、およびクラックの長さから決まる量である。それぞれ方法は違うが、いずれも基本は $\Delta\Phi$ を評価することである。

ところで、クラックのように扁平な形状を持つものに対して、 $\Delta\Phi$ は σ_{ij}^A とクラックの方位関係が大きく影響する。Kachanov (1992), Grechka and Kachanov (2006b) は後で述べるテンソル形式のクラック密度パラメータを導入し、 $\Delta\Phi$ のクラック方位依存性を表現した。この手法は、選択配向したクラックを含む媒質にも適用できる。ほかに Hudson (1981), Nishizawa (1982) も定方位配列したクラックを扱っている。

5.3 クラック密度パラメータ

介在物を含む媒質の弾性定数 (弾性コンプライアンス) の変化量はポテンシャル変化 $\Delta\Phi$ に依存する。次の問題は、 $\Delta\Phi$ と空隙や割れ目量の関係を決めることである。

岩石内部に等しい半径 a を持つ球形の空隙が分布したとき、空隙どうしが重なりあわなければ、空隙の数は空隙率に比例する。一方、クラックのように扁平な形状の空隙では、クラック数は空隙率と、短軸と長軸の比で表わした扁平度 α にも依存する。個々のクラックの体積は $(4\pi/3)\alpha a^3$ となり、体積 V 中の空隙数を N とすると、空隙率 χ は

$$\chi = \left(\frac{4\pi}{3} \alpha a^3 N \right) / V = \frac{4\pi}{3} \alpha a^3 v \quad (69)$$

となる。 v は単位体積あたりの空隙数である。実際は a , α ともさまざまな値のものが分布しているので、これらの平均値 $\langle a \rangle$, $\langle a^3 \rangle$ を用いる。 $\langle a^3 \rangle v$ に相当する量をクラック密度パラメータと呼び ε で表す (Budiansky and O'Connell, 1976; Hudson, 1981)。 ε と χ の間の関係は

$$\varepsilon = \frac{3\chi}{4\pi\alpha} \quad (70)$$

である。 ε が小さい領域では、 $\Delta\Phi$ は ε に比例して変化する。

Sayers and Kachanov (1995), Kachanov (1992) は、個々のクラックの方向を考慮に入れたクラックパラメータを導いた。彼らのモデルによれば、弾性コンプライアンス s_{ijkl}^0 のクラックによる補正項 Δs_{ijkl} は次式のように 2 階、4 階のテンソルで表現される。

$$\Delta s_{ijkl} = \frac{1}{4} (\delta_{ik} \xi_{jl} + \delta_{il} \xi_{jk} + \delta_{jk} \xi_{il} + \delta_{jl} \xi_{ik}) + \zeta_{ijkl} \quad (71)$$

ただし、 δ_{ij} は式 (33) の場合と同じく、 $i = j$ で 1, $i \neq j$ で 0 で、 ξ_{ij} , ζ_{ijkl} は以下で示されるテンソルである。

$$\xi_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^N B_T^{(v)} n_i^{(v)} n_j^{(v)} A^{(v)} \quad (72)$$

$$\zeta_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^N [B_N^{(v)} - B_T^{(v)}] n_i^{(v)} n_j^{(v)} n_k^{(v)} n_l^{(v)} A^{(v)} \quad (73)$$

ここで上付添え字 (v) はクラックの番号を示し、 $n_i^{(v)}$ はクラック面法線の x_i 軸に対する方向余弦、 $B_N^{(v)}$, $B_T^{(v)}$ は面に垂直および横ずれの変形に対するコンプライアンスで、 $A^{(v)}$ はクラックの面の面積である。これらの式には各クラックの形状だけでなく方向も考慮されている。Sayers and Kachanov (1991) は、式 (72) の $B_N^{(v)}$, $B_T^{(v)}$ を除いた項を用いてランダム配向クラックのクラック密度テンソルを定義し、従来のクラック密度パラメータとの関係を議論した。式 (72), (73) は最近よく利用される。Sayers (1999), Sayers (2002) は、クラックのような空洞部分の変形だけでなく、岩石中の粒子接触部の変形にも同様の式を適用し、泥岩や砂岩の弾性的性質を議論した。

クラックを含む媒質と含まない媒質の弾性波速度の比 v/v_0 は、クラック量が少ない領域ではクラックによる岩石の密度変化が小さい ($\rho_0 \sim \rho$) として、

$$\left(\frac{v}{v_0} \right)^2 = \frac{(C_0 + \Delta C)/\rho}{C_0/\rho_0} \approx 1 + \frac{\Delta C}{C_0} \quad (74)$$

となる。速度比の 2 乗はそのまま弾性定数変化の目安となる。多くの研究は、クラック密度の小さい領域 ($\varepsilon \leq$

0.1) で, $(v/v_0)^2$ がクラック密度に比例することを示している。この関係は, 観測や実験の結果の解釈に使われる (Soga et al., 1978)。

5.4 クラック間相互作用

クラック密度 ε が大きい場合は $\Delta\Phi$ を等価媒質の弾性定数で表現する self-consistent 法が使われるが (Budiansky and O'Connell, 1976), クラック密度の小さい場合の計算法を拡張することもできる。

ε が小さいとき, クラック間の相互作用はなく, 空隙やクラックの形状を決めれば, 熱力学ポテンシャル変化量は介在物の体積割合に比例すると考えてよいだろう。しかし, ε が大きくなると, 介在物同士が近づき, クラック間相互作用によって媒質内部の応力場が乱されるため, 外力が変化しなくても介在物内の応力は σ_{ij}^A では正確に表現できず, 単純に $\Delta\Phi \propto \chi$ とすることはできない。Sayers and Kachanov (1995), Kachanov (1992), Grechka and Kachanov (2006a), Grechka and Kachanov (2006b) はクラック密度が高い場合も相互作用を考慮する必要はないとしているが, これは, クラック間相互作用によるエネルギーの変化は, 相殺できると考えることによる。しかし, 相互作用を別の方法で評価する研究もある。

Mori and Tanaka (1973) は, 介在物の形状が決められたとき, 介在物の体積比率 χ の大きな領域では平均的応力場は $(1-\chi)\sigma_{ij}^A$ 程度となり, $\Delta\Phi \propto (1-\chi)\chi$ とするのが妥当であるとした。Yamamoto et al. (1981) や Norris (1985) は χ の値を小さくして, 式 (66) を繰り返し計算することで, クラック量の大きい場合の相互作用が内在的に考慮されているとした。微小量のクラックに対して得たコンプライアンス c_{ijkl}^{*-1} を新たに c_{ijkl}^{0-1} と考え, n 番目から $n+1$ 番目へのステップで $c_{ijkl}^{*(n)-1} = c_{ijkl}^{0(n+1)-1}$ の置き換えをして逐次的に $c_{ijkl}^{*(n+1)-1}$ を求め, 目的とするクラック密度まで繰り返すことで, クラック相互作用が実質的に考慮される。この計算法では各計算ステップでのクラック増加幅の大きさに依存して計算結果がわずかに異なるが, Yamamoto et al. (1981) は σ_{ij}^A を一定とする場合と e_{ij}^A を一定とする場合のそれぞれの結果が弾性定数の下限と上限を与えることから, 増加幅をできるだけ小さくして上限と下限の平均をとることで解決できるとした。

σ_{ij}^A = 一定, と e_{ij}^A = 一定, の二つの条件では, 系の

弾性エネルギー変化量の絶対値は等しく逆符号となる (Eshelby, 1957; 竹内, 1972)。実際の岩石内部は, 応力, ひずみとも複雑な分布をしており, ふたつの両極端の状態が混じりあったものであるから, Yamamoto et al. (1981) の提案は Fig. 2 (b) で示したふたつの状態の平均で Voigt-Reuss-Hill 平均 (Hill, 1952) と同じ意味を持つ。

5.5 クラックが選択配向した場合の速度異方性

クラックのような扁平な介在物が定方位配列すると, マトリックスが等方性であっても, 巨視的等価媒質は異方性を示す。とくに, クラック面が同一方向に配列すれば TI となる。Anderson et al. (1974) はクラックを扁平な回転楕円体と考え, Eshelby (1957) の手法を用いて定方位配列したクラックを含む岩石の弾性定数を計算した。Hudson (1981) は, 扁平なクラックが定方位配列した場合の弾性定数を, 波動場でのクラックからの散乱によるエネルギー変化にもとづいて計算した。Hudson の手法は, クラックによる異方性の観測と解釈を精力的に行ってきた Crampin のグループの主要な解析手法となった (Crampin, 1984, 1991)。しかし, これらの方法はクラック量が少ない場合にのみ, 有効である。

クラック間相互作用が生じるクラック量の多い場合については, Yamamoto et al. (1981) の手法が適用できるが, 計算の各ステップで定方位配列したクラックによって TI 媒質となった等価媒質をマトリックスとしなければならない。しかし, Eshelby (1957) では等方性マトリックスの計算結果しか示されていない。Nishizawa (1982) は村・森 (1976), Kinoshita and Mura (1971), Lin and Mura (1973) に示された TI マトリックスにおける Eshelby テンソル S_{ijkl} の数値計算法を各計算ステップで使い, クラック数の多い場合の計算を行った。計算法のポイントは, 付録 B の式 (付録. 2.14) の関係式に現れる Eshelby のテンソルを導出するための, 式 (付録. 2.15) におけるグリーン関数の計算を TI 媒質に拡張することにある。この方法は, 泥岩 (shale) の地震波速度異方性 (Hornby et al., 1994) や 地球内核の地震波速度異方性の研究 (Singh et al., 2000) にも使われた。

6. まとめ

岩石の地震波速度は, 含まれる鉱物に支配されるが, 空隙や割れ目の影響もこれに劣らず重要である。地下深部にも石油や天然ガスが存在することは, 空隙や割れ目

が地下数 1000 m の深度でも閉鎖していないことを示している。地震波速度を決定づける物理的要因を、岩石物性から明らかにすれば、空隙や割れ目の状態とその中に含まれる流体相を推定することができる。異方性はそのための重要な手がかりである。異方性はまた、探査データ処理法にも影響するので (Thomsen, 1986, 2002), 異方性を考慮することにより、地震波観測データを正しく解釈することができる。

クラックモデルは岩石中に存在するクラックの実態と完全に一致しているわけではないが (Tapponnier and Brace, 1976), 岩石の地震波速度の解釈にとって有効である。クラックモデルの多くは空隙やクラックが発生したときの岩石の弾性エネルギーの変化に基づいて構築され、これらを理解するには弾性体の熱力学からのアプローチが有効である。ここではこの考えに基づき、弾性論を基礎から記述した。地震波速度異方性の観測では、計測される地震波速度が位相速度と群速度のどちらであるかを知ることも必要である。そのため、地震波の分散について少し詳しく記述した。また、地震波探査の文献に頻繁に出てくる Thomsen の異方性パラメータについても、簡単な説明を試みた。

ここでは原理的部分に話題を限定し、速度異方性の検出や計測値など、個別の問題には触れていない。物理探査に関する理論と野外での研究例については Carcione (2007), Thomsen (2002) や MacBeth (2002) などに詳しい記載がある。石油、地盤・岩盤関係で岩石物性の立場から見た異方性の具体例は別の稿で紹介したい。

謝 辞

投稿の機会を与えていただいた物理探査学会学会誌編集委員会、および、貴重な修正意見をいただいた匿名の査読者の方に感謝いたします。

参考文献

- Aki, K. and Richards, P. G. (1980): *Quantitative Seismology*, Freeman, San Francisco.
- Aki, K. and Richards, P. G. (2002): *Quantitative Seismology 2nd edition* University Science Books, 邦訳：上西幸司・亀伸樹・青地秀雄，地震学 定量的アプローチ，古今書院，2004.
- Anderson, D. L., Minster, B. and Cole, D. (1974): The effect of oriented cracks on seismic velocities, *J. Geophys. Res.*, **79**, 4011-4015.
- Anderson O. L., Isaak D. G. (1995): Elastic constants of mantle minerals at high temperature. In: Ahrens T. J. (ed) *Mineral physics and crystallography, a handbook of physical constants*, (AGU Ref Shelf 2) American Geophysical Union, Washington, DC.
- Berryman, J. G. (2008): Exact seismic velocities for transversely isotropic media and extended Thomsen formulas for stronger anisotropies, *Geophysics*, **73**, D1-D10.
- Biot, M. A. (1956a): Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 168-178.
- Biot, M. A. (1956b): Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 179-190.
- Budiansky, B. and O'Connell, R. J. (1976): Elastic moduli of a cracked solid, *Int. J. Solid Struct.*, **12**, 81-97.
- Carcione, J. M. (2007): *Wave fields in real media: wave propagation in anisotropic, anelastic, porous, and electromagnetic media*, 2nd ed., in Handbook of Geophysical Exploration, **38**, Elsevier.
- Crampin, S. (1984): Effective anisotropic elastic constants for wave propagation through cracked solids, *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, **76**, 147-156.
- Crampin, S. (1989): Suggestions for a consistent terminology for seismic anisotropy, *Geophysical Prospecting*, **37**, 753-770.
- Crampin, S. (1991): Wave propagation through fluid-filled inclusions of various shapes: interpretation of extensive-dilatancy anisotropy, *Geophys. J. Int.*, **104**, 611-623.
- Dellinger, J., Vernik, L. (1994): Do travel times in pulse-transmission experiments yield anisotropic group or phase velocities? *Geophysics*, **59**, 1774-1779.
- Demarest, H. H. (1971): Cube-resonance method to determine the elastic constants of solids, *J. Acoust. Soc. Am.*, **49**, 768-775.
- Eshelby, J. D. (1957): The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc.*, **A241**, 376-396.
- 深尾良夫 (1978): 古典的地震学, 金森博雄編, 岩波講座・地球科学 8, 地震の物理, 岩波書店.
- Fukushima, Y., Nishizawa, O., and Sato, H. (2009): A performance study of a laser Doppler vibrometer for measuring waveforms from piezoelectric transducers, *IEEE Trans. Ultrasonics Ferroelect. Freq. Control*, **56**, 1442-1450.
- Garbin, H. D. and Knopoff, L. (1973): The compressional modulus of a material permeated by a random distribution of circular cracks, *Q. Appl. Math.*, **30**, 453-464.
- Garbin, H. D. and Knopoff, L. (1975): The shear modulus of a material permeated by a random distribution of free circular cracks, *Q. Appl. Math.*, **33**, 296-300.
- Grechka, V. and Kachanov, M. (2006): Effective elasticity of rocks with closely spaced and intersecting cracks, *Geophysics*, **71**, D85-D91.
- Grechka, V. and Kachanov, M. (2006): Effective elasticity of fractured rocks: A snapshot of the work in progress, *Geophysics*, **71**, W45-W58.
- Guéguen, Y. and Palciauskas, V. (1994): *Introduction to the Physics of Rocks*, Princeton University Press, 邦訳：岩石物性入門 (西澤 修・金川久一訳) シュプリンガー・ジャパン, 2008.
- Guéguen, Y., Dormieux, L., and Boutéca, M. (2004): Fun-

- damentals of Poromechanics, In Guéguen and Boutéca edit., *Mechanics of Fluid Saturated Rocks*, Elsevier Academic Press, 1-54.
- Hill, R. (1952): The elastic behavior of a crystalline aggregate, *Proc. Phys. Soc. London*, **65**, 349-354.
- Hornby, B. E., Schwartz, L. M., Hudson, J. A. (1994): Anisotropic effective-medium modeling of the elastic properties of shales, *Geophysics*, **59**, 1570-1583.
- Hudson, J. A. (1981): Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **64**, 133-150.
- Isaak, D. G. and Ohno, I. (2003): Elastic constants of chrome-diopside: application of resonant ultrasound spectroscopy to monoclinic single-crystals, *Phys. Chem. Minerals*, **30**, 430-439.
- 井田喜明(1982): 地球を構成する物質の弾性, 秋本俊一・水谷仁編, 岩波講座・地球科学2, 地球の物質科学・(高压高温の世界), 岩波書店.
- Kachanov, M. (1992): Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts, *Appl. Mech. Rev.*, **45**, 304-335.
- 笠原順三・鈴木 功・熊沢峰夫・小林洋二・飯田汲事(1968a): Dunite の P 波異方性, 地震, **21** 222-228.
- 笠原順三・鈴木 功・熊沢峰夫・飯田汲事(1968b): Dunite の S 波異方性, 地震, **21** 229-236.
- 川村雄行(1996): 岩波講座・地球惑星科学5, 第1章, 地球と惑星を構成する鉱物の構造, 鳥海光弘編, 岩波書店, 1-39
- Kinoshita, N. and Mura, T. (1971): Elastic field of inclusions in anisotropic media, *Phys. Status Solidi*, **Ser. A**, **5**, 859-768.
- Le Ravalec, M., Gueguen, Y. (1996): Comments on "The elastic modulus of media containing strongly interacting cracks" by Paul M. Davis and Leon Knopoff, *J. Geophys. Res.*, **101**, 25373-25375.
- Landau, L. L. and Lifshitz, I. M. (1965): *Theory of elasticity*, 3rd edit., Butterworth-Heinemann, (邦訳: 佐藤常三, 1972, 弾性理論, 東京図書)
- Lin, S., Mura, T. (1973): Elastic fields of inclusions in anisotropic media (II). *Phys. Status Solidi*, (**a**) **15**, 281-285.
- Love, A. E. H. (1927): *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, London, (4th ed. Dover Publications, New York, 1944)
- MacBeth, C. (2002): *Multi-component VSP Analysis for Applied Seismic Anisotropy*, Helbig, K. and Treitel, S. eds., Handbook of Geophysical Exploration, Pergamon.
- Mainprice, D. and Humbert, M. (1994): Methods of calculating petrophysical properties from lattice preferred orientation data. *Surveys Geophys.*, **15**, 575-592.
- Mainprice, D. (1990): A FORTRAN program to calculate seismic anisotropy from the lattice preferred orientation of minerals, *Computers & Geosciences*, **16**, 385-393. ソフトウェア ftp://www.gm.univ-montp2.fr/mainprice/CareWare_Unicef_Programs/
- Markov, M., Levine, V., Mousatov, A., and Kazatchenko, E. (2005): Elastic properties of double-porosity rocks using the differential effective medium model, *Geophys. Prospect.*, **53**, 733-754.
- Soga, N., Mizutani, H., Spetzler, H., and Martin, R.J. III. (1978): Effect of dilatancy on velocity anisotropy in westerly granite, *J. Geophys. Res.*, **83:B9**, 4451-4458.
- 松澤進一・西澤 修・金川久一・伊藤谷生, (1995): マイロナイト化に伴う岩石の P 波速度異方性の変化 - 畑川破碎帯マイロナイトについて -, 地質調査所月報, **46**, 497-516.
- Mavko, G., Mukerji, T. and Dvorkin, J. (1998): *The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis in Porous Media*, Cambridge University Press.
- McSkimin, H. J. (1964): Ultrasonic method for measuring the mechanical properties of a liquid and solids, In Mason, W. P. ed. *Physical Acoustics*, vol. 1A, 272-335, Academic Press, New York.
- Miyake, A. and Kawano, J. (2005): Molecular dynamics simulations of MgSiO₃ enstatite and seismic discontinuity in the upper mantle, *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L133310.
- Mori, T. and Tanaka, K. (1973): Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metal.*, **21**, 571-574.
- 森口 繁一・宇田川 久・一松 信 (1956): 数学公式 I - 微分積分・平面曲線 -, 岩波書店.
- 村 外志夫・森 勉 (1976): マイクロメカニクス - 転移と介在物 -, 破壊力学と材料強度講座 5, 培風館.
- Nishizawa, O. (1982): Seismic velocity anisotropy in a medium containing oriented cracks - Transversely isotropic case -, *J. Phys. Earth*, **30**, 331-347.
- Nishizawa, O. and Y. Fukushima. (2008): Laboratory Experiments of Seismic Wave Propagation in Random Heterogeneous Media, In Dmowska, R., Sato, H. and Fehler, M eds. *Earth heterogeneity and scattering effects on seismic waves*, *Advances in Geophysics*, Academic Press, **50**, 219-246.
- 西澤 修・増田幸治 (1991): ダイラタンシー状態にある花崗岩への高压水浸透に伴う P 波速度変化から推定されるマイクロクラックの性状, 物理探査, **44**, 255-265.
- 西澤 修 (2005): 岩石中の地震波伝播 I: 不均質媒質のモデル化と弾性波速度, 地学雑誌, **114**, 921-948.
- 西澤 修・金川 久一 (2009): 層状ケイ酸塩鉱物を含む岩石の横等方的異方性の一般的性質とその意義, 物理探査学会第 121 回 (平成 21 年度秋季) 学術講演会要旨.
- Norris, A. N. (1985): A differential scheme for the effective moduli of composite, *Mech. Material*, **4**, 1-16.
- 岡村弘之 (1976): 線形破壊力学入門, 破壊力学と材料強度講座 1, 培風館, pp 226.
- 大南正瑛・岩清水幸雄・元家勝彦・塩沢和章・田中喜久昭 (1980): マイクロメカニクス入門 (大南正瑛 編), オーム社.
- 大野一郎 (1996): 岩波講座・地球惑星科学 5 第 2 章地球と惑星を構成する鉱物の物性, 鳥海光弘編, 岩波書店, 41-90.
- Ohno, I., Abe, M., Kimura, M., Hnayama, Y., Oda, H. and Suzuki, I. (2000): Elasticity measurement of silica glass under gas pressure, *Am. Mineral.* **85**, 288-291.
- Sakai, Y. and Kawasaki, I. (1990): Analytic waveforms for a line source in a transversely isotropic medium, *J. Geophys. Res.*, **95**, 11333-11344.
- Sano, O., Kudo, Y. and Mizuta, Y. (1992): Experimental determination of elastic constants of Oshima granite,

- Barre granite, and Chelmsford granite, *J. Geophys. Res.*, **97**, 3367-3379.
- Sato, H. and Fehler, M. (1998): *Seismic wave propagation and scattering in the Heterogeneous Earth*. Springer-Verlag, New York.
- Sayers, C. M. (1999): Stress-dependent elastic anisotropy of shales, *Geophysics*, **64**, 93-98.
- Sayers, C. M. (2002): Stress-dependent elastic anisotropy of sandstones, *Geophysical Prospect.*, **50**, 85-95.
- Sayers, C. and Kachanov, M. (1991): A simple technique for finding effective elastic constants of cracked solids for arbitrary crack orientation statistics, *Int. J. Solid. Struct.*, **27**, 671-680.
- Sayers, C. and Kachanov, M. (1995): Microcrack-induced elastic wave anisotropy of brittle rocks, *J. Geophys. Res.*, **B**, **100** 4149-4156.
- Saenger, E. H., and Shapiro, S. A. (2002): Effective velocities in fractured media: A numerical study using the rotated staggered finite-difference grid, *Geophys. Prospect.*, **50** 183-194.
- Saenger, E. H., Krüger, O. S., and Shapiro, S. A. (2004): Effective elastic properties of randomly fractured soils: 3D numerical experiments, *Geophys. Prospect.*, **52**, 183-195.
- Simmons, G. and Wang, H. (1971): *Single Crystal Elastic Constants and Calculated Aggregate Properties: A Handbook*. Mass. Inst. Tech. Phys. Prosp., **25**.
- Singh, S. C., Taylor, M. A. J., Montagner, J. P. (2000): On the presence of liquid in Earth's inner core, *Science*, **287**, 2471-2474.
- Takanashi, M., Nishizawa, O., Kanagawa, K. and Yasunaga, K. (2001): Laboratory measurements of elastic anisotropy parameters for the exposed crustal rocks from Hidaka metamorphic belt, central Hokkaido, Japan. *Geophys. J. Int.*, **145**, 33-47.
- Tang, X. M., Zhu, Z. and Toksoz, M. N., 1994, Radiation patterns of compressional and shear transducers at the surface of an elastic half-space: *J. Acoust. Soc. Am.*, **95**, 71-76.
- 竹内 均 (1972): 地球科学における諸問題, 裳華房.
- Tapponnier, P., and Brace, W. F. (1976): Development of stress-induced microcracks in Westerly granite, *Int. J. Rock, Mech. Sci. & Geomech. Abstr.*, **13**, 103-112.
- Thomsen, L. (1986): Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, **51**, 1954-1966.
- Thomsen, L. (2002): *Understanding seismic anisotropy in exploration and exploitation*, 2002 Distinguished Instructor Short Course, DISC No.5, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma, USA.
- Vavryčuk, V. (2003): Parabolic lines and caustics in homogeneous weakly anisotropic solids, *Geophys. J. Int.*, **152**, 318-334.
- Yamamoto, K., Kosuga, M. and Hirasawa, T. (1981): A theoretical method for determination of effective elastic constants of isotropic composite. *Sci. Rep. Tohoku Univ., Ser. 5*, **28**, 47-67.
- 山本義隆 (1997): 熱学思想の史的展開-熱とエントロピー, 現代数学社, 復刻版 (2008): 熱学思想の史的展開 熱とエントロピー 1, 2, 3 巻, (ちくま学芸文庫) 筑摩書房.

蓬田清 (1989): 横方向不均質媒体における波動場の最新の計算法 — ガウシアンビームを中心として —. 地震, **42** 117-129.

付録 1. 鉱物がランダムおよび TI 配向した場合の弾性定数

ここでは大南ほか (1980) に基づいて記述する。まず、以下の置き換えを行う。

$$\begin{aligned}\hat{c}_1 &= \frac{1}{8}(3c_{mmpp} - 2c_{mpmp}) - \frac{1}{4}(3c_{mm33} - 2c_{m3m3}) \\ &\quad + \frac{1}{8}c_{3333} \\ \hat{c}_2 &= \frac{1}{8}(2c_{mpmp} - c_{mmpp}) - \frac{1}{4}(2c_{m3m3} - c_{mm33}) \\ &\quad + \frac{1}{8}c_{3333} \\ \hat{c}_3 &= \frac{1}{8}(2c_{mpmp} + c_{mmpp}) - \frac{5}{4}(2c_{m3m3} + c_{mm33}) \\ &\quad + \frac{35}{8}c_{3333} \\ \hat{c}_4 &= -\hat{c}_1 + \frac{1}{2}(c_{mm33} - c_{3333}) \\ \hat{c}_5 &= -\hat{c}_5 + \frac{1}{2}(c_{m3m3} - c_{3333})\end{aligned}\quad (\text{付録. 1.1})$$

TI 配向の場合の弾性定数 c'_{ijkl} は以下で表される。

$$\begin{aligned}c'_{ijkl} &= \hat{c}_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \hat{c}_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \hat{c}_3 \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3} \\ &\quad + \hat{c}_4 (\delta_{ij} \delta_{k3} \delta_{l3} + \delta_{kl} \delta_{i3} \delta_{j3}) \\ &\quad + \hat{c}_5 (\delta_{ik} \delta_{j3} \delta_{l3} + \delta_{jl} \delta_{i3} \delta_{k3} + \delta_{il} \delta_{j3} \delta_{k3} + \delta_{jk} \delta_{i3} \delta_{l3})\end{aligned}\quad (\text{付録. 1.2})$$

式 (付録. 1.2) はたとえば、クラック面が応力軸に平行で、面の軸が応力に垂直な面内にランダムに分布した場合 (西澤・増田, 1991) や結晶軸のひとつが面内にランダムに配列した場合などの計算に使える。

結晶軸あるいはクラックが完全にランダムに配向した場合、弾性定数は二つだけで

$$c_1 = \hat{c}_1 + \frac{1}{15}\hat{c}_3 + \frac{2}{3}\hat{c}_4 = \frac{1}{15}(2c_{mmpp} - c_{mpmp})\quad (\text{付録. 1.3})$$

$$c_2 = \hat{c}_2 + \frac{1}{15}\hat{c}_3 + \frac{2}{3}\hat{c}_5 = \frac{1}{30}(3c_{mpmp} - c_{mmpp})\quad (\text{付録. 1.4})$$

となる。 c_1 , c_2 はそれぞれ Lamé の定数 λ , μ に対応する。

c_{ijkl} の配向平均は Voigt 平均と呼ばれ、多結晶弾性定数の最大値を与え、計算される弾性波速度は過大な値となる。いっぽう、 $s_{ijkl} (=c_{ijkl}^{-1})$ の配向平均の逆行列

から計算される弾性定数は Reuss 平均で、多結晶体弾性定数の最小値となり、弾性波速度は過小評価される。個々の対称性鉱物についての多結晶体弾性定数の計算式は井田 (1982) に示されている。主要造岩鉱物多結晶体に対する計算値は Simmons and Wang (1971) にまとめられている。

付録 2. Eshelby の方法

十分大きな媒質 (マトリックス) の一部が別の物質と入れ替わり、介在物 (inclusion) となる場合を考える (Fig. A. 1 (1) に点線で示した Ω の領域が Fig. A. 1 (2) となる)。介在物のない状態で、無限遠方からの力によって生じる応力・ひずみを σ_{kl}^A, e_{mn}^A とする。介在物を含む物体を同様の外部応力下に置けば、介在物によって応力とひずみに乱れが生じ、介在物の中での応力・ひずみ状態は、 $\sigma_{kl}^A + \sigma_{kl}^C, e_{mn}^A + e_{mn}^C$ となる。 σ_{kl}^C は介在物の存在で生じた内部応力である。

弾性定数 c_{klmn}^0 のマトリックス中に一様な応力 σ_{kl}^A が発生すると Hooke の法則より、

$$\sigma_{kl}^A = c_{klmn}^0 e_{mn}^A \quad (\text{付録. 2.5})$$

となる。マトリックス中に弾性定数 c_{klmn}' の介在物が存在する Fig. A. 1 (3) の場合、一様な応力 σ_{kl}^A のもとで、介在物とマトリックスそれぞれの内部で、

$$\sigma_{kl}^A + \sigma_{kl}^C = c_{klmn}' (e_{mn}^A + e_{mn}^C) \quad (\text{付録. 2.6})$$

$$\sigma_{kl}^A + \sigma_{kl}^C = c_{klmn}^0 (e_{mn}^A + e_{mn}^C) \quad (\text{付録. 2.7})$$

が成立する。介在物 c_{klmn}' をマトリックス物質 c_{klmn}^0 で置き換え、式 (付録. 2.6) と同じ状態とする方法を考える。介在物を取り出し (Fig. A. 1 (4)), マトリックス物質と取り換える (Fig. A. 1 (5))。これを等価介在物と呼ぶ。等価介在物によって同じ応力状態を作るためには、Fig. A. 1 (6) のように介在物の形を変えればよい。Fig. A. 1 (5) から Fig. A. 1 (6) への変形の際のひずみ e_{mn}^T を固有ひずみ (eigen strain), あるいは, "stress-free strain", "transformation strain" と呼ぶ。形を変える際に、等価介在物内部に応力や弾性ひずみが発生しないような変形を考える。このような変形は、熱膨張変形や外側に同じ物質を張り付けたり外側の一部削ぎ落とししたりして実現できる。また、内部に組成的なずれ変位起こさせてもよい。たとえば、応力 σ_{kl}^A が静水圧の場合、真の介在物がマトリックスより圧縮されにくいものであれば、圧縮に

抗する力が複合媒質内部に発生するので、 e_{mn}^T を膨張ひずみとし、あらかじめ介在物の体積を大きくしてから介在物の抜けた空洞に押し込めば、圧縮に対する抗力が生まれ、 σ_{kl}^C を生じさせることができる。

等価介在物の表面に力を加えて、介在物内部に $-e_{mn}^T$ に相当するひずみを作り出し、介在物の形状を Ω に等しくすると、介在物の抜けた空洞に等価介在物を入れることができる (Fig. A. 1 (7) $\rightarrow$ (8))。したがって、Fig. A. 1 (7) で示した表面力は以下の応力

$$\sigma_{kl}^T = -c_{klmn}^0 e_{mn}^T \quad (\text{付録. 2.8})$$

を作り出せばよい。応力 σ_{kl}^T に対応する力の k 成分を f_k^T とすると、 $f_k^T = \text{div } \sigma_{kl}$ より、 e_{mn}^T が介在物内部で一定であれば、介在物表面の点 $\mathbf{x}'$ では、

$$\text{div } \sigma_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_l'} (-c_{klmn}^0 e_{mn}^T) = -c_{klmn}^0 e_{mn}^T n_l(\mathbf{x}') \quad (\text{付録. 2.9})$$

となる。 $n_l(\mathbf{x}')$ は介在物表面 $\mathbf{x}'$ における l 成分の方向余弦である。

力 $f_k^T(\mathbf{x}')$ によって、形状が Ω と一致した等価介在物は空洞内に収まるが、この段階でマトリックス側には内部応力 σ_{kl}^C は存在しない。内部応力状態にするには、力 f_k^T を打ち消し、介在物に対する形状の拘束を取り除く必要がある。そこで、介在物の内側から逆方向の力 $-f_k^T(\mathbf{x}')$ を与える。ただし、すでに介在物はマトリックス中にあるので、力 f_k^T によって形状が Fig. A. 1 (6) に戻るわけではない。Fig. A. 1 (9) $\rightarrow$ (10) のプロセスで生じるひずみは、Fig. A. 1 (1) の中に点線で示した仮想的な境界 Ω の内面から $-f_k^T(\mathbf{x}')$ なる力を与えたものと同じである。このとき、介在物内外の変位やひずみは、 Ω の内面の点 $\mathbf{x}'$ に分布する力によって発生し、これが e_{mn}^C である。

点 $\mathbf{x}'$ で k 方向に働く単位の力 $\delta_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ による $\mathbf{x}$ での変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の m 成分 $u_m(\mathbf{x})$ を表すのはグリーン関数 (静的グリーン関数) $G_{mk}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ である。したがって、Fig. A. 1 (9) で等価介在物の内面全体に作用する力による、等価介在物内部の点 $\mathbf{x}$ での変位は、

$$\begin{aligned} u_m(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} f_k^T G_{mk}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dS(\mathbf{x}') \\ &= \int_{\Omega} c_{klij}^0 e_{ij}^T G_{mk}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') n_l(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (\text{付録. 2.10})$$

である。ガウスの定理より、式 (付録. 2.10) は体積積分に書き直すことができるので、

Fig.A.1 Equivalent inclusion model. The symbol Ω indicates that the shape is same as the original (stress-free) shape of the inclusion. An inclusion Ω appears inside the matrix material ((1) $\rightarrow$ (2)). The stress σ_{ij}^A is applied to the composite material ((1) $\rightarrow$ (2)). Stress state near the inclusion Ω is changed ((2) $\rightarrow$ (3)). In the inclusion, the extra stress σ_{ij}^C appears. To reproduce the same stress state as (3), the inclusion is removed and replaced to the matrix material having an eigen strain (stress-free strain) e_{ij}^T ((4) $\rightarrow$ (5) $\rightarrow$ (6)). To insert the new inclusion into the cavity, the external surface force is applied to the inclusion ((6) $\rightarrow$ (7) $\rightarrow$ (8)). The material becomes an internal stress state when the same force is applied from the inner surface of the inclusion ((9) $\rightarrow$ (10)). If the eigen strain e_{ij}^T is properly selected, the same extra strain e_{ij}^C can be reproduced. After the same strain is reproduced, the material is subjected to the stress σ_{ij}^A ((10) $\rightarrow$ (11)). The stress σ_{ij}^A produces the elastic strain e_{ij}^A , because the elastic constants of the inclusion are the same as those of the matrix material. Thus the same stress-strain state as the state (3) has been successfully reproduced by replacing the original inclusion to a new inclusion having the same elastic constants as the matrix material. The strain produced by the internal surface force in the state (9) should be equal to e_{ij}^C because this is the strain from the original shape of Ω . This internal surface force is equal to the external surface force that produces the same elastic strain as e_{ij}^T . We can obtain the relationship between e_{ij}^T and e_{ij}^C by calculating the strain produced from the surface force.

の対称性 $e_{ij}^T = e_{ji}^T$ から,

$$u_m(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} c_{klij}^0 e_{ij}^T \frac{\partial}{\partial x_l'} [G_{mk}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] dv(\mathbf{x}') \quad (\text{付録. 2.11})$$

となる。グリーン関数に関する相反性 $G_{mk}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = G_{km}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ (Aki and Richards, 1980) と, $\partial G_{km}/\partial x_l' = -\partial G_{km}/\partial x_l$ より,

$$u_m(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} c_{klij}^0 e_{ij}^T \frac{\partial}{\partial x_l} [G_{km}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] dv(\mathbf{x}') \quad (\text{付録. 2.12})$$

となる。

$u_m(\mathbf{x})$ に対応するひずみが e_{mn}^C であることと, ひずみ

$$\begin{aligned} e_{mn}^C &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} c_{klij}^0 e_{ij}^T \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n} [G_{km}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] dv(\mathbf{x}') \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} c_{klij}^0 e_{ij}^T \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} [G_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] dv(\mathbf{x}') \right] \end{aligned} \quad (\text{付録. 2.13})$$

となる。これを

$$e_{mn}^C = S_{mnij} e_{ij}^T \quad (\text{付録. 2.14})$$

と書くと,

$$S_{mnij} = -\frac{1}{2}c_{klij}^0 \left(\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n} G_{mk}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dv(\mathbf{x}') \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} G_{nk}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dv(\mathbf{x}') \right) \quad (\text{付録. 2.15})$$

が得られる。 S_{mnij} を Eshelby のテンソルと呼ぶ。Eshelby のテンソルは、介在物 Ω の形状とマトリックス媒質の弾性定数 c_{klij}^0 により決まる量である。

Eshelby のテンソル S_{mnij} はグリーン関数の具体的な形が決まれば求めることができる。等方性媒質に対するグリーン関数は、多くの教科書 (Love, 1927; Landau and Lifshitz, 1965; 村・森, 1976; Aki and Richards, 2002) に書かれており、グリーン関数と明記されない場合も、弾性体の一点に働く単位力で生じる変位を得る式として扱われている (Eshelby, 1957; 深尾, 1978)。等方性媒質のグリーン関数は、剛性率 (せん断弾性定数) μ , ポアソン比 ν を用いて,

$$G_{km} = \frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[(3-4\nu)\delta_{km} \right. \\ \left. + \frac{(x_k - x'_k)(x_m - x'_m)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right] \quad (\text{付録. 2.16})$$

と表される。 S_{mnij} を求めるにはグリーン関数を積分しなければならないが、Eshelby (1957) は式 (付録. 2.16) をポテンシャルで表現し、回転楕円体の場合の解析解を導いた。

媒質が異方性の場合、楕円体介在物についてのグリーン関数を簡単に書くことはできないが、TI 媒質については、Kinoshita and Mura (1971), 村・森 (1976) が初等関数の定積分でグリーン関数を書き表している。異方性媒質でのグリーン関数を求める手法は、村・森 (1976) に詳しく解説されている。彼らの方法は、変位やひずみを空間波数で表現し、フーリエ変換したものを弾性論の基本式 (2) に代入して導くもので、形式的でわかりやすい。彼らの結果をもとに、Nishizawa (1982) は TI 媒質内で定方位配列したクラックによる弾性波速度変化を数値計算で求めた。なお、最近 Markov et al. (2005) は、TI 媒質中の静的グリーン関数の解析的表現を得ている。

最後に Fig. A. 1 (3) と Fig. A. 1 (11) を比較する。(11) での等価介在物内部の弾性ひずみは、(10) の状態のひずみ e_{mn}^C から e_{mn}^T を引いたものに、 σ_{kl}^A で生じるひずみ e_{mn}^A

を加えたものであるから、以下の式が成り立つ。

$$\sigma_{kl}^A + \sigma_{kl}^C = c_{klmn}' (e_{mn}^A + e_{mn}^C) \\ = c_{klmn}^0 (e_{mn}^A + e_{mn}^C - e_{mn}^T) \quad (\text{付録. 2.17})$$

式 (付録. 2.14) を用いて、 e_{mn}^C を消去すれば、 e_{mn}^T を e_{mn}^A と S_{mnij} で表わすことができる。これによって、次に述べる内部エネルギー変化の計算が可能となる。

付録 3. stress-free strain の発生による 熱力学ポテンシャルの変化

Fig. A. 1 (11) から Fig. A. 1 (3) の弾性エネルギー変化を計算することができる。 σ_{ij}^A の応力下で、領域 Ω で e_{kl}^T が発生したわけであるから、そのときに σ_{ij}^A の行った仕事がポテンシャルの変化量である。

たとえば、 e_{kl}^T が膨張によるものであるとすると、 σ_{ij}^A の応力場の中で膨張ひずみが発生し、介在物の中で拘束されていることになるから、式 (9) により、

$$\Delta\Phi = W = -\frac{1}{2}e_{ij}^T \sigma_{ij}^A \chi_{\text{inc}} \quad (\text{付録. 3.18})$$

が、介在物の弾性エネルギー変化となる。 χ_{inc} は介在物の体積比率である。

e_{ij}^T は式 (付録. 2.17) によって、 e_{ij}^A と Eshelby のテンソルで書き表わせることがわかっているから、 $\Delta\Phi$ は e_{ij}^A と σ_{ij}^A で表現できるが、両者はマトリックス物質の弾性定数 c_{ijkl}^0 を介して変換できるので、 $\Delta\Phi$ を e_{ij}^A と σ_{ij}^A のどちらか一方の 2 次式として表現できる。 e_{ij}^A あるいは σ_{ij}^A の 2 次式の係数は、弾性定数 c_{ijkl}^0 , c_{ijkl}' および S_{klmn} で表現され、式 (66) より、実効コンプライアンス $c_{ijkl}^*{}^{-1}$, あるいは弾性定数が得られる。

ポテンシャル変化量 $\Delta\Phi$ は、介在物発生時 (あるいは e_{kl}^A 発生時) に遠方での応力が変化しないと考えるか、ひずみが変化しないと考えるかで $\Delta\Phi$ の値は絶対値が等しく正負のみが異なるものとなる (Eshelby, 1957; 竹内, 1972)。

$$\Delta\Phi(\sigma_{ij}^A) = -\Delta\Phi(e_{ij}^A) = -\frac{1}{2}e_{ij}^T \sigma_{ij}^A \chi_{\text{inc}} \quad (\text{付録. 3.19})$$

この意味の図解的表現は 西澤 (2005) にある。

σ_{ij}^A と e_{ij}^A のどちらを一定とするかで、弾性定数の計算値が異なるが、Yamamoto et al. (1981) は、これらが弾性定数の上限と下限を与えることから、両者の平均値を採用するのがよいとした。

Seismic velocities and their anisotropy in rocks: from the energy approach.

Osamu Nishizawa*

ABSTRACT

We overview the models for calculating velocity anisotropy in rocks in terms of the preferred orientations of cracks and minerals in rocks. We also discuss about wave propagation in anisotropic media. The *P*- and the *S*-wave velocities in rocks are affected by voids and cracks in rocks as well as the elastic properties of the constituent minerals. To understand the elastic properties of rocks, we start from the basic definitions and equations of the theory of elasticity for continuum homogeneous media. The elastic constants or elastic compliances are derived from an approach based on thermodynamics of solids. We derive the elastic constants or elastic compliances of materials from thermodynamics of solids. Then we see several approaches for calculating seismic wave velocities in composite media, where pieces of the second material are embedded into a matrix of the first material. For voids and cracks, the second material is gas or liquid in most of the actual cases in the Earth's crust. The most important anisotropy in earth sciences is the transverse isotropy (TI) where seismic wave velocities are given as functions of the angle from the symmetry axis. For calculating seismic velocity anisotropy of rocks, we consider two anisotropies produced by preferred orientation of anisotropic minerals and oriented cracks. In the last, we discuss about the crack density parameter that is one of the most important parameters for describing seismic anisotropy due to cracks and voids in a rock.

Key words: pores, cracks, elastic constants, seismic wave velocity, transverse isotropy, preferred orientation.