分割法による粘弾性流体ダイスウェル流動の高ワイゼンベルグ数領域における有限要素解析

岩田 修一^{*1}・新垣 勉^{*1}・森 秀樹^{*1}
石川 敏志^{*1}・秦 裕作^{*2}

A Higher Weissenberg Number Analysis of Die-swell Flow of Viscoelastic Fluids Using a Decoupled Finite Element Method

Iwata, Shuichi^{*1}/Aragaki, Tsutomu^{*1}/Mori, Hideki^{*1}
Ishikawa, Satoshi^{*1}/Shin, Yusaku^{*2}

This paper describes a new decoupled finite element method, which has been developed based on previous work and applied successfully to the high Weissenberg number problem of die-swell flow simulation using a single relaxation mode Giesekus model. The method is a modified version of the 2×2 -subelement/non-consistent streamline upwind (2×2 SU) scheme. To improve the convergence behavior, several additional techniques are incorporated: (1) unification of the number of Gaussian points to evaluate integrations with same accuracy for momentum equation and for constitutive equation, (2) as for discretization of momentum equation with the rearranged form substitution and for getting diagonal dominant matrices, treatment of velocity ($\mathbf{v}$) as known and treatment of velocity gradient ($\nabla \mathbf{v}$) (and its transpose) as unknown, both of which appear in the definition of upper convected derivative of the elastic part of extra-stress tensor ($\hat{\mathbf{E}}$), and (3) stepwise reduction of the relaxation factors for velocity-stress fields and for free surface shape, respectively. The new method enables us to predict die-swell flow simulations at Weissenberg numbers over 400.

Key words : Viscoelastic fluids/Giesekus model/Die-swell/Decoupled finite element method/
High Weissenberg number problem

1. 緒 言

筆者らは、運動方程式・連続式と構成方程式を別々に交互に解く分割型有限要素法を用いて、単一緩和モード Giesekus モデル流体のダイスウェル流動解析を行い、その収束性を改善する計算手法を報告した¹⁾。すなわち、応力を運動方程式に代入する方法の取扱いと、運動方程式と構成方程式の間における速度場・応力場の補間方法の取扱いに着目し、それらの計算収束性に与える影響を検討した。その結果、運動方程式に応力を代入する方法として、 $\boldsymbol{\tau} = 2\eta_0 \mathbf{S} + \mathbf{E}$ の形で直接代入する単純代入法よりも、構成方程式を若干変形した後に代入する変形代入法のほうが

収束性の改善が見られた。また、本研究では、速度場に 9 節点 2 次要素を、応力場には 2×2 サブエレメントにて 4 節点 1 次要素を用いている。この場合、サブエレメントが存在するため、補間方法の取扱いに関して、次のような問題がおこる。すなわち、運動方程式の離散化式に含まれる応力場 $\hat{\mathbf{E}}$ をガウス点で評価する際、これを着目要素の 9 個の要素節点値から 2 次補間すべきか、または着目サブエレメントの 4 節点値より 1 次補間すべきか、という問題である。同様に、構成方程式の離散化式に含まれる速度場 $\dot{\mathbf{v}}$ の評価においても、これを着目要素の 9 個の要素節点値から 2 次補間すべきか、着目サブエレメントの 4 節点値より 1 次補間すべきか、という運動方程式の場合とは逆の問題がおこる。ここで、 $\hat{\mathbf{E}}$ および $\dot{\mathbf{v}}$ は、反復前段の近似解を用いて既知関数と見なすことを意味する。前報¹⁾においてこの問題を検討した結果、次の方法を用いると収束性の向上が見られた。すなわち、速度場は 2 次近似で得られており、応力場は 2×2 サブエレメント内にて 1 次近似で得られていることを重視し、常に、速度の評価に 9 節点 2 次補間を、応力の評価に 4 節点 1 次補間を用いる方法である。つまり、構成方程式における速度の評価は 9 節点 2 次補間

^{*1} 名古屋工業大学 工学部 応用化学科
名古屋市昭和区御器所町 (〒466-8555)
Nagoya Institute of Technology
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466-8555, Japan

^{*2} 三井化学(株) 名古屋工場
名古屋市南区丹後通 2-1 (〒457-8522)
Mitsui Chemicals, Inc.
2-1 Tangodori, Minami-ku, Nagoya 457-8522, Japan
1999. 4. 12 受理

を，運動方程式における応力の評価はサブエレメント相当の領域にて4節点1次補間を用い，速度と応力の取扱いに首尾一貫性・整合性を持たせる方法である．

この変形代入法と補間整合性との2手法の適用により，従来分割法では1オーダーといわれてきた計算可能な最大のワイゼンベルグ数 (We) を63まで向上させ得ることを報告した．

高 We 領域における数値解析に関してみると，運動方程式・連続式と構成方程式を同時に解く混合法を用いた有限要素解析が行われており，桑野ら²⁾による報告をはじめ，数多くの研究報告^{3),4)}がある．

しかしながら，混合法では，計算機メモリーの使用量が莫大であり，複雑系および3次元解析への適応には，困難を伴うことが予想される．

本報では，省メモリ型の特徴を持つ分割法の収束性を一層改善させるため，前報¹⁾で報告した手法に加え，新たに次の3項目，すなわち(1)離散化式の係数行列と列ベクトルのガウス積分評価におけるガウス点個数の統一，(2)運動方程式に代入する応力の反変型対流微分に含まれる速度ベクトルの取扱い，(3)緩和係数の段階的減少について検討を行った．そして，これら計算手法の最適化により，分割法の収束性をさらに改善できることを明らかにする．

なお，本解析では，解析の一般性が失われないように，重力，対流項，表面張力を考慮した．また，標準的手法として，構成方程式に対し， 2×2 サブエレメント法と流線上流法を適用した．その他は，通常の有限要素法と同様であり，詳細は前報¹⁾を参照されたい．

2. 支配方程式と境界条件

本解析で用いた支配方程式は，非圧縮性流体の定常流れに関する連続式，運動方程式，構成方程式であり，それぞれ次式のように表される．なお，構成方程式には，単一緩和モードの Giesekus モデルを用いた．

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_0 s \mathbf{S} + \mathbf{E} \quad (3)$$

$$\mathbf{E} + \lambda \dot{\mathbf{E}} + (\alpha/G) \mathbf{E}^2 = 2\eta_0 (1-s) \mathbf{S} \quad (4)$$

ここに， $\mathbf{S} \equiv [(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T]/2$ は変形速度テンソル， η_0 は零せん断粘度， λ は緩和時間， α および s はモデルパラメータ ($0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$)， $G \equiv \eta_0(1-s)/\lambda$ は緩和と弾性率であり， $\dot{\mathbf{E}}$ は次式で定義される反変型対流微分である．

$$\dot{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{E} - [(\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{v})] \quad (5)$$

(1)，(2)式を Galerkin 有限要素法の通常の手続きにより定式化を行うと，それぞれ次式を得る．

$$\langle \Psi^k; \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (6)$$

$$\langle \nabla \phi^i; -p \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \rangle + \langle \phi^i; \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \rho \mathbf{g} \rangle - \langle \phi^i \mathbf{n}; -\rho \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \rangle = 0 \quad (7)$$

ここで， $\boldsymbol{\delta}$ は単位テンソル， $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトル，

$\langle ; \rangle$ は体積積分における内積， $\langle \langle ; \rangle \rangle$ は面積積分における内積を意味する．

構成方程式(4)に関して同様に定式化を行うと次式を得る．ここで，移流項のみ上流化 (SU) の重み関数 $\tilde{\phi}^j$ を適用している．その詳細は，前報¹⁾を参照されたい．

$$\langle \phi^j; \mathbf{E} - \lambda (\nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{v}) + (\alpha/G) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - 2\eta_0 (1-s) \mathbf{S} \rangle + \langle \tilde{\phi}^j; \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{E} \rangle = 0 \quad (8)$$

(6)，(7)，(8)式の中の変数 $\mathbf{v}$ ， $\mathbf{E}$ ， p は次式で定義される．

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \phi^i \mathbf{v}^i, \quad \mathbf{E} = \sum_{j=1}^M \phi^j \mathbf{E}^j, \quad p = \sum_{k=1}^L \phi^k p^k \quad (9)$$

ここで， $\mathbf{v}^i$ ， $\mathbf{E}^j$ ， p^k はそれぞれ速度ベクトル，応力テンソル，圧力の節点値を， ϕ^i ， ϕ^j ， ϕ^k は補間関数を示す．

境界条件および座標系は図1に示すとおりであり，計算領域は $-10 \leq z/R \leq 150$ とし，ダイ入口に完全発達流れ，ダイ内部壁面にすべりなし条件，中心軸に対称条件，積分領域の最下流面に応力ゼロの条件 $[\mathbf{n} \cdot (p \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}) = 0]$ ，自由表面には次式で示される応力釣合条件式を設定した．

$$(p - p_g) \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_g) + 2H \sigma \mathbf{n} = 0 \quad (10)$$

Fig. 1 Boundary conditions and coordinates

Fig. 2(a) Relevant model parameters, shear viscosity and first normal stress difference, (b) Elongational viscosity

$$2H = -\nabla_s \cdot \mathbf{n} \quad (H: \text{平均曲率}) \quad (11)$$

ただし、気流の影響は無く、 $\tau_g = 0$, $p_g = 0$ を仮定した。

図2(a), (b)には、本解析で用いた物性値と Giesekus モデル流体に関する定常のせん断粘度、第1法線応力差、伸長粘度曲線を示した。

3. 計算方法

本解析では、静止状態の速度分布から出発して $We = 0.1$ における計算を行い、その結果を初期値として所定の We まで徐々に増加させた。ワイゼンベルグ数 We を次式で定義した。

$$We = \frac{\lambda \langle w \rangle}{R} \quad (12)$$

ここで、 $\langle w \rangle$ はダイ内平均流速、 R はダイ半径である。

図3に要素分割図を示す。流れ方向に関しては、 $-10 \leq z/R \leq 61$ の領域に対しダイ出口近傍で細くなるように不等分割を、またそれ以外の領域に対しては等分割を行った。一方、半径方向に関しては、全計算領域に対して、固体壁面および液表面付近で細くなるように、不等分割を行った。

この要素分割の場合、解析に要したCPU時間は、Hewlett Packard 製 C-180 において反復回数1回あたり約0.8秒であり、メモリサイズは約4.2MBである。また、静止状態の速度分布から、 $We = 0.1$ を計算し、続けて $We = 1, 2, 10$ を計算した後、残りを刻み10ずつで We を上げ、 $We = 200$ まで計算した場合、CPU時間は160分である(表2のケース4-Aの場合)。

3.1 収束性改善への3つの検討事項

a. ガウス積分におけるガウス点個数の統一

支配方程式を離散化した式は、各要素またはサブエレメントごとにガウスの積分公式を用いて評価され、その積分値は係数行列、列ベクトルの対応する部分に加えられる。ここで、ガウス積分公式を用いる積分評価において、1要素あたりのガウス点個数に着目する。図4上図に示すように、筆者らは、運動方程式に対する積分評価には、ガウスの3点公式(1要素当たり9個のガウス点)を用いてきた。一方、構成方程式に対し、各サブエレメントにおいてガウスの2点公式(サブエレメント当たり4個のガウス点)を適用し、1要素当たりでは $4 \times 4 = 16$ 個のガウス点を用いて積分評価を行ってきた。つまり、同一要素の積分評価方法が、運動方程式と構成方程式との間で異なっていたわけである。

そこで、本報では、運動方程式と構成方程式に対するガウス積分の積分精度を一致させるため、それぞれ共通に1要素当たり16個のガウス点を用いる方法を検討した。つ

Fig. 3 A typical finite element mesh

まり、運動方程式に対して、図4下図に示すように、着目要素を4分割し、各部分に2点公式を適用して積分を行い、その総和を用いる方法である。この場合、4分割した各部分領域における積分については、座標変換を行った後、ガウスの積分公式を適用することに注意されたい。

連続式に関しては、1要素に対しガウスの2点公式を用いた。

b. 反変型対流微分中の速度ベクトルの取扱い

運動方程式への応力代入法として、本報では変形代入法¹⁾を用いた。すなわち、(3), (4), (5)式より次式(13)を求め、運動方程式に代入する応力として次式を用いる。

$$\boldsymbol{\tau} = \eta_0(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\mathbf{E}} + \lambda \nabla \mathbf{v}^T \cdot \hat{\mathbf{E}} + \lambda \hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla \mathbf{v} - (\alpha/G) \hat{\mathbf{E}}^2 \quad (13)$$

式中の上付き“ $\hat{\cdot}$ ”は、反復前段の近似解を用いて既知関数と見なすことを意味する。右辺第2, 3, 4項には、反変型対流微分 $\hat{\mathbf{E}}$ の展開によって現れた速度ベクトル $\mathbf{v}$ とその勾配 $\nabla \mathbf{v}$ (およびその転置 $\nabla \mathbf{v}^T$) が存在する。前報¹⁾では、これらをすべて未知関数と見なして計算を行った。しかしながら、 $\mathbf{v}$ と $\nabla \mathbf{v}$ の取扱い、すなわち、 $\mathbf{v}$ と $\nabla \mathbf{v}$ (および $\nabla \mathbf{v}^T$) のそれぞれを未知関数と見なして離散化すべきか、または既知関数と見なして離散化すべきか、ということが問題となる。そこで、本報では、この反変型対流微分 $\hat{\mathbf{E}}$ 中の速度ベクトルの取扱いに着目し、以下に示す4ケースの収束性を検討した。

- $\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}$ をともに既知関数 $\rightarrow (\hat{\mathbf{v}}, \nabla \hat{\mathbf{v}})$
- $\mathbf{v}$ を既知関数、 $\nabla \mathbf{v}$ を未知関数 $\rightarrow (\hat{\mathbf{v}}, \nabla \mathbf{v})$
- $\mathbf{v}$ を未知関数、 $\nabla \mathbf{v}$ を既知関数 $\rightarrow (\mathbf{v}, \nabla \hat{\mathbf{v}})$
- $\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}$ をともに未知関数 $\rightarrow (\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v})$

$\mathbf{v}$ を未知関数として扱うことは、(13)式右辺第2項の移流項 $(-\lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\mathbf{E}})$ を未知関数として扱うことを意味する。この移流項には負の符号があるため、運動方程式の離散化式の係数行列に対し負の積分値が加わる。逆に、既知関数として扱う場合、この項の積分値は離散化式の列ベクトルに加算され、離散化式の係数行列を対角優位にする効果が期待される。一方、 $\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}^T$ に関しては、前述の $\mathbf{v}$ の場合と逆の効果が考えられる。

以上の知見より、 $\mathbf{v}$ を既知関数、 $\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}^T$ を未知関数として扱う方法が、係数行列を最も対角優位にする手法であり、収束性の向上が期待される。この場合、運動方程式は次式となる。

Fig. 4 Unification of number of Gaussian points

$$\rho \hat{v} \cdot \nabla v = -\nabla p + \rho g + \nabla \cdot \left\{ \nabla v^T \cdot \left(\gamma_0 \delta + \lambda \hat{E} \right) + \left(\gamma_0 \delta + \lambda \hat{E} \right) \cdot \nabla v - \lambda \hat{v} \cdot \nabla \hat{E} - (\alpha/G) \hat{E}^2 \right\} \quad (14)$$

左辺第1項の $\hat{v}$ に関しては運動方程式の線形化を目的として、また、 $\hat{E}$ に関しては構成方程式で得られた応力場を用いるため、それぞれ既知関数として取扱うことに注意されたい。なお、 $\hat{E}$ 中の v 、 ∇v の取扱いに関わらず、収束解は少なくとも有効数字3桁まで一致することを確認している。

c. 緩和係数の段階的減少

速度場・応力場の緩和を、次式、

$$\text{速度場：} v^{n+1} = \omega_v v_{cal} + (1 - \omega_v) v^n \quad (15)$$

$$\text{応力場：} E^{n+1} = \omega_E E_{cal} + (1 - \omega_E) E^n \quad (16)$$

$$\text{自由表面形状：} h^{n+1} = \omega_h h_{cal} + (1 - \omega_h) h^n \quad (17)$$

によって行った。ここで、上付き添字‘ n ’は、反復計算の第 n 段における値を意味し、下付き添字‘ cal ’は、新たに得られた計算結果を示す。

本報では、緩和係数の設定方法が計算収束性におよぼす影響を検討するため、次の2つの方法を検討した。すなわち、緩和係数に固定値を与える方法と、表1に示すように、速度場・応力場と自由表面形状に関し、最大相対誤差に連動させて、それぞれの緩和係数を段階的に減少させる方法である。特に後者の場合、自由表面形状の修正量がたとえわずかでも流れ場全体に大きく影響を与えること、また、収束間近な反復計算の最終段階では自由表面形状の修正量

が極めて小さいことを考慮し、自由表面形状の緩和係数が、速度場・応力場の緩和係数に比べて、小さくなるように設定した。

なお、緩和係数比¹⁾(ω_E/ω_v)に関しては、本報では、 $\omega_E/\omega_v = 1.2$ (例外として表2のケース2-Bは $\omega_E/\omega_v = 1.0$)を設定した。

4. 結果及び考察

4.1 収束可能な最大 Weissenberg 数

前述の3項目、すなわち、ガウス積分におけるガウス点個数の統一、反変型対流微分中の速度ベクトルの取扱い、緩和係数の段階的減少に関して、各手法が分割法の収束性に与える影響を検討するため、図3に示す要素分割で数値実験を行った。表2は前報で報告した変形代入法¹⁾と補間法の整合性¹⁾の考慮に加え、さらに、本報で提案する手法の適用によって得られた計算可能な最大 We である。

表2のケース1において、 $We = 63$ は前報¹⁾で報告した結果である。

係数行列、列ベクトルの積分評価におけるガウス点個数について、前報¹⁾では、運動方程式に対し1要素あたり9点を用い、構成方程式に対しては、各サブエレメントに4点(1要素あたりでは16点)を用いてきた。これを、本報で提案する方法、すなわち、両式に対しガウス点個数を1要素あたり16点に統一する方法に変更すると、最大 We は130まで改善した(ケース2-A)。

つぎに、ガウス点個数の統一に加えて、反変型対流微分中の速度ベクトルの取扱いを、本報で提案する方法(v を既知関数、 ∇v 、 ∇v^T を未知関数として扱う)に変更する

Table 1 Stepwise reduction of relaxation factors, (a) ω_v and (b) ω_h

(a)		(b)	
Maximum relative error	Relaxation factor ω_v	Maximum relative error	Relaxation factor ω_h
$\sim 1 \times 10^{-2}$	0.40	$\sim 1 \times 10^{-4}$	0.40
$1 \times 10^{-2} \sim 5 \times 10^{-3}$	0.35	$1 \times 10^{-4} \sim 5 \times 10^{-5}$	0.20
$5 \times 10^{-3} \sim$	0.30	$5 \times 10^{-5} \sim 1 \times 10^{-5}$	0.10
		$1 \times 10^{-5} \sim 5 \times 10^{-6}$	0.05
		$5 \times 10^{-6} \sim$	0.02

Table 2 Maximum Weissenberg numbers

Case		Unification of number of Gaussian points	Treating $\boldsymbol{v}$ in $\overset{\nabla}{\boldsymbol{E}}$		Relaxation factor	We (max.)
			$\boldsymbol{v}$	$\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{v}^T$		
1		Not	Unknown	Unknown	Fixed	63*
2	A	Accounted	Unknown	Unknown	Fixed	130
	B	Accounted	Unknown	Unknown	Stepwise reduction	128
3	A	Accounted	Unknown	Known	Fixed	0.3
	B	Accounted	Unknown	Known	Stepwise reduction	0.3
4	A	Accounted	Known	Unknown	Fixed	286
	B	Accounted	Known	Unknown	Stepwise reduction	>400
5	A	Accounted	Known	Known	Fixed	0.3
	B	Accounted	Known	Known	Stepwise reduction	0.3

*) Iwata et al.¹⁾

と、最大 We は 286 までに改善した (ケース 4-A)。

さらに、緩和係数の段階的減少をも考慮すると、 We が 400 を超えた条件においても収束解が得られ、計算収束性が大幅に改善した (ケース 4-B)。

一方、反変型対流微分中の速度ベクトルの取扱いをすべて未知関数として扱う場合、緩和係数の段階的減少を考慮しても、特に収束性の改善は見られなかった (ケース 2-B)。

以上の結果から、ガウス点個数の統一、反変型対流微分中の速度ベクトルの取扱い、緩和係数の段階的減少の 3 手法すべてを考慮する場合、収束性が大幅に向上することがわかった。なお、表 2 中の残りのケースについては 4.3 節で述べる。

図 5 は、半径 $R=1\text{ mm}$ のダイから、図 2 に示す流体特性をもつ Giesekus 流体を押出し、重力方向に流下させた場合の $We=400$, $Re=1.49\times 10^{-4}$ ($Re\equiv 2R\langle w\rangle\rho/\eta_0$) における計算結果である。

図中、(a) は速度ベクトル図、(b) は流線図であり、(c) は半径方向速度 $u/\langle w\rangle$ 、(d) は軸方向速度 $w/\langle w\rangle$ 、(e) は圧力 p/τ_w 、(f) はせん断応力 τ_{rz}/τ_w 、(g) は法線応力差 $(\tau_{zz}-\tau_{rr})/\tau_w$ であり、それぞれ等高線図として示した。ここに、 τ_w はダイ内発達流れにおける壁面せん断応力である。

4.2 ガウス積分におけるガウス点個数の統一が計算結果に及ぼす影響

図 6(a)~(c) は、 $We=30$ のダイ固体表面~自由表面に沿った分布図であり、(a) は半径方向速度分布図、(b) は法線応力 τ_{rr}/τ_w 分布図、(c) はせん断応力分布図である。

(a) に着目すると、ガウス点個数の統一を考慮する場合もしない場合も $0\leq z/R\leq 3$ の領域でスウェル現象に伴う大きなピークが認められる。また、考慮しない場合は、考

慮する場合よりも全体にやや小さな値を示した。

次に、 $z/R=0.2$ 付近に注目する。ガウス点個数の統一を考慮する場合は、滑らかな分布を示している。一方、考慮しない場合は、 $z/R=0.2$ 付近で、乱れた分布となっている (クローズアップ部分参照)。この領域がスウェル現象を示す部分であることを考慮すると、この挙動は数値的な乱れであると考えられる。

この数値振動は、(b) τ_{rr}/τ_w 分布図および (c) τ_{rz}/τ_w 分布図の $0.1\leq z/R\leq 0.2$ の領域にも認められる (クローズアップ図参照)。この領域における数値振動は自由表面形状の決定に悪影響をおよぼし、収束性に大きな影響を与えることが考えられる。

Fig. 6(a) Non-dimensional radial velocity along solid wall and liquid surface

Fig. 6(b) Non-dimensional normal stress along solid wall and liquid surface

Fig. 6(c) Non-dimensional shear stress along solid wall and liquid surface

Fig. 5 Predicted results at $We=400$, $\alpha=0.5$, $s=0.1$, $\eta_0=5000\text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\lambda=1\text{ s}$

以上の知見より、運動方程式と構成方程式に対するガウス積分においてガウス点個数を統一することは、数値振動を抑える効果があり、結果的に計算収束性が向上したものと考えられる。

なお、(b) τ_r/τ_w 分布図および (c) τ_{rz}/τ_w 分布図のダイ上流側には、比較的大きな数値振動が認められる。これは、特異点（ダイリップ）による影響と考えられる。

4.3 反変型対流微分中の速度ベクトルの取扱いと緩和係数の段階的減少が計算収束性に及ぼす影響

反変型対流微分 $\hat{\mathbf{E}}$ に含まれる $\mathbf{v}$ と $\nabla \mathbf{v}$ （および $\nabla \mathbf{v}^T$ ）を既知関数と扱うか、未知関数として扱うか、その取扱い方法の違いが収束性におよぼす影響を調べるため、数値実験を行った。

収束性の評価は、緩和係数に固定値を与える場合と、収束状況に応じて段階的に緩和係数を減少させる場合とについて、それぞれ計算可能な最大 We を求めることにより行われた。その結果を表 2 に示す。

反変型対流微分 $\hat{\mathbf{E}}$ に含まれる $\nabla \mathbf{v}$ と $\nabla \mathbf{v}^T$ を未知関数として取扱った場合（ケース 2, 4），計算可能な最大 We は 128 以上であり、収束性が良いことがわかった。これは、(14) 式中の $\lambda \hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla \mathbf{v}$ 、 $\lambda \nabla \mathbf{v}^T \cdot \hat{\mathbf{E}}$ が係数行列において評価されるため係数行列の優対角化がはかられ、収束性が向上したものと考えられる。

さらに、移流項の $\mathbf{v}$ を既知関数として取扱った場合（ケース 4）では、収束性が一層向上した。これは、移流項を擬似体積力として取扱っているため、結果的に運動方程式の楕円型の特性を強めたものと推定される。

一方、反変型対流微分 $\hat{\mathbf{E}}$ に含まれる $\nabla \mathbf{v}$ と $\nabla \mathbf{v}^T$ を既知関数として取扱った場合（ケース 3, 5），収束性は極めて悪いことが判った。このケースでは、速度微分値 $\nabla \mathbf{v}$ を既知関数と扱うため、これを反復前段の速度を用いて評価する必要がある。ところが、本解析では速度場に対して 2 次の補間関数 (P^2-C^0) を使用しているため、隣接する要素間で速度微分値の連続性は保証されていない。それゆえ、評価される速度勾配の精度そのものが収束性に影響を与えたことが考えられる。このことと関連して、Matallah らの EVSS Recovery Scheme⁵⁾では、速度微分値の取扱いの重要性が指摘されている。

なお、緩和係数の取扱い方法の収束性におよぼす影響については、ケース 2, 3, 5 の場合、その取扱い方法による計算収束性への影響は見られなかった。

しかし、ケース 4 では、緩和係数を段階的に減少させる方法のほうが、固定値として取扱う方法に比べ、収束性が大きく向上することがわかった。このケース 4 について、緩和係数の取扱い方法により収束性に違いが生じた理由を検討した。図 7(a) は、 $We = 281$ の収束解を初期値として、 $We = 282$ における計算を行い、緩和係数に固定値を与えた場合と段階的に減少させた場合とについて、ダイリップに隣接する節点（図 7(a) 図中の点 Q）における半径方向速度 u_r を反復回数ごとに記録したものである。両者とも、計算開始直後に大きく変動するが、緩和係数の段階的減少を適用した場合、変動量の減衰速度は大きく、反復回数が 644 回で収束した。一方、緩和係数に固定値を適用した場合、その減衰速度は遅く、反復回数が 2786 回で収束した。

Fig. 7 Convergence behavior ; (a) Surface radial velocity at a nodal point Q adjacent to die lip, (b) Maximum error of radial velocity u

Table 3 Average iteration numbers

We	Average iteration number in increasing We by 1	
	Fixed ω	Stepwise reduction of ω
-100	362	436
101-200	459	562
201-300	1146 (We 201-286)	763
301-400	Not converged	1097

図 7(b) は、図 7(a) と同じ条件で、横軸に反復回数を、縦軸に半径方向速度 u の最大相対誤差を示したものである。緩和係数に固定値を与えた場合、最大相対誤差は一次的に減衰するが、緩和係数を段階的に減少させると誤差の減衰はさらに顕著に加速されることがわかる。なお、両者の収束解は少なくとも有効数字 3 桁まで一致することを確認している。

表 3 は、ある We の収束解を初期値として、 We を 1 だけ加えた条件において計算をおこない、収束までに要した反復回数を We 領域ごとの平均値でまとめたものである。

その結果、 $We < 200$ における解析では、緩和係数に固定値を与える場合が収束回数は少なく、逆に $We \geq 200$ では、緩和係数の段階的減少を適用する場合は、収束回数は少ないことがわかった。すなわち、低い We における収束解またはニュートン流体の収束解より出発して、徐々に We を高めて解析する場合、低 We 領域では緩和係数に固定値を用い、高 We 領域になった時点で緩和係数の段階的減少を適用することにより、効率的な計算が可能であることを示している。

Fig. 8 Predicted results at $We = 50$, $\alpha = 0.1$, $s = 0.1$, $\eta_0 = 5000 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\lambda = 1 \text{ s}$

4.4 α が小さい場合に対する本手法の有効性の検討

計算手法の汎用性を検証するため、Giesekus モデルの非線型パラメータ α を減少させ、数値解析を行った。

図 8 は $We = 50$, $\alpha = 0.1$ における計算結果であり、本報の手法をすべて適用して得られたものである。

図から明らかなように、ダイを出た流体は非常に大きくスウェルすることがわかる。これは、図 2 の粘度曲線において、 α を小さくすることにより、せん断速度、伸長速度の増加にともなう法線応力差、伸長粘度の増加が急激であるためである。

このような流体特性を持つ流体に対しても収束解が得られることより、本報の計算手法が多様なモデルパラメータに対しても柔軟に適応できることが示された。

5. 結 論

分割型有限要素法による、単一緩和モード Giesekus 流体を用いた円管ダイスウェル流動解析について、前報では 2 つの手法、すなわち、変形代入法と補間整合性を考慮し、 $We = 63$ までの収束解を得た。本報では、より収束性を改善するため、さらに 3 つの付加的手法を検討し、 $We = 400$ 以上でも収束解を得ることが可能となった。その付加的 3 手法は以下のとおりである。(1) 運動方程式と構成方程式に対するガウス積分精度が一致するように、1 要素におけるガウス点個数を統一し、それぞれ共通に 1 要素当たり 16 個のガウス点を用いること。(2) 運動方程式に変形代入法にて応力を代入する際、応力式中の反変型対流微分 $\vec{E}$ に含まれる速度ベクトルの取扱いについては、 $\nabla \mathbf{v}$ と $\nabla \mathbf{v}^T$ を未知関数、移流項の $\mathbf{v}$ を既知関数として取扱うこと。これは離散化方程式の優対角性を強めるためである。(3) 速度場・応力場と自由表面形状の緩和係数の設定法については、それぞれの変数の最大相対誤差に連動させて、緩和係数を段階的に減少させること。特に、自由表面形状に関する緩和係数は比較的小さく設定する必要があること。の以上 3 点である。

参 考 文 献

- 1) 岩田修一, 新垣 勉, 森 秀樹, 秦 裕作, 石川敏志, 岩淵欽也: 成形加工, **10**(10), 824-831 (1998)
- 2) 桑野善文, 梶原稔尚, 船津和守: 日本レオロジー学会誌, **21**, 130 (1993)
- 3) Baaijens, F.P.T.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **79**, 361-385 (1998)
- 4) 田上秀一, 古閑二郎, 梶原稔尚, 家元良幸, 船津和守: 成形加工, **9**(10), 817-824 (1997)
- 5) Matallah, H., Townsend, P. and Webster, M.F.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **75**, 139-166 (1998)