高分子レオロジーと成形加工 CAE の基礎

—その中身と周辺問題—

(18) マクロスコピック系の CAE：構造体変形と座屈

野々村 千里*

1. はじめに

鉄鋼，自動車産業等の分野では，比較的早くから構造体変形や座屈に関して，有限要素法（Finite Element Method：FEM）をベースにした CAE（Computer Aided Engineering）が研究開発されている．対象となる金属材料の変形や応力解析において，かなりの成果がこれまでに報告されている．FEM が機械，土木，建築等の学問から出発している手法なので，製品設計に活用できる事例も多い．

一方，プラスチック成形加工分野においては，まだまだ経験と勘に頼っていることが多く残されている．これは，CAE を本格的にプラスチックに応用しはじめたのが最近であることもあるが，本質的には，プラスチックの持つ力学的特性（例えば，金属材料に比べて弾塑性，粘弾性挙動に代表される材料非線形性が非常に強い等）を正確にモデル化することが困難であることにある．また，このような変形挙動は，大変形，大ひずみ，さらに，座屈等の不安定現象を伴うことが多い．したがって，製品形状に由来する幾何学的な応答や形状の変化（幾何学的非線形性）を考慮した解析手法が必須となってくる．近年では，非線形問題を精度良く解ける解法が発展し，プラスチック成形加工分野において，設計に活用できる CAE の成功事例も数多く報告され，非常に注目されている分野の一つである．

本講座では，プラスチックの構造体変形に関しては，構造体（固体）変形に関する有限要素法の基礎理論を中心に，幾何学非線形性と材料非線形性を解説し，座屈に関しては，基礎理論の解説に留める．最後に，有限要素法による CAE の適用事例について，筆者らの研究例の概略を紹介する．紙面の関係上，基本的な数式の記載に留めざるをえず，したがって，基礎理論の初歩的な式の列記であるため，連続体力学に基づく基礎理論をご存知の読者には，物足りないところもあると思うがご容赦いただきたい．なお，詳細な理論や数式の誘導等については，参考文献の専門書を参照いただきたい．

図1 立方体要素の応力成分

2. 構造体変形に関する有限要素法の基礎理論

まず，有限要素法の基礎理論である線形弾性問題の基礎方程式，仮想仕事の原理，そして，構造体変形に用いる有限要素の種類について簡単に説明する．

2.1 線形弾性問題の基礎方程式

線形弾性問題の主な目的とするところは，外力を受けて静的つり合い状態にある構造体（弾性体）の応力，ひずみ，変位，そして，荷重を解析することである．詳細は，参考文献の入門書^{1)~9)}を参照いただきたい．

2.1.1 つり合い方程式

図1に示すような立方体要素を考え，この要素に作用する力のつり合い方程式は，垂直応力を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ，せん断応力を $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$ とし， F_x, F_y, F_z をそれぞれ単位体積当たりの体積力とすると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

となる．なお，モーメントのつり合いから $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ， $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ， $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ である．(1)式は，6個の応力成分に対する3個の

* Nonomura, Chisato
東洋紡績(株) 総合研究所 コーポレート研究所
高分子加工グループ
滋賀県大津市堅田 2-1-1 (〒520-0292)
2006.5.23 受理

方程式である。したがって、つり合い方程式からだけでは応力は定まらない。

2.1.2 ひずみ-変位関係式

図1と同様な立方体要素において、6個の応力成分に対して共役なひずみを考える。垂直ひずみは $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ となり、せん断ひずみは $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ となる。この要素に変位を与えると考え、その x, y, z 方向の変位成分を u, v, w とすると、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (2)$$

となり、これらをひずみ-変位関係式とよぶ。これらをマトリックス記号で表示すると、

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\} \quad (3)$$

となる。 $\{\varepsilon\}$ はひずみベクトル、 $\{u\}$ は変位ベクトルで、 $[B]$ をひずみ-変位マトリックス(Bマトリックス)とよぶ。

2.1.3 応力-ひずみ関係式

立方体要素の応力とひずみの関係について考える。ひずみの小さい部分では応力はひずみに比例しており、フックの法則が成立する。つまり、弾性体とはフックの法則が完全に成立する物体である。このときの応力とひずみの関係は、 $\sigma = E\varepsilon$ である。 E はヤング率(縦弾性係数)である。棒を引張変形させると、軸方向には伸びるが、同時に断面は小さくなる。一樣断面の棒が軸方向に引張られて縦ひずみ ε を生じるときは、これと直角の方向に横ひずみ ε' が生じて、 $\varepsilon' = -v\varepsilon = -v(\sigma/E)$ の関係が成立する。 v は比例定数で、ポアソン比である。つまり、引張変形時は断面が縮み、逆に圧縮変形時は断面が膨らみ、その割合を v で表わす。引張方向を x 軸にとった場合には、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_y &= -v\varepsilon_x = -\frac{v}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_z &= -v\varepsilon_x = -\frac{v}{E} \sigma_x\end{aligned}\quad (4)$$

が得られる。これは、 x 方向の応力 σ_x が単独で x, y, z 方向に生じさせるひずみであるから、一般の応力状態 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ が同時に存在する場合のひずみは、微小ひずみのとき $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ がおのおの単独に作用する場合を重ね合わせることによって求められる。 σ_y, σ_z についても同様である。さらに、せん断応力とせん断ひずみの間には、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z)\}, \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+v)}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{\sigma_y - v(\sigma_z + \sigma_x)\}, \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+v)}{E} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{\sigma_z - v(\sigma_x + \sigma_y)\}, \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+v)}{E} \tau_{zx}\end{aligned}\quad (5)$$

が成立する。これらは一般化したフックの法則とよばれる。なお、せん断応力-せん断ひずみの関係と垂直応力-垂直ひずみの関係との間には相互関係はない。せん断応力とせん断ひずみとの間には、 $G = E/(2(1+v))$ の比例関係が成立し、 G はせん断弾性係数(横弾性係数)である。

以上により、6個の応力成分と6個のひずみ成分間の関係が求められたことになり、合計6個の式をまとめて書くと、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z)\}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{\sigma_y - v(\sigma_z + \sigma_x)\}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{\sigma_z - v(\sigma_x + \sigma_y)\}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}\end{aligned}\quad (6)$$

となる。これらを応力成分に関して求めると、

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \left\{ \varepsilon_x + \frac{v}{1-v} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right\}, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \left\{ \varepsilon_y + \frac{v}{1-v} (\varepsilon_z + \varepsilon_x) \right\}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \left\{ \varepsilon_z + \frac{v}{1-v} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right\}, \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}\end{aligned}\quad (7)$$

となり、これらを応力-ひずみ関係式とよぶ。このように、等方性材料の材料定数は2つの独立変数(E と v)である。

これらをマトリックス表示すれば、

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (8)$$

となる。 $\{\sigma\}$ は応力ベクトル、 $\{\varepsilon\}$ はひずみベクトルで、 $[D]$ を応力-ひずみマトリックス(Dマトリックス)とよぶ。

また、複合材料等では、異方性体として取り扱う必要がある。その中で代表的な直交異方性体は、弾性対称面が直交しているので、各せん断成分は独立となる。したがって、応力、ひずみ成分は、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{v_{yx}}{E_y} \sigma_y - \frac{v_{xz}}{E_z} \sigma_z, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{v_{xy}}{E_x} \sigma_x - \frac{v_{yz}}{E_z} \sigma_z, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} \sigma_z - \frac{v_{zx}}{E_x} \sigma_x - \frac{v_{zy}}{E_y} \sigma_y, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G_{zx}} \tau_{zx}\end{aligned}\quad (9)$$

となる。相反定理により $v_{xy}/E_x = v_{yx}/E_y$, $v_{xz}/E_x = v_{zx}/E_z$, $v_{yz}/E_y = v_{zy}/E_z$ であるから独立変数は減少し、9つの独立変数($E_x, E_y, E_z, v_{xy}, v_{yz}, v_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$)で表わされる。

ただし、材料主軸座標系(局所座標系)が全体座標系から傾いている場合には、取り扱いに注意が必要となる。材料主軸座標系でのマトリックスを $[D]$ とすると、全体座標系でのマトリックス $[D]$ は、座標変換マトリックス $[T]$ を用いて、

$$[D] = [T]^T [D'] [T] \quad (10)$$

となる。なお、詳細は参考文献^{7), 9), 10)}を参照いただきたい。

市販の汎用ソフトウェアでは、材料主軸座標系での材料定数を入力することが一般的であるので、構造体の全体座

標系への座標変換に注意する必要がある。

2.1.4 境界条件

境界条件の見地から物体の表面は2つの部分に分類される。すなわち、境界条件が外力で与えられている部分 S_σ と変位で与えられている部分 S_u に分類される。もちろん、 $S = S_\sigma + S_u$ である。 S_σ を力学的境界条件、 S_u を幾何学的境界条件とよぶ。

このような、つり合い方程式、ひずみ-変位関係式、応力-ひずみ関係式の合計15式に対し、未知量は応力成分6個、ひずみ成分6個、変位成分3個の合計15個となる。したがって、線形弾性問題は上記15個の基礎方程式を、力学的、幾何学的境界条件を満足するように解くことになる。

2.2 仮想仕事の原理

連続体力学における重要な原理の一つである仮想仕事の原理は、「1つの質点が、これに働く幾つかの力の作用のもとでつり合い状態にあるとき、この質点に任意の微小な仮想変位を与えても、質点に働いているすべての力がこの仮想変位によってなす仕事の総和はゼロである。」と表現できる。

与えられた仮想変位の x, y, z 方向の成分を $\delta u, \delta v, \delta w$ とし、質点に働く力の x, y, z 方向の成分の総和を $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z$ とすれば、この仮想変位によってなす仕事は、 $\delta u \Sigma F_x, \delta v \Sigma F_y, \delta w \Sigma F_z$ である。したがって、仮想仕事の原理は、

$$\delta u \Sigma F_x + \delta v \Sigma F_y + \delta w \Sigma F_z = 0 \quad (11)$$

と表わされる。任意の仮想変位 $\delta u, \delta v, \delta w$ に対して(11)式が成立することから、

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0 \quad (12)$$

が成立する。(12)式は質点に作用する力のつり合いを示している。すなわち、仮想仕事の原理は、つり合い方程式と等価である。以上の質点に対する仮想仕事の原理は、外力(表面力および体積力)の作用のもとでつり合い状態にある弾性体についても成立する。

外力(表面力および体積力)の作用のもとで弾性変形している物体の各点(各点のまわりの微小体積)はつり合い状態にあり、応力による内力の和と外力の和は等しい。このようなつり合い状態にある弾性体の各点に、任意の微小な仮想変位を与えたとき、仮想変位による外力、内力のなす仕事の和はゼロである。仮想仕事の原理は、仮想変位 $\delta u, \delta v, \delta w$ に対して、

$$\begin{aligned} & \int \int (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w) dS \\ & + \int \int \int (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dx dy dz \\ & - \int \int \int (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \\ & + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

と表わすことができる。 P_x, P_y, P_z は、それぞれ単位面積当たりの表面力、 F_x, F_y, F_z は、それぞれ単位体積当たりの体積力、 $\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \epsilon_z, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{zx}$ は、それぞれ仮

想変位の各成分 $\delta u, \delta v, \delta w$ に対応するひずみ成分で、

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_x &= \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}, \quad \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} \\ \delta \epsilon_y &= \frac{\partial(\delta v)}{\partial y}, \quad \delta \gamma_{yz} = \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial z} \\ \delta \epsilon_z &= \frac{\partial(\delta w)}{\partial z}, \quad \delta \gamma_{zx} = \frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

(13)式の第1項は、仮想変位によって表面力がなす仕事、第2項は体積力がなす仕事、第3項は内力(応力)のなす仕事を示す。

単位面積当たりの表面力ベクトル $\{P\}$ 、単位体積当たりの体積力ベクトル $\{F\}$ 、仮想変位ベクトル $\{\delta^*\}$ 、仮想ひずみベクトル $\{\epsilon^*\}$ 、応力ベクトル $\{\sigma\}$ を、

$$\begin{aligned} \{P\} &= \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}, \quad \{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} \\ \{\epsilon^*\} &= \begin{Bmatrix} \delta \epsilon_x \\ \delta \epsilon_y \\ \delta \epsilon_z \\ \delta \gamma_{xy} \\ \delta \gamma_{yz} \\ \delta \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

とすれば、仮想仕事の原理はベクトルで表現することができ、

$$\int \{\delta^*\}^T \{P\} dS + \int \{\delta^*\}^T \{F\} dV - \int \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dV = 0 \quad (16)$$

となる。

仮想仕事の原理は既に述べたように、つり合い方程式と等価である。つまり、弾性体の支配方程式に対し、つり合い方程式の代わりに仮想仕事の原理を用いることができる。なお、境界条件として、外力(表面力)および拘束変位に関する条件を付け加える必要があるが、後者では、仮想仕事の原理に表面力に関する項が入っているから、境界条件のうち外力(表面力)に関するものは含まれることになり、加えるべき境界条件は、拘束変位に関するものだけになる。

また、仮想仕事の原理は、次のような物理的な意味をもつ。

- (1) 物体が安定なつり合い状態にある場合には、物体の位置エネルギー(ひずみエネルギー)は最小になる。
- (2) つり合い状態にある物体内部の応力分布あるいはひずみ分布は、その物体の位置エネルギーを最小とするような分布となる。

2.3 要素の種類

構造体変形では、流体解析に用いる要素と基本的に同じであるが、構造体(固体)変形を取り扱うため、若干異なるところがある。以下に要素の種類についての概略を説明する。

使用する要素は大別すると、一次元、二次元、三次元要素に分類できる。対象とする問題に対し、それぞれに適した要素を選択することで、無視できる応力、ひずみ成分を省略し、計算時間の省力化を行っている。代表的な要素を

図2 要素の種類 (a) トラス要素 (b) ビーム要素

図3 要素の種類 (a) 三角形要素 (b) 四辺形要素

図4 要素の種類 (a) 軸対称要素 (b) シェル要素

図2～6に示す。なお、図中の●は要素を構成する節点を表わす。それぞれの要素の特徴は、

(1) 一次元要素

- (a) トラス要素 (節点自由度 3) (図2(a))
軸力のみを考慮
- (b) ビーム要素 (節点自由度 6) (図2(b))
軸力と曲げ変形 (曲げモーメントと回転角の関係) を考慮

(2) 二次元要素

- (a) 平面応力要素 (節点自由度 2) (図3(a))
 $x-y$ 平面を対象 (z 方向の応力とひずみ: $\sigma_z = 0, \epsilon_z \neq 0$)
- (b) 平面ひずみ要素 (節点自由度 2) (図3(b))

図5 要素の種類(ソリッド要素)

図6 要素の種類 (a) アイソパラメトリック要素 (b) 低減積分要素

$x-y$ 平面を対象 (z 方向の応力とひずみ: $\sigma_z \neq 0, \epsilon_z = 0$)

(c) 軸対称要素 ($r-\theta-z$ 座標系) (節点自由度 2) (図4(a))
 $r-z$ 平面を対象

(d) シェル要素 (節点自由度 6) (図4(b))
平面応力要素と曲げ要素を考慮

(3) 三次元要素

(a) ソリッド要素 (節点自由度 3) (図5)

となる。

シェル要素に関しては、ビーム要素と同様に、 $x-y-z$ 座標系の面内変形 (平面応力要素) と、 $x-y-z$ 座標系に対する面外変形 (曲げ要素) とがあり、後述の幾何学的非線形問題等では、この両者の相互作用が無視できないので、注意が必要である。

また、少ない要素分割で解析精度向上のため、ひずみ-変位関係式の高次項を形状関数に同次に用いるアイソパラメトリック要素 (図6(a)参照: 多くの積分点を持つ要素) や、特定の非線形問題における不具合に対して対処するための低減積分要素 (図6(b)参照: 積分点を減らした要素) も実用化されている。なお、図中の×は、積分点を表わす。

さらに、流体問題や熱伝導問題との連成問題も近年では盛んに行われている。その場合には、それぞれの問題において適合する要素を選択することが要求される。

図7 三角形要素の節点荷重と節点変位

要素の形状関数等の詳細については、紙面の関係上割愛するが、参考文献の入門書^{1)~9)}を参照いただきたい。なお、市販の汎用ソフトウェアでは、それぞれの要素で形状関数等の記述が異なるため、ソフトウェアのマニュアル等を参照の上、取り扱いには十分な注意が必要である。

2.4 剛性方程式

FEMには幾つかの種類があるが、ここで述べる変位法によるFEMは、仮想仕事の原理に基づいた近似解法である。つまり、弾性体の支配方程式として、仮想仕事の原理、ひずみ-変位関係式、応力-ひずみ関係式を用いる。

図7に示す三角形要素を例にとり、有限要素に対して仮想仕事の原理を適用する。体積力による項を考えないとし、節点力のなす仕事は表面力のなす仕事に等しくなるように、節点荷重を定義すると、

$$\int \{\delta^*\}^T \{P\} dS = \int \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \quad (17)$$

となる。

三角形要素の節点荷重ベクトル $\{f\}$ 、節点変位ベクトル $\{u\}$ は、

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{xj} \\ f_{yj} \\ f_{xk} \\ f_{yk} \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (18)$$

とする。 i, j, k は、それぞれ三角形要素における節点番号を表す。したがって、(17)式の左辺は、節点力のなす仕事 $\{\delta^*\}^T \{f\}$ となり、(17)式の右辺は、要素内での応力、ひずみは一定であるので、 $V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\}$ となる。これに、ひずみ-変位関係式、応力-ひずみ関係式を代入し、仮想変位ベクトル $\{\delta^*\}$ に対する仮想ひずみベクトル $\{\varepsilon^*\}$ の関係が、 $\{\varepsilon^*\} = [B] \{\delta^*\}$ であることに注意すると、

$$\{\delta^*\}^T \{f\} = V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} = V ([B] \{\sigma^*\})^T [D] [B] \{u\} \quad (19)$$

となる。 V は要素の体積を表す。 $\{\delta^*\}$ は任意の仮想節点変位ベクトルであるので、

$$\{f\} = V [B]^T [D] [B] \{u\} \quad (20)$$

となる。荷重、変位をベクトルで表わし、この式をマトリックス表示したものを剛性マトリックスを $[K]$ とすると、

$$[K] = V [B]^T [D] [B] \quad (21)$$

で表わされる。これは荷重ベクトルと変位ベクトルを結びつけるもので、その物体の剛さを示すものであり、最終的に、

$$\{f\} = [K] \{u\} \quad (22)$$

の剛性方程式が得られる。これを全要素について重ね合わせたものが、構造体全体の剛性方程式となり、構造体変形の基本となる式である。

3. 構造体変形

プラスチック構造体（固体）の変形を取り扱うときに最も重要となるのは、非線形問題である。そして、それぞれの非線形問題に適した解法を適宜選択することにある。

非線形性を考慮する際には、一般的に増分理論（荷重増分法）に基づく解法が用いられる。非線形問題であっても、微小荷重増分に対しては、構造体はほぼ線形的に挙動すると仮定することができる。したがって、増分理論は徐々に荷重を受けて変形する構造体の平衡状態を、初期平衡状態から最終平衡状態に至る各平衡状態を逐次求めていく解法である。すなわち、区分線形化を施して、折れ線近似により非線形平衡経路を追跡することが増分解法である。

非線形問題は、幾何学的非線形性と材料非線形性とに大別できる。幾何学的非線形性とは、ひずみと変位の関係が非線形であることを、材料非線形性とは、応力とひずみの関係が非線形であることをそれぞれ表す。この両者のほかに、境界条件が非線形となる問題（例えば、接触問題や摩擦問題等）があるが、ここでは割愛する。

3.1 幾何学的非線形性

幾何学的非線形性に関しては、既に理論構築がされており、基本的にCAEを使用する技術者（ユーザー）が変位、ひずみ、荷重、応力や、そして基礎方程式の定義、記述に関して新たに寄与できるところはないと考えてよい。また、現在市販されている汎用ソフトウェアの多くは、幾何学的非線形性を効果的に解ける解法の機能を持っているものが多い。しかし、基礎理論を知らずに汎用ソフトウェアの機能を使っただけでは、アウトプットとして得られる解析結果に信頼性がなくなる。解くべき問題に対し、必要最小限の基礎理論の理解と、最適な解法の選択が重要であることは明白である。

幾何学的非線形問題を取り扱う際には、変形と変位を分離して考える。大別すると、

(1) 大変形・大ひずみ問題

変形：大（大变形）、ひずみ：大（大ひずみ）

(2) 大変位（回転）・微小ひずみ問題

変位（回転）：大（大変位）、ひずみ：小（微小ひずみ）

となる。(2)は、剛体回転ともよばれ、(1)とは取り扱いが大きく異なる。また、それぞれの問題で取り扱う応力とひずみにも種類がある。以下、応力とひずみについて説明する。

3.1.1 応力とひずみ

試験片の初期断面積と標点距離をそれぞれ A_0 , l_0 , その変形後の値をそれぞれ A , l , 荷重を P とすれば, 公称応力 (第1 Piola Kirchhoff 応力ともよぶ) s と公称ひずみ e は,

$$s = \frac{P}{A_0}, \quad e = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (23)$$

となる. また, 第2 Piola Kirchhoff 応力 t と Green ひずみ λ は,

$$t = \frac{P}{A_0} \frac{l_0}{l} = T \frac{l_0}{l}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \quad (24)$$

となる. これに対し, 変形後の寸法, すなわち, A と l を基準とする真応力 (Cauchy 応力ともよばれる) σ と対数ひずみ ε は,

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad \varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} \quad (25)$$

となる.

このように, それぞれに対応する応力とひずみの組み合わせがある. 構造体が弾性変形を起こしている場合, ひずみは 0.1% オーダーの弾性範囲であるので, いずれの応力とひずみを用いても, 数値の上で差は生じない. しかし, 前述の大変位・微小ひずみ問題や大変形・大ひずみ問題では, どの組み合わせを用いるかによって, 数値上のみなく, 理論の構成自体にも, 無視できない差異が現れるため, このような組み合わせを必要に応じて選択する必要がある.

幾何学的非線形性を考慮する際には, 線形弾性問題の基礎方程式 (仮想仕事の原理, ひずみ-変位関係式, 応力-ひずみ関係式) を増分形で考える.

増分のさせ方として代表的には, Total Lagrange 法と Update Lagrange 法があり, それぞれ, 適用できる範囲が異なる.

3.1.2 Total Lagrange 法

Total Lagrange 法は, 変形前を基準 (参照) 状態と考え, 大変位・微小ひずみ問題を取り扱う場合に適用される. 通常, ひずみは 5% 以下の場合に適用される場合が多い. ただし, ビーム要素やシェル要素の場合, 回転角が大きいと問題が生じる場合がある. 応力とひずみの関係は, 前述の第2 Piola Kirchhoff 応力 t と Green ひずみ λ を用いる.

増分形の仮想仕事の原理により, 基礎方程式を列挙すると,

$$\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon\} &= [\bar{B}] \{\Delta u\} \\ \{\Delta \sigma\} &= [D] \{\Delta \varepsilon\} \\ \{\Delta f\} + \{f_R\} &= [K_T] \{\Delta u\} \end{aligned} \quad (26)$$

ただし,

$$\begin{aligned} [\bar{B}] &= [B_0] + [B_L] \\ [K_T] &= [K_0] + [K_L] + [K_G] \\ [K_0] &= V [B_0]^T [D] [B_0] \\ [K_L] &= V ([B_0]^T [D] [B_L] + [B_L]^T [D] [B_0] + [B_L]^T [D] [B_L]) \\ [K_G] &= V [G]^T [S] [G] \end{aligned} \quad (27)$$

となる. $[B_0]$ と $[B_L]$ は, それぞれ現時点における変位に依存しない成分と依存する成分であり, $[B_0]$ は線形弾

性問題に用いられる $[B]$ と同じものである.

また, $[K_0]$ は微小変位マトリックスとよばれ, 幾何学的非線形性の効果は含まれていない. $[K_L]$ は大変位マトリックス (あるいは, 初期変位マトリックス) とよばれ, $[B_L]$ を介して現時点での変位の影響を含んでいる. $[K_G]$ は初期応力マトリックス (あるいは, 幾何剛性マトリックス) とよばれ, 現時点における応力マトリックス $[S]$ と, 変位勾配マトリックス $[G]$ により計算されるものである. また, $\{\Delta f\}$ は外力増分ベクトル $\{f_R\}$ は現時点における不平衡力ベクトルとよぶ. なお, 紙面の関係上, マトリックス, ベクトル記述についての詳細は割愛する.

3.1.3 Update Lagrange 法

Update Lagrange 法は, 変形後を参照状態と考え, 大変位・大ひずみ問題を取り扱う場合に適用される. 通常, ひずみは 5% 以上の場合に適用される場合が多い. 応力とひずみの関係は, 真応力 σ と対数ひずみ ε を用いる.

増分形の仮想仕事の原理により, 基礎方程式を列挙すると,

$$\begin{aligned} \{\Delta^* \varepsilon\} &= [B^*] \{\Delta u\} \\ \{\Delta^* \sigma\} &= [D^*] \{\Delta^* \varepsilon\} \\ \{\Delta f\} + \{f_R\} &= [K_T] \{\Delta u\} \end{aligned} \quad (28)$$

ただし,

$$\begin{aligned} [K_T] &= [K] + [K_G] \\ [K] &= V [B^*]^T [D^*] [B^*] \\ [K_G] &= V [G^*]^T [S^E] [G^*] \end{aligned} \quad (29)$$

となる. $[B^*]$ は基準状態は異なるが, 線形弾性問題に用いられる $[B]$ と同じものである.

また, $[K]$ は増分剛性マトリックスとよばれ, 幾何学的非線形性の効果を含んでいる. $[K_G]$ は初期応力マトリックス (あるいは, 幾何剛性マトリックス) とよばれ, 現時点における応力マトリックス $[S^E]$ と, 変位勾配マトリックス $[G^*]$ により計算されるものである. また, $\{\Delta f\}$ は外力増分ベクトル, $\{f_R\}$ は現時点における不平衡力ベクトルとよぶ. なお, 紙面の関係上, マトリックス, ベクトル記述についての詳細は割愛する.

以上のように, Total Lagrange 法と Update Lagrange 法では, 定式化が異なる. 参考文献^{(9),(11)}における式の誘導をぜひ参照いただきたい.

3.2 材料非線形性

材料非線形性とは, 先に述べた応力-ひずみ関係式が線形 (弾性変形) ではなく, 非線形となる. この非線形性の代表的なものに塑性と粘性がある.

塑性とは, 永久変形が生じることであり, 金属やプラスチックの大変形問題で切り離せない問題である. すなわち, 弾性限度を超えた後のひずみは, 弾性成分と塑性成分からなる. 弾性成分は回復可能で, 荷重を取り除くとゼロにもどるが, 塑性成分は永久的に残留する. 一般に塑性変形は, 応力がある限界の状態に達してから生じはじめる. これが弾性限度であり, 限界となる応力状態を降伏条件という. それゆえ, 塑性変形の問題を取り扱うためには, 降伏条件を定めることと, 降伏状態に達した後の応力-ひずみ関係式を決定することが重要となる. 弾性変形では, 応力-ひ

ずみ関係式に比例関係が成立するが、塑性変形では、永久変形の出現により比例関係あるいは線形の関係は期待できない。

塑性は、弾性に対比されるべき特性であるが、弾性と塑性の範囲のみを対象とし、外的な荷重条件、あるいは、変位の拘束条件が不変であれば、物体内部で応力やひずみの状態に変化を生じない。すなわち、応力とひずみの関係に時間依存性がない点で、塑性と弾性には共通の性質がある。

これに対し、粘性は、時間依存性があり、例えば、一定の応力状態下にあっても、時間とともにひずみが増加するクリープ現象が起こる。また、ひずみを一定に保った状態で、応力が徐々に低下する応力緩和現象が起こる。プラスチックは時間依存性を持つ代表的な材料であり、応力とひずみの関係を粘弾性問題として取り扱うことも少なくない。

材料非線形性に関しては、今でも新たな理論構築の研究が進められており、プラスチック CAE の成功の鍵を握る最も重要なモデル化のポイントと考えてよい。現在市販されている汎用ソフトウェアにも、いろいろな材料モデルの機能が追加されてきており、今後も発展が期待されている分野である。また、幾何学的非線形性と同様、解くべき問題に対し、必要最小限の基礎理論の理解と、最適な解法の実装が重要である。

3.2.1 弾塑性問題

構造体の変形において、弾性状態にあるか塑性状態にあるかによって、弾性の応力-ひずみ関係式と弾塑性の応力-ひずみ関係式とを選択的に用いるのが弾塑性問題である。どちらの状態にあるのかを判断するのが降伏条件である。弾性状態における材料定数の決定と同様、塑性状態における材料定数（パラメータ）の決定には、実験データが必要である。ここでは、一軸引張時における応力-ひずみ関係式が重要となり、弾塑性状態における近似を行う。

応力とひずみは、弾性圧縮性を無視して体積一定の仮定のもとに、真応力 σ と対数ひずみ ε を用いる。一軸引張時における応力-ひずみ曲線を図 8 に示す。ひずみ成分を増分形で表わすと、

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p \quad (30)$$

となる。ここで、 $\Delta \sigma$ は応力増分、 $\Delta \varepsilon$ は全ひずみ増分を表わす。ここでは、弾性ひずみ増分 $\Delta \varepsilon^e$ と塑性ひずみ増分 $\Delta \varepsilon^p$ とに分けて考える。応力とひずみの関係は、

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= H_0' \Delta \varepsilon \\ \Delta \sigma &= E \Delta \varepsilon^e \\ \Delta \sigma &= H' \Delta \varepsilon^p \end{aligned} \quad (31)$$

となる。図 8 に示すように、 H_0' は接線係数、 H' はひずみ硬化（加工硬化）係数とよぶ。 H_0' と H' の間には、

$$H_0' = \frac{EH'}{E + H'}, \quad H' = \frac{EH_0'}{E - H_0'} \quad (32)$$

の関係が成立する。なお、 E は弾性解析で用いるヤング率である。直接引張試験から図 8(b) の曲線を求めることはできないので、 H_0' から H' を求めればよい。

また、応力 σ と塑性ひずみ ε^p との関係は、

図 8 弾塑性材料の応力-ひずみ曲線 (a) 応力-全ひずみ曲線 (b) 応力-塑性ひずみ(ひずみ硬化) 曲線

$$\sigma = \sigma_y \left(1 + \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_y} \right)^n \quad (33)$$

の n 乗硬化則 ($0 \leq n \leq 1$) で近似することもできる。ただし、 $n=1$ とおけば直線近似となる。なお、 σ_y は降伏点における応力（初期降伏応力）、 ε_y は初期降伏ひずみ ($\varepsilon_y = \sigma_y / E$) である。

降伏条件は、前述のような一軸引張（単軸応力状態）ではなく、任意の負荷状態（多軸応力状態）で考える必要がある。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right. \\ \left. + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^p = \left[\frac{2}{3}(\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p)^2 + (\varepsilon_y^p - \varepsilon_z^p)(\varepsilon_z^p - \varepsilon_x^p) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^{p2} + \gamma_{yz}^{p2} + \gamma_{zx}^{p2}) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (35)$$

のように、単軸応力相当の相当応力 $\bar{\sigma}$ と、一軸引張での塑性ひずみ相当の相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ を定義する。この $\bar{\sigma}$ は、Mises の相当応力ともよばれ、これらを用いて降伏を判定するので、Mises の降伏条件とよぶ。全ての要素に対して、相当応力 $\bar{\sigma}$ と現在の降伏応力とを比較し、増分毎に降伏の判定（弾性/塑性、負荷/除荷）を行う。そのほか、Tresca の降伏条件や、異方性パラメータを用いた Hill の降伏条件等がある。

ひずみ硬化則の中で、降伏曲面が単純に膨張する場合を等方硬化則とよぶ。一旦、降伏して塑性領域を経た領域は、降伏応力が増大する。図 8(a) の除荷の勾配は、ヤング率に等しい。除荷された領域が再度負荷されると、除荷と同じ経路を戻り、初期降伏応力より高い応力（増大した降伏応力）で元の曲線に戻る。したがって、降伏応力は塑性変形の進行に伴って変化する。これがひずみ硬化現象である。

また、Bauschinger 効果とよばれる降伏局面の大きさが変化せずに移動する場合を移動硬化則とよび、降伏局面が増大しながら移動する（等方硬化則と移動硬化則の両方）場合を混合（複合）硬化則とよぶ。

応力-ひずみ関係式は、

$$\begin{aligned}\{\Delta\sigma\} &= [D^p] \{\Delta\varepsilon\} \\ [D^p] &= [D^e] - [D^e]\end{aligned}\quad (36)$$

である。なお、 $[D^e]$ 、 $[D^p]$ 、 $[D^p]$ は、それぞれ弾性、塑性、弾塑性の D マトリックスである。解法としては、区分的線形近似を行う $r_{\min}$ 法や、反復解法による後退積分法等がある。マトリックスの記述や式の誘導等は参考文献^{9), 11)~17)}を参照いただきたい。

また、Total Lagrange 法と Update Lagrange 法では、応力-ひずみ関係式の記述が異なり、単純なものではない。式の誘導等は、参考文献^{9), 11)}を参照いただきたい。

さらに、構造体の受ける塑性変形が弾性変形に比べて極めて大きく、変形中の除荷もほとんどないような場合には、剛塑性問題として取り扱っても、十分な精度が得られる場合もある。式の誘導等は、参考文献^{9), 15), 16)}を参照いただきたい。

市販の汎用ソフトウェアでは、降伏条件、ひずみ硬化則等の機能は組み込まれていることが多い。しかし、前述の塑性理論は、主に金属材料を対象とした古典理論であるので、プラスチックに適用する場合、塑性変形を確実に記述できるモデルは未だに存在しないと考えてよい。また、対象とする構造体の塑性状態における応力-ひずみ関係を実験から求める必要もある。したがって、応力、ひずみの大きさや非線形性の程度、繰り返し荷重の経路（負荷および除荷の有無）等によって、適当なモデルを選択することが最も重要である。

3.2.2 粘弾性問題

応力-ひずみ関係式が時間依存によるものであり、弾性ひずみに粘性ひずみを加えたものとなる。線形の粘性は、応力がひずみ速度に比例するものとし、これと線形の弾性を直列および並列に組み合わせたものが基本的である。 σ 、 ε 、 $\dot{\varepsilon}$ は、それぞれ応力、ひずみ、ひずみ速度とし、 E 、 η は、それぞれ弾性係数、粘性係数とすると、 $\sigma = E\varepsilon$ 、 $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ となる。

初期ひずみ型解法では、小さな時間ステップを用い、下記の線形弾性応力-ひずみ関係式、

$$\{\Delta\sigma\} = [D^e] \{\Delta\varepsilon^e\} = [D^e] (\{\Delta\varepsilon^t\} - \{\Delta\varepsilon^p\}) \quad (37)$$

を満足させるように解く。 $[D^e]$ は弾性の D マトリックス、 $\{\Delta\varepsilon^t\}$ 、 $\{\Delta\varepsilon^p\}$ 、 $\{\Delta\varepsilon^e\}$ は、それぞれ全ひずみ、弾性ひずみ、クリープひずみベクトルである。この場合、剛性マトリックスが一定であるため、その逆行列を求めておけば、変位増分の算出には後退代入のみが必要であるため、計算時間の点で有利となる。

接線剛性型解法では、ひずみ速度が応力等の状態変数により決定される場合に用いられる。弾塑性解析の接線剛性に類似のマトリックス $[\bar{D}]$ を使用することにより、弾塑性解析と同様な流れで解析を進める。この解析では、各ステップで剛性マトリックスを計算することが必要となり、初期ひずみ型解法に比べて 1 ステップ当たりの解析時間は増大するが、より大きな時間増分を用いても、精度の良い解が得られる利点もある。式の誘導等は、参考文献^{9), 12)}を参照いただきたい。

3.2.3 超弾性問題

超弾性問題は、ゴムやエラストマー等の材料に用いられるものである。応力成分が、ひずみエネルギー関数の微分によって定められる場合に用いる。ひずみエネルギー関数の形式には様々なものが提唱されているが、代表的なものに Mooney-Rivlin 則、Ogden 則がある。

Mooney-Rivlin 則では、

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (38)$$

で表わされる。 W はひずみエネルギー関数、 I_1 、 I_2 は、それぞれ弾性ひずみの一次、二次の不変量、 C_{10} 、 C_{01} は、それぞれ実測値から得られる材料定数である。なお、弾性ひずみの不変量 I_1 、 I_2 は、

$$\begin{aligned}I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2\end{aligned}\quad (39)$$

で定義される。 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 は、それぞれ主軸方向の伸長比である。

さらに、James-Green-Simpson の三次変形式のひずみエネルギー関数を用いる場合には、

$$\begin{aligned}W &= C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3) \\ &\quad + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3\end{aligned}\quad (40)$$

で表わされる。 C_{10} 、 C_{01} 、 C_{11} 、 C_{20} 、 C_{30} は、それぞれ実測値から得られる材料定数である。

また、Neo-Hookean 則では、

$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad (41)$$

で表わされる。 C_{10} はヤング率 E から、

$$C_{10} = E/6 \quad (42)$$

のように求めることもできる。

Ogden 則では、

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (43)$$

で表わされる。 μ_n 、 α_n は、それぞれ実測値から得られる材料定数である。高次の項が必要であれば、 N の値を大きくする必要があるが、通常は $N=3\sim5$ である。

このような材料定数の決定には、実験結果（公称応力-公称ひずみ関係）をカーブフィッティングする必要がある。市販の汎用ソフトウェア（主にプリ・ポストプロセッサプログラム）には、このような機能が組み込まれていることが多い。例えば、解析対象とする構造体のひずみの領域によって最適なモデルがあり、低ひずみ領域の解析であれば、Neo-Hookean 則でもほぼ表現できる。しかし、高ひずみ領域の解析が必要であれば、高次項を含んだモデルが必要となってくる。したがって、カーブフィッティングするには十分な注意が必要である。ひずみエネルギー関数の特性を精度良く表現するためには、境界条件が異なる一軸伸長、純せん断（一軸拘束一軸伸長）、一様二軸伸長の実験が必要となる。詳細は、参考文献^{18)~20)}を参照いただきたい。

プラスチックを取り扱うときには、これまで説明してき

図9 構造物の不安定現象 (a) 分岐 (b) 座屈 (c) 飛び移り

図10 座屈点の分類 (a) 極限点 (b) 対称分岐点 (c) 非対称分岐点

た応力－ひずみ関係式が最も重要となる。これは、構成式（構成方程式）ともよばれ、それぞれの構造物に対して、適切な構成式が必要となることは明白であろう。

4. 座 屈

プラスチック構造物（固体）の変形を取り扱うときに注意すべきもう一つの問題は、座屈問題である。

座屈を考慮するには、座屈の種類によって解法が異なる。また、幾何学的非線形性や材料非線形性とも同時に起こる場合が多い。現在でも、積極的な研究がされており、完成された理論は存在しないと考えてよい。ここでは基礎理論の記述に留める。

4.1 不安定現象の分類

構造物が外力によって弾性的な変形を起こしているとき、外力と内部に生じた部材力とはつり合っているばかりでなく、通常は安定した平衡状態となっている。ところが、ある種の変形様式では、変形や外力が限界を超えると平衡状態が破れ、全く別の形をした安定平衡状態に移行したり、あるいは急激に変形が進み破壊したりすることがある。このような現象は一般に弾性不安定とよばれ、図9に示すように分類される。

まず、図9(a)は、荷重がある値に到達すると、いまままで存続してきた変形Ⅰから、全く新しい変形様式Ⅱに移るような不安定現象である。荷重－変位線図上でこの枝分かれする点を分岐点とよぶ。一般的には、この現象を狭い意味で座屈とよぶことが多い。

また、図9(b)は、屈服とよばれ、変形モードは変わらないものの荷重が極大値を示す現象である。極大値以降では、荷重（反力）が減少するにもかかわらず変形が増大するので、構造物は局所変形を起こし、時には破壊に至る。

さらに、図9(c)は飛び移りとよばれる現象である。荷重－変位線図に極大値と極小値があり、荷重制御の場合、

往路ではBからDへ、復路ではCからAに形状が飛び移る。飛び移り後は、荷重が回復して安定な状態となるので、石油缶のフタやキーボードのスイッチなど、クリック感を持たせたい部品に積極的に利用されている。

4.2 座屈点の分類

これらの不安定現象を解析するためには、図9に示す座屈点 P_{cr} を数値的に安定に処理することが必要となる。この点では、剛性がゼロになり、変形が一義的に定まらないといった問題点がある。ここでは座屈点の発生について分類する。荷重－変位関係を増分的に取り扱くと、

$$[K] \{\Delta u\} = \{f\} \dot{\lambda} \quad (44)$$

となる。 $[K]$ は増分区間における剛性マトリックス、 $\{\Delta u\}$ は変位増分、 $\{f\}$ は荷重モードを表す。なお、 λ を荷重パラメータの増分として考える。 $\det[K]$ の値がゼロでなければ、次の増分に対して変位を定めることができる。

$$\{\Delta u\} = \dot{\lambda} [K^{-1}] \{f\} \quad (45)$$

これを安定な状態とよぶ。

しかし、そうでない場合には、変位増分が一義的に定まらず座屈点となる。

$$\det[K] = 0 \quad (46)$$

$\dot{\lambda}$ を用いると、座屈点を図10に示すように分類することができ、荷重－変位曲線上に座屈点を示している。細長い柱を軸方向に圧縮すると、横たわみを生じて分岐する現象が一例である。座屈点の物理的な解釈は、参考文献^{9), 11), 21)}を参照いただきたい。

4.3 座屈固有値の解析

座屈の臨界荷重と変形の固有モードを固有値解析によって求めるのは、最も実用的な手段である。実際、オイラーの長柱座屈のように座屈前の挙動が線形に近い現象に対し

ては正確な評価が期待できるので、適切な裕度を見込んだ上で各種の設計用の規格に取り入れられている。しかし、寸法の公差や荷重の不安定等、初期不整と総称される構造上の不完全性は、座屈荷重の大幅な低下をもたらすことになる。このため、設計規格において座屈の理論解を適用する場合には2倍を超えるような裕度を求められることが少なくない。

一方、座屈点を越える際の変形モードは、必ずしも固有モードとは一致しないという本質的な問題がある。実際、複雑なシェル構造では、臨界荷重近傍に多数の固有モードが存在する。現実の負荷プロセスでは、多数の変形モードのうち、特定のものが選択的に進行するので、初期の固有モードを漏れなく抽出するだけでなく、選別する判断が必要となる。計算のアルゴリズムに関しては、全ての固有モードを効率的に求められるよう、一般的な逆べき乗法に替えて、大規模計算に向く手法を採用するような工夫も必要となる。

また、座屈が発生する荷重領域では、薄板の曲げに代表されるような大変形効果や塑性化が共存するのが通常である。これらの非線形性は、座屈発生前であっても荷重-変位関係の線形性を満たさないで、本来、線形を対象としている固有値解析をそのまま適用することはできない。接線剛性を用いた固有値解析も可能であるが、現実的な運用は難しいと考えられる。

4.4 弧長増分法による荷重増分解析

座屈固有値解析の不都合を補完するには、増分解析により座屈後の挙動も含めて変形挙動を追跡するのが有用である。しかし、この解析を荷重制御型で行う場合は、極値以降の領域で座屈荷重値そのものも未知数となるため、変形の発散を拘束するための工夫が必要となる。一般的には、弧長増分法とよばれる手法を適用すると、図9(c)に示す飛び移りの現象は正しく評価することが可能となる。

これに対して、分岐解析では、図9(a)のⅠに示すような主径路上で座屈点 L_{cr} を求め、分岐径路Ⅱに変形を誘導することが必要となる。しかし、弧長増分法そのものには座屈点の探索機能はないので、分岐点を見過ごし、主径路Ⅰの上でのみ平衡解を探しているようなことが少なくない。このような場合は、解析途中のわずかな数値の乱れが不整として作用し、径路ⅠとⅡの間を解が往復するような結果となる。このような問題において分岐点を逃さないようにするには、初期不整を与えるのが現状では最も現実的である。この操作によって、分岐点が極限点に変わり、分岐解析を飛び移り解析として取り扱うことになるので、安定な評価が可能となる。

座屈問題に関しては、確立された手法はないのが現状である。また、対象とする構造体が複雑な形状であれば、変形状態もより複雑で計算が困難となり、局所的な座屈によって計算が継続できない場合も多い。したがって、構造体全体の変形挙動だけでなく、局所的な変形挙動も考慮に入れて、モデルを選択することが最も重要である。今後、分岐径路を求める新しい手法等の発展が望まれる。

5. CAEの適用事例

これまで述べてきた構造体変形には、非線形性の考慮が

図11 PBT成形品のネック伝ば解析(真応力-対数ひずみ線図)

図12 PBT成形品のネック伝ば解析(荷重-変位線図)

重要であることは明白である。これまで筆者らが行ってきたCAEに関する研究内容を参考事例として紹介する。なお、解析手法の詳細は、それぞれの参考文献の内容を参照いただきたい。

5.1 高分子材料のネック伝ば解析

参考文献^{22)~26)}は、引張試験時の不均一変形挙動であるネッキング(くびれ)およびネック伝ば現象を解析した事例である。参考文献^{22)~24)}では、PETフィルムを対象とし、参考文献^{25), 26)}では、PBT成形品を対象としたネック伝ば解析についての事例である。ネッキングは、典型的な屈服現象であり、過去にも様々な研究成果が報告されている。著者らは、平面応力要素を使用した二次元解析^{22)~24)}と、ソリッド要素を使用した三次元解析^{25), 26)}によって、詳細な変形挙動の考察を行った。図11に数値解析に使用した真応力-対数ひずみ線図(弾塑性問題)を示す。図12に荷重-変位線図を、図13にネック伝ば進行中の変形状態図をそれぞれ示す。このような数値解析結果から、かなりの精度で実験結果を再現することに成功した事例である。

5.2 蛇腹状ダストカバーの変形解析

参考文献^{27), 28)}は、熱可塑性エラストマーを用いたダストカバーの大変形挙動を解析した事例(図14参照)である。

Photograph of necked PBT molding

Deformation diagram by FEM

図 13 PBT 成形品のネック伝ば解析(変形状態図)

図 14 蛇腹状ダストカバーの変形解析(変形状態図)

図 15 中空円筒型成形品の変形解析(変形状態図: 軸対称要素)

この事例では、複雑な蛇腹状の形状のため、三次元の接触問題が課題となる。また、材料が接触している箇所については、かなりの大変形領域となっている。一般的にエラストマーを取り扱う Mooney-Rivlin 則や Ogden 則に代表される超弾性体問題ではなく、エラストマーの大変形領域における塑性変形を考慮した弾塑性問題として取り扱った結果、製品設計に応用できるレベルでの数値解析が可能になった成功事例の一つである。本事例では、弾塑性問題における材料定数を厳密に再現したことが成功要因と考えられる。

5.3 落橋防止装置用緩衝材の変形解析

参考文献^{29)~32)}は、熱可塑性エラストマーを用いた落橋防止装置用の緩衝材について、大変形領域までの変形挙動を解析した事例である。参考文献^{29)~31)}では、中空円筒型成形品の座屈と接触を伴った変形挙動(図 15 参照)を、参考

文献^{29), 32)}では、ハニカム型成形品の面外座屈変形挙動と接触を伴った変形挙動を再現した事例である。中空円筒型成形品では、軸対称要素を用いた。この結果、弾塑性問題における材料定数を厳密に再現したことが成功要因と考えられる。ハニカム型成形品では、陰解法によるシェル要素の変形解析²⁹⁾(図 16 参照)と、陽解法によるソリッド要素の変形解析³²⁾(図 17 参照)をそれぞれ行っている。両者とも座屈を伴う複雑な変形挙動の再現に成功した事例である。陽解法とは、運動方程式を立て、対角化したマトリックスを解くため、自動車の衝突解析等に代表される複雑な変形問題等には有利な手法である。なお、陽解法の詳細については、参考文献^{9), 14)~17)}を参照いただきたい。本事例では、陽解法による解析が、上下非対称成形品(成形品上部に切欠有)の変形状態(上下非対称の変形挙動)が解析可能となった成功事例である。

図 16 陰解法によるハニカム型成形品の変形解析(変形状態図：シェル要素)

図 17 陽解法によるハニカム型成形品の変形解析(変形状態図：ソリッド要素)

5.4 緩衝工の変形解析

参考文献^{33)~42)}は、ポリウレタンフォーム材と熱可塑性エラストマーを用いた緩衝工(図 18 参照)の変形挙動について解析した事例である。複雑(空隙率が大きい)な形状をした熱可塑性エラストマー製の緩衝工と、ポリウレタンフォーム材とを比較し、体積変化を許容するフォームモデルを数値解析に適用して、複雑な形状である成形品を均質材として取り扱うことにより、モデルを簡略化したことによって、製品設計に応用できるレベルでの数値解析が可能になった成功事例である。本事例では、超弾性体の Ogden 則の拡張であるフォームモデルで材料定数を再現したことが成功要因と考えられる。

6. おわりに

本講座では、非線形問題に関する構造体変形と座屈について述べてきた。また、教科書的な数式の列挙になったことはご容赦いただきたい。なお、本解説に記した数式は、構造体(固体)の変形に関する CAE に携わる技術者にとって必要最低限の知識として、ぜひ理解していただきたい内容である。

今後も非線形問題としての CAE の更なる発展が期待されている。プラスチック材料を対象にした構造体変形や、座屈に関する CAE を行うに当たり、本講座が読者の参考になれば幸いである。

参 考 文 献

- 1) 三好俊郎著：有限要素法入門，培風館(1978)
- 2) 瀬口靖幸，北川浩，富田佳宏著：有限要素法の基礎(1983)，日刊工業新聞社
- 3) 三好俊郎，白鳥正樹，坂田信二著：有限要素法解析

図 18 緩衝工の変形解析(変形状態図)

(1998)，朝倉書店

- 4) 戸川隼人著：有限要素法の基礎と応用シリーズ 1 有限要素法概論(1981)，培風館
- 5) 山田嘉昭著：有限要素法の基礎と応用シリーズ 2 マトリックス法材料力学(1980)，培風館
- 6) 鷲津久一郎著：有限要素法の基礎と応用シリーズ 3 エネルギー原理入門(1980)，培風館
- 7) Zienkiewicz, O., C.著 吉識雅夫，山田嘉昭監訳：マトリックス有限要素法 三訂版(1984)，培風館
- 8) 鷲津久一郎，宮本博，山田嘉昭，山本善之，川合忠彦共編：有限要素法ハンドブック I 基礎編(1981)，培風館
- 9) 日本機械学会編：計算力学ハンドブック(I 有限要素法 構造編)(1998)，丸善
- 10) 林毅編：複合材料工学(1971)，日科技連出版社
- 11) 久田俊明，野口裕久著：非線形有限要素法の基礎と応用(1995)，丸善
- 12) 山田嘉昭著：有限要素法の基礎と応用シリーズ 6 塑性・粘弾性(1980)，培風館
- 13) 山田嘉昭編：マトリックス法の応用(1972)，東京大学出版会
- 14) 北川浩著：弾・塑性力学 —非線形解析のための基礎理論—(1987)，裳華房

- 15) 富田佳宏著：数値弾塑性力学 有限要素シミュレーション—基礎と応用(1990)，養賢堂
 - 16) 日本塑性加工学会編：非線形有限要素法 —線形弾性解析から塑性加工解析まで—(1995)，コロナ社
 - 17) 後藤学著：実践 有限要素法 —大変形弾塑性解析—(1995)，コロナ社
 - 18) Oden, J., T.著 山田嘉昭監訳：非線形連続体の有限要素法 2(1980)，培風館
 - 19) 飯塚博, 山下義裕：日本ゴム協会誌, **77**(9), 306(2004)
 - 20) Ogden, R., W.著：Non-Linear ELASTIC Deformation(1997)，Dover Pubns.
 - 21) 鷺津久一郎，宮本博，山田嘉昭，山本善之，川合忠彦共編：有限要素法ハンドブック II 応用編(1983)，培風館
 - 22) 野々村千里，鈴木利武，石原英昭：成形加工, **4**(9), 583(1992)
 - 23) 野々村千里，鈴木利武，石原英昭：成形加工, **5**(1), 60(1993)
 - 24) 野々村千里，福永守高，鈴木利武，石原英昭：成形加工, **7**(6), 397(1995)
 - 25) 野々村千里，山下勝久，丹下章男，上辻靖智，横山敦士，山田敏郎：成形加工, **13**(5), 323(2001)
 - 26) 山下勝久，丹下章男，野々村千里，仲井朝美，山田敏郎：成形加工, **16**(10), 666(2004)
 - 27) 山下勝久，野々村千里：成形加工, **12**(12), 760(2000)
 - 28) 鞠谷雄士，竹村憲二監修：図解プラスチック成形材料，工業調査会，186(2006)
 - 29) 野々村千里，鎌田賢，野島昭二：土木技術, **55**(3), 75(2000)
 - 30) 根岸聖司，野々村千里，山下勝久，鎌田賢，荒木良夫，松山雄二郎：成形加工, **12**(7), 451(2000)
 - 31) 野々村千里，根岸聖司，山下勝久，鎌田賢，荒木良夫，松山雄二郎：成形加工, **12**(8), 516(2000)
 - 32) 根岸聖司，山下勝久，野々村千里，鎌田賢，小林卓哉，三原康子：成形加工 '00, 335(2000)
 - 33) 三田重雄，庄司邦昭，野々村千里：日本航海学会論文集, **99**, 125(1998)
 - 34) 三田重雄，庄司邦昭，野々村千里，船城健一：日本航海学会論文集, **100**, 145(1999)
 - 35) 三田重雄，庄司邦昭，野々村千里，船城健一：日本航海学会論文集, **101**, 211(1999)
 - 36) 三田重雄，庄司邦昭，野々村千里，船城健一：日本航海学会論文集, **102**, 145(2000)
 - 37) 三田重雄，庄司邦昭，野々村千里，山下勝久：日本航海学会論文集, **104**, 179(2001)
 - 38) 三田重雄，庄司邦昭，野々村千里，山下勝久，山田敏郎：日本造船学会論文集, **189**, 201(2001)
 - 39) 三田重雄，庄司邦昭，山下勝久，野々村千里：日本造船学会論文集, **194**, 137(2003)
 - 40) 三田重雄，庄司邦昭，山下勝久，野々村千里：日本造船学会論文集, **194**, 145(2003)
 - 41) 三田重雄，山下勝久，野々村千里：日本機械学会論文集, **A-70**(1), 120(2004)
 - 42) 三田重雄，山下勝久，野々村千里：日本機械学会論文集, **A-70**(5), 703(2004)
-