ロール延伸高密度ポリエチレンフィルムの 延伸に伴う各結晶面法線の配向分布関数の 塑性滑りによるシミュレーション

第1報 多結晶集合体モデルを用いた塑性滑りによる 結晶各面法線の配向分布関数シミュレーション法

丹羽 貴裕^{*1}・波多野 靖^{*2}・茂岩 統之^{*3}
南条 誠^{*4}・日比 貞雄^{*4}

Simulation of Orientation Distribution Function in Rolling of High Density Polyethylene Film Calculated with the Plastic Slip Model

Part I Simulation Method of Orientation Distribution Function in Each Crystal Plane Normal Calculated with the Aggregation of Crystallites by Using the Plastic Slip Model

NIWA, Takahiro^{*1}/HATANO, Yasushi^{*2}/SHIGEIWA, Motoyuki^{*3}
NANJO, Makoto^{*4}/HIBI, Sadao^{*4}

We have introduced a simulation model for the orientation distribution of crystallites for rolling, by assuming suitable aggregations of polycrystallites in high density polyethylene films. These evaluations were performed by evaluating the plastic slip in each plane of the crystal unit that induced plastic deformation in rolling. In this report, we adopted five kinds of slip systems in the crystal unit of polyethylene crystallites. The azimuthal rotations of crystal units always selected individual slip systems for plastic deformation, applying the principle of maximum plastic work.

Key words : Crystallites/Aggregation/Polyethylene/Slip system/Plastic slip

^{*1} 大同メタル工業(株) 技術研究所
犬山市前原 (〒484)

Technical Center, Daido Metal Co.
Maehara, Inuyama, Aichi 484 Japan

^{*2} 東洋製罐グループ総合研究所
横浜市保土ヶ谷区岡沢町 22-4 (〒240)
Corporate Research and Development,
Toyo Seikan Group

22-4 Okazawa-cho, Hodogaya-ku, Yokohama 240
Japan

^{*3} 三菱化学(株) 横浜総合研究所
横浜市青葉区鴨志田町 1000 (〒227)
Research and Development Division,
Yokohama Research Center,
Mitsubishi Chemical Co.

1000 Kamoshida-cho, Aoba-ku, Yokohama 227 Japan

^{*4} 名古屋工業大学 材料工学科
名古屋市昭和区御器所町 (〒466)
Department of Materials Science and Engineering,
Nagoya Institute of Technology
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466 Japan
1996.9.19 受理

1. 緒 言

高分子フィルムは、T ダイ¹⁾やインフレーション²⁾により製膜されたのち、縦、横延伸を行って物性面の向上を図り、色々の分野で使用されている。

今回、著者らが使用したロール延伸も幅拘束型の延伸と位置付け³⁾られ、特に高密度ポリエチレン(HDPE)フィルムは、未延伸時、高次構造である球晶の集合体となっているので、透明度の悪い材料であるが、これにロールによる圧縮変形を行うと非常に透明度のよいフィルムに変化⁴⁾し、このロール延伸によって、結晶各回折面の法線は特定の方法へ選択配向^{5),6)}する。この結晶各回折面の法線を選択配向の生成原因を調査する一つの方法として、ロール延伸時の変形がロールによる圧縮、フィルムの長手方向への伸長、幅方向への拘束による純粋せん断変形⁷⁾に伴う塑性変形として取り扱う。

金属粒子の塑性滑りモデル^{8),9)}を応用した Miles ら¹⁰⁾によるポリオキシメチレン(POM)の延伸配向挙動の解析がある。この Miles らの方法をさらに一般化し、本研究では HDPE のロール延伸時の塑性変形の本質を追求するために、単純な多結晶集合体試料として HDPE フィルムのロール延伸時の微結晶の配向の様式を解析する。

本報では、ロール延伸時の結晶各回折面の配向挙動を評価する上で、ポリエチレン結晶で考えられる各滑り面、滑り方向を規定し¹¹⁾、各滑り系が単独で作用するときの巨視的ひずみの変化を見るとともに、最大塑性仕事の原理¹²⁾に伴う最適滑り系の選択法を記述する。

2. 塑性滑りモデルによるロール延伸時の結晶各回折面の配向分布関数の導出

2.1 試料の巨視的な応力、ひずみと結晶構造単位内の滑りとの対応

解析の方法は、試料が Table 1¹¹⁾に示す滑り系を有する結晶構造単位の集合体で、各单位は未延伸時、方位がランダム配向の分布関数であると仮定する。また、試料の変形に際し、弾性変形は塑性変形に比べて微小として省略し、塑性変形と微結晶の配向の関係を塑性ひずみ増分過程の応力とひずみの関係をもとにシミュレーションする方法を示す。

- a. ロール延伸時の巨視的な応力、ひずみ増分と、個々の結晶滑り系に作用するせん断応力、せん断ひずみ増分との関係

結晶滑り系に作用する巨視的応力テンソル $\dot{\sigma}$ はロール延伸時の延伸方向を x_3 、これに直交するフ

ィルムの厚さ方向(ロールの圧縮方向)を x_1 、フィルムの幅方向を x_2 にとった試料固定座標系 $O-x_1x_2x_3$ および斜方晶系結晶単位胞の a, b, c 軸に平行に u_1, u_2, u_3 をとった結晶粒子^{*5} 固定座標系 $O-u_1u_2u_3$ に関して次の関係が得られる。

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{ij} \dot{e}_i \dot{e}_j = \sigma_{ij}^c e_i e_j \quad (1)$$

ここで、 $\dot{e}_i$ は $O-x_i$ 座標の基本単位ベクトル、 e_i は $O-u_i$ 座標の基本単位ベクトル、 $\dot{\sigma}_{ij}$ は試料固定座標 $O-x_i$ 系の応力成分、 σ_{ij}^c は結晶単位に固定した $O-u_i$ 系の応力成分である。試料のロール延伸は、延伸方向の伸び、ロール軸方向の圧縮、幅一定の次に示す均一純粋せん断応力状態を仮定する。

$$[\dot{\sigma}] = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} & \dot{\sigma}_{12} & \dot{\sigma}_{13} \\ \dot{\sigma}_{12} & \dot{\sigma}_{22} & \dot{\sigma}_{23} \\ \dot{\sigma}_{13} & \dot{\sigma}_{23} & \dot{\sigma}_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \quad (2)$$

すなわち、 $\dot{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{23} = 0$ 、 $\dot{\sigma}_{11} = -\dot{\sigma}_{33} = -K$ の応力条件を考える。

(1) 式に示した $\dot{\sigma}_{ij}$ 各成分と σ_{ij}^c 各成分の間には、Euler 角の座標変換を用いて次の関係が与えられる。

$$[\sigma_{ij}^c] = R[\dot{\sigma}_{ij}]R^T \quad (3)$$

ここで、(2)式に示す応力の試料内均一分布を仮定すると、(3)式により、各結晶単位内の応力状態を求めることが可能となる。座標変換マトリックス R は次式で与えられ、 R^T はその配置行列である (Fig. 1 参照)。

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta \\ -\cos\phi\cos\theta\sin\eta - \sin\phi\cos\eta \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi\cos\theta\cos\eta + \cos\phi\sin\eta & -\sin\theta\cos\eta \\ -\sin\phi\cos\theta\sin\eta + \cos\phi\cos\eta & \sin\theta\sin\eta \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ロール延伸が進むに従って、 R の値はそれぞれの

*5 結晶粒子を以後、結晶単位あるいは単位と呼ぶ。

Table 1 Adopted slip system of polyethylene crystal in this report

Slip plane	Slip direction
(100)	$\langle 010 \rangle$
(100)	$\langle 001 \rangle$
(010)	$\langle 001 \rangle$
{110}	$\langle 001 \rangle$
{110}	Transverse to the c -axis in {110}

結晶単位で変化していく。

以下、試料は同一の結晶単位の集合体と考え、1個の単位には N 個の滑り系 (滑り面 i と滑り方向 j の組み合わせ) があると仮定する。応力 $\dot{\sigma}$ によって注目する結晶単位の k 番目の滑り系に作用するせん断応力 $\tau^{(k)}$ は Table 1 より、 k に対応する i, j を用いて、これを $(i), (j)$ で表すと、

$$\tau^{(k)} = n_s^{(j)} \cdot \dot{\sigma} \cdot n_p^{(i)} = T^{(k)} \cdot \dot{\sigma} \quad (5)$$

ここで、テンソル

$$T^{(k)} \equiv n_s^{(j)} n_p^{(i)}$$

で表され、これを2つの座標系成分で表せば、

① $O-u_i$ ($i=1,2,3$) 座標系の場合

$$\begin{aligned} \tau^{(k)} &= l_{is}^{(j)} e_i \cdot \dot{\sigma} \cdot e_j l_{jp}^{(i)} = l_{is}^{(j)} l_{jp}^{(i)} \sigma_{ij} \\ &= [l_{is}^{(j)} l_{1p}^{(i)}, l_{is}^{(j)} l_{2p}^{(i)}, l_{is}^{(j)} l_{3p}^{(i)}, l_{2s}^{(j)} l_{1p}^{(i)} + l_{3s}^{(j)} l_{2p}^{(i)}, l_{3s}^{(j)} l_{1p}^{(i)} \\ &\quad + l_{1s}^{(j)} l_{3p}^{(i)}, l_{1s}^{(j)} l_{2p}^{(i)} + l_{2s}^{(j)} l_{1p}^{(i)}] \\ &\quad \times [\sigma_{11}^c, \sigma_{22}^c, \sigma_{33}^c, \sigma_{23}^c, \sigma_{31}^c, \sigma_{12}^c]^T \\ &\equiv [T^{(k)}] \{\sigma_m^c\} \end{aligned} \quad (6)$$

② $O-x_i$ 座標系の場合

$$\dot{\tau}^{(k)} = l_{is}^{(j)} e_j \cdot \dot{\sigma} \cdot e_i l_{jp}^{(i)} = \dot{l}_{is}^{(j)} l_{jp}^{(i)} \dot{\sigma}_{ij} = [\dot{T}^{(k)}] \{\dot{\sigma}_m\} \quad (7)$$

でそれぞれ表される。

一般にベクトル $n^{(k)}$ の $O-x_i$ 成分と $O-u_i$ 成分の間には、

$$\dot{n}^{(k)} = R n^{(k)} \quad (8)$$

が成立するので、 $n_s^{(j)}$, $n_p^{(i)}$ それぞれに対して、

$$\dot{l}_{is}^{(j)} = a_{im} l_{ms}^{(j)}, \quad \dot{l}_{jp}^{(i)} = a_{jm} l_{mp}^{(i)} \quad (m=1,2,3) \quad (9)$$

の関係を得る。

k 番目の滑り系のせん断応力 $\tau^{(k)}$ の値が臨界せん断応力 $\tau^{CR(k)}$ に達して、せん断ひずみ増分 $d\gamma^{(k)}$ を生じたとき、これが試料のひずみ増分に与える寄与 $d\epsilon^{(k)}$ は、 $O-x_i$ 系への変換に相当するから、

$$d\epsilon^{(k)} = n_s^{(j)} \cdot d\gamma^{(k)} \cdot n_p^{(i)} \equiv \dot{T}^{(k)} d\gamma^{(k)} \quad (10)$$

で与えられる。テンソル $n_s^{(j)}$, $n_p^{(i)}$ を $O-x_i$ 座標系での成分で表すと、

$$\begin{aligned} [d\epsilon_m^{(k)}] &= [d\epsilon_1^{(k)}, d\epsilon_2^{(k)}, d\epsilon_3^{(k)}, d\epsilon_4^{(k)}, d\epsilon_5^{(k)}, d\epsilon_6^{(k)}] \\ &= [l_{1s}^{(j)} l_{1p}^{(i)}, l_{2s}^{(j)} l_{1p}^{(i)}, l_{3s}^{(j)} l_{1p}^{(i)}, l_{2s}^{(j)} l_{2p}^{(i)} + l_{3s}^{(j)} l_{1p}^{(i)}, \\ &\quad l_{3s}^{(j)} l_{2p}^{(i)} + l_{1s}^{(j)} l_{3p}^{(i)}, l_{1s}^{(j)} l_{2p}^{(i)} + l_{2s}^{(j)} l_{1p}^{(i)}] d\gamma^{(k)} \\ &= [\dot{T}^{(k)}] d\gamma^{(k)} \end{aligned} \quad (11-a)$$

となる。いっぽう、 $O-u_i$ 座標系についても同様に、

$$[d\epsilon_m^{c(k)}] = [T^{c(k)}] d\gamma^{(k)} \quad (11-b)$$

で表される。

今、任意の1個の結晶単位 (仮に r 番目とする) で生ずる各滑り系が活動する場合、試料のひずみ増分への寄与は、ひずみ増分の微少な場合を想定して線形加算性を仮定すると、

$$\begin{aligned} d\epsilon^r &= \sum_{k=1}^N d\epsilon^{(k)} \\ &= [\dot{T}^{(1)} \dots \dot{T}^{(k)} \dots \dot{T}^{(N)}] [d\gamma^{(1)} \dots d\gamma^{(k)} \dots d\gamma^{(N)}]^T \end{aligned}$$

Fig.1 Eulerian angles θ , ϕ and η specifying the relation between the principal axes $O-u_1, u_2, u_3$ of the crystal and the Cartesian coordinates $O-x_1, x_2, x_3$ ($e_1, e_2, e_3, \hat{e}_1, \hat{e}_2$, and $\hat{e}_3$ are the unit vectors)

と与えられる。各行列マトリックスをベクトルとして示すと、

$$\{d\epsilon_m^{(k)}\} = [\dot{T}] \begin{Bmatrix} d\gamma^{(1)} \\ \vdots \\ d\gamma^{(N)} \end{Bmatrix} = [\dot{T}] \{d\gamma^{(k)}\} \quad (12-a)$$

ここで、

$$[\dot{T}] = [\dot{T}^{(1)} \dots \dot{T}^{(k)} \dots \dot{T}^{(N)}] \quad (12-b)$$

で表される。ただし、混乱を生じない限り、上付指標 r は省略する。

いっぽう、(7)式を結晶単位内の各滑り系に適用すると、

$$\begin{Bmatrix} \dot{\tau}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{\tau}^{(k)} \\ \vdots \\ \dot{\tau}^{(N)} \end{Bmatrix} = \{\dot{\tau}^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} \dot{T}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{T}^{(k)} \\ \vdots \\ \dot{T}^{(N)} \end{Bmatrix} \cdot \dot{\sigma} = [\dot{T}] \dot{\sigma} \quad (13)$$

となる。ここで (13) 式中の任意の一項 $\dot{\tau}^{(k)}$ は、

$$\dot{\tau}^{(k)} = \dot{T}^{(k)} \cdot \dot{\sigma} = [\dot{T}^{(k)}]^T \{\dot{\sigma}_m\} = \dot{l}_{is}^{(j)} l_{jp}^{(i)} \dot{\sigma}_{ij} \quad (14)$$

である。

同様に、 $O-u_i$ 座標系 ($i=1,2,3$) に対して、(12), (13) 式を考えると、

$$\{d\epsilon_m^{c(k)}\} = [T^c] d\gamma^{(k)} \quad (15)$$

$$\{\tau^{c(k)}\} = [T^c]^T \cdot \sigma_m^c \quad (16)$$

となる。ただし $[T^c]$ は、 $O-u_i$ 座標系に関する (12-b) 式の関係を表す。

試料のロール延伸による塑性仕事増分は、(12), (13) 式から、

$$[\dot{\sigma}_m] \{d\epsilon_m\} = [\dot{\sigma}_m] [\dot{T}] \{d\gamma^{(k)}\} = [\dot{\tau}^{(k)}] \{d\gamma^{(k)}\} \quad (17-a)$$

$$[\sigma_m^c] \{d\epsilon_m^{c(k)}\} = [\sigma_m^c] [T^c] \{d\gamma^{(k)}\} = [\tau^{c(k)}] \{d\gamma^{(k)}\} \quad (17-b)$$

となるので、当然、仮想仕事の原理¹³⁾ が成立する。

Fig. 2 Presentation of unit cell in polyethylene crystallites and slip system ($k=1$, n_p ; (100), n_s ; <010>, and $k=2$, n_p ; (100), n_s ; <001>)

b. HDPE ロール延伸時の応力関係

ロール延伸の場合、各結晶単位に作用するせん断応力成分 $\tau^{c(k)}$ と (2) 式に示した試料に作用する応力との関係は、(16) 式に (8) 式を用いて、(2)、(3) 式に代入すると、

$$\{\tau^{c(k)}\} = [T^{c(k)}]AK \quad (18-a)$$

ここで、

$$A = (a_{i3}a_{j3} - a_{i1}a_{j1})e_i e_j \quad (18-b)$$

となり、以下、具体的に均一応力が (2) 式で与えられる場合の滑り系に適用する。

本研究では、Table 1 に示す各滑り系を考える。

① $k=1$, 滑り面法線 n_p ; (100) 面法線 (以後これを滑り面 n_p ; (100) と略記する), 滑り方向 n_s ; <010> (Fig. 2 参照)

$$\tau^{c(1)} = [l_{1s}^{(1)} l_{1p}^{(1)}, l_{2s}^{(1)} l_{2p}^{(1)}, l_{3s}^{(1)} l_{3p}^{(1)}, l_{2s}^{(1)} l_{3p}^{(1)} + l_{3s}^{(1)} l_{2p}^{(1)}, l_{3s}^{(1)} l_{1p}^{(1)}$$

$$+ l_{1s}^{(1)} l_{3p}^{(1)}, l_{1s}^{(1)} l_{2p}^{(1)} + l_{2s}^{(1)} l_{1p}^{(1)}] \left\{ \begin{array}{c} a_{13}^2 - a_{11}^2 \\ a_{23}^2 - a_{21}^2 \\ a_{33}^2 - a_{31}^2 \\ a_{23}a_{33} - a_{21}a_{31} \\ a_{33}a_{13} - a_{31}a_{11} \\ a_{23}a_{13} - a_{21}a_{11} \end{array} \right\} K \quad (19)$$

より、 $n_p^{(1)} = [l_{1p}^{(1)}, l_{2p}^{(1)}, l_{3p}^{(1)}] = [1, 0, 0]$, $n_s^{(1)} = [l_{1s}^{(1)}, l_{2s}^{(1)}, l_{3s}^{(1)}] = [0, 1, 0]$ を得るので、(19) 式中の $[T^{c(1)}]$ は、

$$[T^{c(1)}] = [0, 0, 0, 0, 0, 1] \quad (20)$$

より、

Fig. 3 Slip system ($k=3$, n_p ; (010), n_s ; <001>)

Fig. 4 Slip system ($k=4$, n_p ; {110}, n_s ; <001> and $k=5$, n_p ; {110}, n_s ; orthogonal direction to {110} and <001>)

$$\tau^{c(1)} = (a_{23}a_{13} - a_{21}a_{11})K \quad (21)$$

となり、これに (4) 式の各方向余弦成分を代入すると、

$$\tau^{c(1)} = [(-\sin^2 \theta \cos \eta \sin \eta) + (\cos \phi \cos \theta \sin \eta + \sin \phi \cos \eta) (\cos \phi \cos \theta \cos \eta - \sin \phi \sin \eta)]K \quad (22)$$

を得る。

② $k=2$, 滑り面 n_p ; (100), 滑り方向 n_s ; <001> (Fig. 2 参照)

$$n_p^{(1)} = [1, 0, 0], n_s^{(2)} = [0, 0, 1]$$

より,

$$[T^{c(2)}] = [0, 0, 0, 0, 1, 0] \quad (23)$$

となり, したがって,

$$\begin{aligned} \tau^{c(2)} &= (a_{33}a_{13} - a_{31}a_{11})K \\ &= [(-\sin\theta\cos\theta\cos\eta) \\ &\quad - (\sin\theta\cos\phi)(\cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta)]K \end{aligned} \quad (24)$$

を得る.

③ $k=3$, 滑り面 $n_p; (010)$, 滑り方向 $n_s; \langle 001 \rangle$ (Fig. 3 参照)

$$\begin{aligned} n_p^{(2)} &= [0, 1, 0], n_s^{(2)} = [0, 0, 1] \\ [T^{c(3)}] &= [0, 0, 0, 1, 0, 0] \end{aligned} \quad (25)$$

より,

$$\begin{aligned} \tau^{c(3)} &= (a_{23}a_{33} - a_{21}a_{31})K \\ &= [(\cos\theta\sin\theta\sin\eta) \\ &\quad + (\cos\phi\cos\theta\sin\eta + \sin\phi\cos\theta)(\sin\theta\cos\phi)]K \end{aligned} \quad (26)$$

となる.

④ $k=4$, 滑り面 $n_p; \{110\}$, 滑り方向 $n_s; \langle 001 \rangle$ (Fig. 4 参照)

$$\begin{aligned} n_p^{(4)} &= [\cos\Phi_p^{(4)}, \sin\Phi_p^{(4)}, 0], n_s^{(2)} = [0, 0, 1] \\ [T^{c(4)}] &= [0, 0, 0, \sin\Phi_p^{(4)}, \cos\Phi_p^{(4)}, 0] \end{aligned} \quad (27)$$

より,

$$\begin{aligned} \tau^{c(4)} &= [(a_{23}a_{33}\sin\Phi_p^{(4)} + a_{33}a_{13}\cos\Phi_p^{(4)}) \\ &\quad - (a_{21}a_{31}\sin\Phi_p^{(4)} + a_{31}a_{11}\cos\Phi_p^{(4)})]K \\ &= [(\sin\theta\cos\theta\sin\eta\sin\Phi_p^{(4)} - \sin\theta\cos\theta\cos\eta\cos\Phi_p^{(4)}) \\ &\quad + (\cos\phi\cos\theta\sin\eta + \sin\phi\cos\eta) \\ &\quad \times (\sin\theta\cos\phi\sin\Phi_p^{(4)} - (\sin\theta\cos\phi) \\ &\quad \times (\cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta)\cos\Phi_p^{(4)})]K \end{aligned} \quad (28)$$

を得る.

⑤ $k=5$, 滑り面 $n_p; \{110\}$, 滑り方向 $n_s; \{110\}$ 面に平行で, $\langle 001 \rangle$ に垂直な横滑り (Fig. 4 参照)

$$\begin{aligned} n_p^{(4)} &= [\cos\Phi_p^{(4)}, \sin\Phi_p^{(4)}, 0], n_s^{(4)} = [\cos\Phi_s^{(4)}, \sin\Phi_s^{(4)}, 0] \\ [T^{c(5)}] &= [\cos\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)}, \sin\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)}, 0, 0, 0, \\ &\quad \cos\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)} + \sin\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)}] \end{aligned} \quad (29)$$

より,

$$\begin{aligned} \tau^{c(5)} &= \{[a_{13}^2\cos\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{23}^2\sin\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)} + \\ &\quad + a_{23}a_{13}(\cos\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)} + \sin\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)})] \\ &\quad - [a_{11}^2\cos\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{21}^2\sin\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)} \\ &\quad + a_{21}a_{11}(\cos\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)} + \sin\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)})]K \\ &= \{[(\sin^2\theta\cos^2\eta)\cos\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)} \\ &\quad + (\sin^2\theta\sin^2\eta)\sin\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)} \\ &\quad - (\sin^2\theta\cos\eta\sin\eta)(\cos\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)} \\ &\quad + \sin\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)})] - [(\cos\phi\cos\theta\cos\eta \\ &\quad - \sin\phi\sin\eta)^2\cos\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)}] \\ &\quad + (-\cos\phi\cos\theta\sin\eta - \sin\phi\cos\eta)^2\sin\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- (\cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta)(\cos\phi\cos\theta\sin\eta \\ &\quad + \sin\phi\cos\eta)(\cos\Phi_p^{(4)}\sin\Phi_s^{(4)} + \sin\Phi_p^{(4)}\cos\Phi_s^{(4)})]K \end{aligned} \quad (30)$$

と与えられ, Table 1 に示した 5 種類の滑り系による結晶単位に生ずるせん断応力 $\tau^{c(k)}$ と巨視的な応力 K との関係を示した. これら 5 種類の滑り系のほか, $(010)\langle 100 \rangle$ は①の滑り系と, $(001)\langle 100 \rangle$ は②の滑り系と, $(001)\langle 010 \rangle$ は③の滑り系と, 本質的に同じ応力を生ずるので省略した. いっぽう, 各滑り系で生ずるせん断ひずみ増分 $d\gamma^{(k)}$ と巨視的なひずみ増分の各成分 $d\epsilon_m^{(k)}$ との関係を次に述べる.

2.2 各滑り系によるせん断ひずみ増分 $d\gamma^{(k)}$ とひずみ増分との関係

(11-a), (12-a) 式で結晶単位内の各滑り系で表されるせん断ひずみ増分 $d\gamma^{(k)}$ と巨視的なひずみ増分 $d\epsilon_m^{(k)}$ との関係は, (11-a) 式より,

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1^{(k)} \\ d\epsilon_2^{(k)} \\ d\epsilon_3^{(k)} \\ d\epsilon_4^{(k)} \\ d\epsilon_5^{(k)} \\ d\epsilon_6^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_{1s}^{(j)}l_{1p}^{(i)} \\ l_{2s}^{(j)}l_{2p}^{(i)} \\ l_{3s}^{(j)}l_{3p}^{(i)} \\ l_{2s}^{(j)}l_{3p}^{(i)} + l_{3s}^{(j)}l_{2p}^{(i)} \\ l_{3s}^{(j)}l_{1p}^{(i)} + l_{1s}^{(j)}l_{3p}^{(i)} \\ l_{1s}^{(j)}l_{2p}^{(i)} + l_{2s}^{(j)}l_{1p}^{(i)} \end{Bmatrix} d\gamma^{(k)} \quad (31)$$

を得るので, この関係に (9) 式を代入すると,

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1^{(k)} \\ d\epsilon_2^{(k)} \\ d\epsilon_3^{(k)} \\ d\epsilon_4^{(k)} \\ d\epsilon_5^{(k)} \\ d\epsilon_6^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (a_{11}l_{1s}^{(j)})(a_{1m}l_{mp}^{(i)}) \\ (a_{21}l_{2s}^{(j)})(a_{2m}l_{mp}^{(i)}) \\ (a_{31}l_{3s}^{(j)})(a_{3m}l_{mp}^{(i)}) \\ [(a_{21}l_{1s}^{(j)})(a_{3m}l_{mp}^{(i)}) + (a_{31}l_{2s}^{(j)})(a_{2m}l_{mp}^{(i)})] \\ [(a_{11}l_{1s}^{(j)})(a_{3m}l_{mp}^{(i)}) + (a_{31}l_{1s}^{(j)})(a_{1m}l_{mp}^{(i)})] \\ [(a_{11}l_{1s}^{(j)})(a_{2m}l_{mp}^{(i)}) + (a_{21}l_{1s}^{(j)})(a_{1m}l_{mp}^{(i)})] \end{Bmatrix} d\gamma^{(k)} \quad (32)$$

となる.

では, 具体的に Table 1 に示した各滑り系に対し, (32) 式の関係を示す.

① $k=1$, (100) 面の $\langle 010 \rangle$ 滑り

$$\begin{aligned} n_p^{(1)} &= [l_{1p}^{(i)}, l_{2p}^{(i)}, l_{3p}^{(i)}] = [1, 0, 0], \\ n_s^{(1)} &= [l_{1s}^{(j)}, l_{2s}^{(j)}, l_{3s}^{(j)}] = [0, 1, 0] \end{aligned}$$

から,

$$\{d\epsilon_m^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} a_{12}a_{11} \\ a_{22}a_{21} \\ a_{32}a_{31} \\ (a_{22}a_{31} + a_{32}a_{21}) \\ (a_{12}a_{31} + a_{32}a_{11}) \\ (a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}) \end{Bmatrix} d\gamma^{(1)} \quad (33)^{*6}$$

を得るので, これに a_{ij} の各成分を代入し, $O-x_i$ 座標系に関するひずみ増分成分への寄与を求め, 垂直ひずみについて以下を得る.

*6 ここでの方向余弦成分 a_{ij} は (4) 式の転置行列成分を用いている.

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_1^{(1)} &= a_{12}a_{11}d\gamma^{(1)} \\ &= (\cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta)(-\cos\phi\cos\theta\sin\eta \\ &\quad - \sin\phi\cos\eta)d\gamma^{(1)} \quad (34-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_2^{(1)} &= a_{22}a_{21}d\gamma^{(1)} \\ &= (-\sin\phi\cos\theta\sin\eta + \cos\phi\cos\eta) \\ &\quad \times (\sin\phi\cos\theta\cos\eta + \cos\phi\sin\eta)d\gamma^{(1)} \quad (34-b) \end{aligned}$$

$$d\dot{\epsilon}_3^{(1)} = a_{32}a_{31}d\gamma^{(1)} = -\sin^2\theta\cos\eta\sin\eta d\gamma^{(1)} \quad (34-c)$$

② $k=2$, (100) 面の $\langle 001 \rangle$ 滑り

$$n_p^{(1)} = [1, 0, 0], \quad n_s^{(2)} = [0, 0, 1]$$

$$\{d\dot{\epsilon}_m^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} a_{13}a_{11} \\ a_{23}a_{21} \\ a_{33}a_{31} \\ (a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21}) \\ (a_{13}a_{31} + a_{33}a_{11}) \\ (a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11}) \end{Bmatrix} d\gamma^{(2)} \quad (35)$$

より, 各線ひずみ増分への寄与は,

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_1^{(2)} &= a_{13}a_{11}d\gamma^{(2)} \\ &= (\sin\theta\cos\phi)(\cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta)d\gamma^{(2)} \quad (36-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_2^{(2)} &= a_{23}a_{21}d\gamma^{(2)} \\ &= (\sin\theta\sin\phi)(\sin\phi\cos\theta\cos\eta + \cos\phi\sin\eta)d\gamma^{(2)} \quad (36-b) \end{aligned}$$

$$d\dot{\epsilon}_3^{(2)} = a_{33}a_{31}d\gamma^{(2)} = -\cos\theta\sin\theta\cos\eta d\gamma^{(2)} \quad (36-c)$$

となる。

③ $k=3$, (010) 面の $\langle 001 \rangle$ 滑り

$$n_p^{(2)} = [0, 1, 0], \quad n_s^{(2)} = [0, 0, 1]$$

$$\{d\dot{\epsilon}_m^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} a_{13}a_{12} \\ a_{23}a_{22} \\ a_{33}a_{32} \\ (a_{23}a_{32} + a_{33}a_{22}) \\ (a_{13}a_{32} + a_{33}a_{12}) \\ (a_{13}a_{22} + a_{23}a_{12}) \end{Bmatrix} d\gamma^{(3)} \quad (37)$$

より,

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_1^{(3)} &= a_{13}a_{12}d\gamma^{(3)} \\ &= (-\cos\phi\cos\theta\sin\eta - \sin\phi\cos\eta)(\sin\theta\cos\phi)d\gamma^{(3)} \quad (38-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_2^{(3)} &= a_{23}a_{22}d\gamma^{(3)} \\ &= (-\sin\phi\cos\theta\sin\eta + \cos\phi\cos\eta)(\sin\theta\sin\phi)d\gamma^{(3)} \quad (38-b) \end{aligned}$$

$$d\dot{\epsilon}_3^{(3)} = a_{33}a_{32}d\gamma^{(3)} = \cos\theta\sin\theta\sin\eta d\gamma^{(3)} \quad (38-c)$$

を得る。

④ $k=4$, $\{110\}$ 面の $\langle 001 \rangle$ 滑り

$$n_p^{(4)} = [\cos\Phi_p^{(4)}, \sin\Phi_p^{(4)}, 0], \quad n_s^{(2)} = [0, 0, 1]$$

$$\{d\dot{\epsilon}_m^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)})a_{13} \\ (a_{21}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_p^{(4)})a_{23} \\ (a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)})a_{33} \\ (a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)})a_{23} \\ + (a_{21}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_p^{(4)})a_{33} \\ (a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)})a_{13} \\ + (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)})a_{33} \\ (a_{21}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_p^{(4)})a_{13} \\ + (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)})a_{23} \end{Bmatrix} d\gamma^{(4)} \quad (39)$$

より,

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_1^{(4)} &= (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)})a_{13}d\gamma^{(4)} \\ &= [(\cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta)\cos\Phi_p^{(4)} \\ &\quad + (-\cos\phi\cos\theta\sin\eta - \sin\phi\cos\eta)\sin\Phi_p^{(4)}] \\ &\quad \times (\sin\theta\cos\phi)d\gamma^{(4)} \quad (40-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_2^{(4)} &= (a_{21}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_p^{(4)})a_{23}d\gamma^{(4)} \\ &= [(\sin\phi\cos\theta\cos\eta + \cos\phi\sin\eta)\cos\Phi_p^{(4)} \\ &\quad + (-\sin\phi\cos\theta\sin\eta + \cos\phi\cos\eta)\sin\Phi_p^{(4)}] \\ &\quad \times (\sin\theta\sin\phi)d\gamma^{(4)} \quad (40-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_3^{(4)} &= (a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)})a_{33}d\gamma^{(4)} \\ &= (-\sin\theta\cos\eta\cos\Phi_p^{(4)} + \sin\theta\sin\eta\sin\Phi_p^{(4)}) \\ &\quad \times \cos\theta d\gamma^{(4)} \quad (40-c) \end{aligned}$$

を得る。

⑤ $k=5$, $\{110\}$ 面の $\{110\}$ 面に平行な横方向滑り

$$n_p^{(4)} = [\cos\Phi_p^{(4)}, \sin\Phi_p^{(4)}, 0], \quad n_s^{(4)} = [\cos\Phi_s^{(4)}, \sin\Phi_s^{(4)}, 0]$$

$$\{d\dot{\epsilon}_m^{(5)}\} = \begin{Bmatrix} (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)})(a_{11}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_s^{(4)}) \\ (a_{21}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_p^{(4)})(a_{21}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_s^{(4)}) \\ (a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)})(a_{31}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_s^{(4)}) \\ [(a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)})(a_{21}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_s^{(4)}) \\ + (a_{21}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_p^{(4)})(a_{31}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_s^{(4)})] \\ [(a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)})(a_{11}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_s^{(4)}) \\ + (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)})(a_{31}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_s^{(4)})] \\ [(a_{21}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_p^{(4)})(a_{11}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_s^{(4)}) \\ + (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)})(a_{21}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_s^{(4)})] \end{Bmatrix} \times d\gamma^{(5)} \quad (41)$$

より,

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_1^{(5)} &= (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)}) \\ &\quad \times (a_{11}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_s^{(4)})d\gamma^{(5)} \\ &= [(\cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta)\cos\Phi_p^{(4)} \\ &\quad + (-\cos\phi\cos\theta\sin\eta - \sin\phi\cos\eta)\sin\Phi_p^{(4)}] \\ &\quad \times [(\cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta)\cos\Phi_s^{(4)} \\ &\quad + (-\cos\phi\cos\theta\sin\eta - \sin\phi\cos\eta)\sin\Phi_s^{(4)}]d\gamma^{(5)} \quad (42-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\dot{\epsilon}_2^{(5)} &= (a_{21}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_p^{(4)}) \\ &\quad \times (a_{21}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{22}\sin\Phi_s^{(4)})d\gamma^{(5)} \\ &= [(\sin\phi\cos\theta\cos\eta + \cos\phi\sin\eta)\cos\Phi_p^{(4)} \\ &\quad + (-\sin\phi\cos\theta\sin\eta + \cos\phi\cos\eta)\sin\Phi_p^{(4)}] \\ &\quad \times [(\sin\phi\cos\theta\cos\eta + \cos\phi\sin\eta)\cos\Phi_s^{(4)} \end{aligned}$$

$$+ (-\sin\phi\cos\theta\sin\eta + \cos\phi\cos\eta)\sin\Phi_s^{(4)}]d\gamma^{(5)} \quad (42-b)$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_s^{(5)} &= (a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)}) \\ &\times (a_{31}\cos\Phi_s^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_s^{(4)})d\gamma^{(5)} \\ &= (-\sin\theta\cos\eta\cos\Phi_p^{(4)} + \sin\theta\sin\eta\sin\Phi_p^{(4)}) \\ &\times (-\sin\theta\cos\eta\cos\Phi_s^{(4)} + \sin\theta\sin\eta\sin\Phi_s^{(4)})d\gamma^{(5)} \end{aligned} \quad (42-c)$$

と①～⑤の計5種類の組の滑り系による巨視的なひずみ増分 $d\epsilon_m^{(k)}$ が、各結晶単位の小滑り系のせん断ひずみ増分 $d\gamma^{(k)}$ によって与えられた。実際の計算は変形による単位の方位変化を解析し、配向分布関数の評価を試みるので、次に変形前後の単位の方位の変化の評価法を示す。

2.3 ロール延伸時の変形に伴う結晶単位の方位の変化

結晶単位系に対して滑り機構（滑り面、滑り方向）は、変形に伴って変化しないものと仮定し、これら滑り面、滑り方向の試料固定座標系 $O-x_1x_2x_3$ に対する方向余弦は変形に伴って変化するものとする。したがって、変形によって $[R]$ マトリックスの角 θ, ϕ, η は変化すると考える。 r 番目の要素の変形率 λ_i^r は垂直ひずみ増分 $d\epsilon_m^{(k)}$ と、

$$\lambda_i^r = 1 + d\epsilon_m^{(k)} \quad (i=1,2,3)$$

の関係があるので、これを用いて単位全体の x_i 方向の変形率は、それらの平均値として、

$$\lambda_i = \frac{N}{n} \sum_{r=1}^N \lambda_i^r / n = 1 + \frac{N}{n} d\epsilon_m^{(k)} / n \quad (43)$$

で与えられる。ここで、 n は試料中の全要素数である。

滑り機構保持の仮定より、変形に伴って滑り面の方位と滑り方向の方位が変化するが、両者の直交性は変形によっても代わらないものとする、変形前と後において、試料固定座標系 $O-x_1x_2x_3$ に対する滑り面 n_p および滑り方向 n_s の方位の関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} l_{1p}^{(i)r} \\ l_{2p}^{(i)r} \\ l_{3p}^{(i)r} \end{Bmatrix} = (1/r_p^r) \begin{Bmatrix} \lambda_{1p}^r l_{1p}^{(i)r} \\ \lambda_{2p}^r l_{2p}^{(i)r} \\ \lambda_{3p}^r l_{3p}^{(i)r} \end{Bmatrix} \quad (44-a)^*$$

$$\begin{Bmatrix} l_{1s}^{(j)r} \\ l_{2s}^{(j)r} \\ l_{3s}^{(j)r} \end{Bmatrix} = (1/r_s^r) \begin{Bmatrix} \lambda_{1s}^r l_{1s}^{(j)r} \\ \lambda_{2s}^r l_{2s}^{(j)r} \\ \lambda_{3s}^r l_{3s}^{(j)r} \end{Bmatrix} \quad (44-b)$$

ここで r_p^r および r_s^r は変形後の滑り面および滑り方向ベクトル $n_p^{(i)r}, n_s^{(j)r}$ 、すなわち、 $n_p^{(i)r}, n_s^{(j)r}$ の大きさを表し、次式で与えられる。

$$r_p^r = \{\lambda_{1p}^r{}^2 (\dot{l}_{1p}^{(i)r})^2 + \lambda_{2p}^r{}^2 (\dot{l}_{2p}^{(i)r})^2 + \lambda_{3p}^r{}^2 (\dot{l}_{3p}^{(i)r})^2\}^{1/2}$$

$$r_s^r = \{\lambda_{1s}^r{}^2 (\dot{l}_{1s}^{(j)r})^2 + \lambda_{2s}^r{}^2 (\dot{l}_{2s}^{(j)r})^2 + \lambda_{3s}^r{}^2 (\dot{l}_{3s}^{(j)r})^2\}^{1/2} \quad (45-a)$$

$$n_p^{(i)r}, n_s^{(j)r} \text{ は変形後も直交性を維持するために、次の条件が成立しなければならない。} \quad (45-b)$$

$$n_p^{(i)r} \cdot n_s^{(j)r} = 0$$

より、各方向余弦成分で表すと、

$$\dot{l}_{1p}^{(i)r} \dot{l}_{1s}^{(j)r} + \dot{l}_{2p}^{(i)r} \dot{l}_{2s}^{(j)r} + \dot{l}_{3p}^{(i)r} \dot{l}_{3s}^{(j)r} = 0 \quad (46)$$

であり、これに (44-a), (44-b) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} &[(\lambda_{1p}^r \lambda_{1s}^r) \dot{l}_{1p}^{(i)r} \dot{l}_{1s}^{(j)r} + (\lambda_{2p}^r \lambda_{2s}^r) \dot{l}_{2p}^{(i)r} \dot{l}_{2s}^{(j)r} \\ &+ (\lambda_{3p}^r \lambda_{3s}^r) \dot{l}_{3p}^{(i)r} \dot{l}_{3s}^{(j)r}] / (r_p^r \cdot r_s^r) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

この (47) 式が常に成立するためには、 $\sum_m \dot{l}_{mp}^{(i)r} \dot{l}_{ms}^{(j)r} = 0$ であるから、次の関係が必要条件となる。

$$\lambda_{1p}^r \cdot \lambda_{1s}^r = 1, \lambda_{2p}^r \cdot \lambda_{2s}^r = 1, \lambda_{3p}^r \cdot \lambda_{3s}^r = 1 \quad (48)$$

また、(43) 式に示した各垂直ひずみ増分 $d\epsilon_m^{(k)}$ より求められた変形率 λ_i^r と λ_{is}^r には $\lambda_{is}^r = \lambda_i^r$ と考えられる。この条件を (45-a) 式に代入すると、ベクトル $n_p^{(i)r}$ の大きさ r_p^r は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} r_p^r &= \{(1/\lambda_1^r)^2 (\dot{l}_{1p}^{(i)r})^2 + (1/\lambda_2^r)^2 (\dot{l}_{2p}^{(i)r})^2 \\ &+ (1/\lambda_3^r)^2 (\dot{l}_{3p}^{(i)r})^2\}^{1/2} \end{aligned} \quad (45-a')$$

さらに、(44-a), (44-b) 式に (9) 式を代入すれば、変形後の滑り面、滑り方向の方位は、 $O-x_i$ 座標系に関して、それぞれ、

$$\begin{Bmatrix} a_{1i}' l_{1p}^{(k)r} \\ a_{2i}' l_{2p}^{(k)r} \\ a_{3i}' l_{3p}^{(k)r} \end{Bmatrix} = (1/r_p^r) \begin{Bmatrix} (1/\lambda_1^r) a_{1i} l_{1p}^{(k)r} \\ (1/\lambda_2^r) a_{2i} l_{2p}^{(k)r} \\ (1/\lambda_3^r) a_{3i} l_{3p}^{(k)r} \end{Bmatrix} \quad (49-a)$$

$$\begin{Bmatrix} a_{1j}' l_{1s}^{(k)r} \\ a_{2j}' l_{2s}^{(k)r} \\ a_{3j}' l_{3s}^{(k)r} \end{Bmatrix} = (1/r_s^r) \begin{Bmatrix} \lambda_{1s}^r a_{1j} l_{1s}^{(k)r} \\ \lambda_{2s}^r a_{2j} l_{2s}^{(k)r} \\ \lambda_{3s}^r a_{3j} l_{3s}^{(k)r} \end{Bmatrix} \quad (49-b)$$

で与えられる。ここで、 a_{ij}' は (4) 式に対応する変形後の方向余弦成分である。

次に、前述の①～⑤の滑り系について、変形後の方位 θ', ϕ' および η' を変形前の各角度 θ, ϕ, η を用いて表す。

① $k=1$, (100) 面の $\langle 010 \rangle$ 滑り

$$n_p^{(1)} = [1, 0, 0], n_s^{(1)} = [0, 1, 0]$$

を (49-a), (49-b) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} \cos\phi'\cos\theta'\cos\eta' - \sin\phi'\sin\eta' \\ \sin\phi'\cos\theta'\cos\eta' + \cos\phi'\sin\eta' \\ -\sin\theta'\cos\eta' \end{Bmatrix} = (1/r_p^r) \\ &\times \begin{Bmatrix} (1/\lambda_1^r) (\cos\phi\cos\theta\cos\eta - \sin\phi\sin\eta) \\ (1/\lambda_2^r) (\sin\phi\cos\theta\cos\eta + \cos\phi\sin\eta) \\ (1/\lambda_3^r) (-\sin\theta\cos\eta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (50-a)$$

および

* $\dot{l}_{ip}^{(i)}$, $\dot{l}_{js}^{(j)}$ ($i, j=1, 2, 3$) はベクトル n_p および n_s の座標系 $O-x_i$ 系に関する方向余弦である。

$$\left\{ \begin{array}{l} -\cos\phi'\cos\theta'\sin\eta'-\sin\phi'\cos\eta' \\ -\sin\phi'\cos\theta'\sin\eta'+\cos\phi'\cos\eta' \end{array} \right\} = (1/r_s^r) \frac{\sin\theta'\sin\eta'}{\sin\theta'\sin\eta'}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^r(-\cos\phi\cos\theta\sin\eta-\sin\phi\cos\eta) \\ \lambda_2^r(-\sin\phi\cos\theta\sin\eta+\cos\phi\cos\eta) \end{array} \right\} \frac{\lambda_3^r(\sin\theta\sin\eta)}{\lambda_3^r(\sin\theta\sin\eta)} \quad (50-b)$$

となり、この両式から、次の順に変形後の方位が決定される。

$$\theta' = \sin^{-1} \left\{ \pm \sin\theta \left[\frac{r_s^{r^2}\cos^2\eta + r_p^{r^2}(\lambda_3^r)^4\sin^2\eta}{(r_p^r\lambda_3^r r_s^r)^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (51-a)$$

$$\eta' = \cos^{-1} \left[\frac{\sin\theta\cos\eta}{r_p^r\lambda_3^r\sin\theta'} \right] \quad (51-b)$$

$$\phi' = \cos^{-1} \left[\frac{r_s^r a_{11}\cos\eta' - r_p^r(\lambda_1^r)^2 a_{21}\sin\eta'}{r_p^r r_s^r \lambda_1^r \cos\theta'} \right] \quad (51-c)$$

$$\textcircled{2} \quad k=2, \quad n_p^{(1)} = [1, 0, 0], \quad n_s^{(2)} = [0, 0, 1]$$

から、

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\phi'\cos\theta'\cos\eta'-\sin\phi'\sin\eta' \\ \sin\phi'\cos\theta'\cos\eta'+\cos\phi'\sin\eta' \\ -\sin\theta'\cos\eta' \end{array} \right\} = (1/r_p^r)$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} (1/\lambda_1^r)(\cos\phi\cos\theta\cos\eta-\sin\phi\sin\eta) \\ (1/\lambda_2^r)(\sin\phi\cos\theta\cos\eta+\cos\phi\sin\eta) \\ (1/\lambda_3^r)(-\sin\theta\cos\eta) \end{array} \right\} \quad (52-a)$$

および

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\theta'\cos\phi' \\ \sin\theta'\sin\phi' \\ \cos\theta' \end{array} \right\} = (1/r_s^r) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^r(\sin\theta\cos\phi) \\ \lambda_2^r(\sin\theta\sin\phi) \\ \lambda_3^r(\cos\theta) \end{array} \right\} \quad (52-b)$$

を得るので、両式より、

$$\theta' = \pm \sin^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_3^r} \right) \sin\theta [\cos^2\phi + (\lambda_3^r)^2 \sin^2\phi]^{1/2} \right\} \quad (53-a)$$

また、(52-b)式の第一式より、

$$\sin\theta'\cos\phi' = \left(\frac{\lambda_1^r}{r_s^r} \right) \sin\theta\cos\phi$$

より、

$$\phi' = \cos^{-1} \left[\frac{\lambda_1^r \sin\theta\cos\phi}{r_s^r \sin\theta'} \right] \quad (53-b)$$

および、(52-b)式の第三式より、

$$\eta' = \cos^{-1} \left[\frac{\sin\theta\cos\eta}{r_p^r\lambda_3^r\sin\theta'} \right] \quad (53-c)$$

を得る。

$$\textcircled{3} \quad k=3, \quad n_p^{(2)} = [0, 1, 0], \quad n_s^{(2)} = [0, 0, 1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\cos\phi'\cos\theta'\sin\eta'-\sin\phi'\cos\eta' \\ -\sin\phi'\cos\theta'\sin\eta'+\cos\phi'\cos\eta' \end{array} \right\} = (1/r_p^r) \frac{\sin\theta'\sin\eta'}{\sin\theta'\sin\eta'}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} (1/\lambda_1^r)(-\cos\phi\cos\theta\sin\eta-\sin\phi\cos\eta) \\ (1/\lambda_2^r)(-\sin\phi\cos\theta\sin\eta+\cos\phi\cos\eta) \\ (1/\lambda_3^r)(\sin\theta\sin\eta) \end{array} \right\} \quad (54-a)$$

および

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\theta'\cos\phi' \\ \sin\theta'\sin\phi' \\ \cos\theta' \end{array} \right\} = (1/r_s^r) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^r(\sin\theta\cos\phi) \\ \lambda_2^r(\sin\theta\sin\phi) \\ \lambda_3^r(\cos\theta) \end{array} \right\} \quad (54-b)$$

より、 θ' は (53-a) 式の関係で与えられる。また ϕ' は (53-b) 式により求められる。いっぽう、 η' は次の関係となる。

$$\eta' = \cos^{-1} \left[\frac{\sin\theta\sin\eta}{r_p^r\lambda_3^r\sin\theta'} \right] \quad (55)$$

$$\textcircled{4} \quad k=4, \quad n_p^{(4)} = [\cos\Phi_p^{(4)}, \sin\Phi_p^{(4)}, 0], \quad n_s^{(2)} = [0, 0, 1]$$

より、

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}'l_p^{(4)r} + a_{12}'l_p^{(4)r} \\ a_{21}'l_p^{(4)r} + a_{22}'l_p^{(4)r} \\ a_{31}'l_p^{(4)r} + a_{32}'l_p^{(4)r} \end{array} \right\} = (1/r_p^r)$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} (1/\lambda_1^r)[a_{11}l_p^{(4)r} + a_{12}l_p^{(4)r}] \\ (1/\lambda_2^r)[a_{21}l_p^{(4)r} + a_{22}l_p^{(4)r}] \\ (1/\lambda_3^r)[a_{31}l_p^{(4)r} + a_{32}l_p^{(4)r}] \end{array} \right\}$$

この式に、(4)式および変形後の各方向余弦成分を代入すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\phi'\cos\theta'\cos(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ -\sin\phi'\sin(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ \sin\phi'\cos\theta'\cos(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ +\cos\phi'\sin(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ -\sin\theta'\cos(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \end{array} \right\} = (1/r_p^r)$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} (1/\lambda_1^r)[\cos\phi\cos\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) \\ -\sin\phi\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})] \\ (1/\lambda_2^r)[\sin\phi\cos\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) \\ +\cos\phi\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})] \\ (1/\lambda_3^r)[- \sin\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)})] \end{array} \right\} \quad (56-a)$$

および、

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\theta'\cos\phi' \\ \sin\theta'\sin\phi' \\ \cos\theta' \end{array} \right\} = (1/r_s^r) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^r(\sin\theta\cos\phi) \\ \lambda_2^r(\sin\theta\sin\phi) \\ \lambda_3^r(\cos\theta) \end{array} \right\} \quad (56-b)$$

より、 θ' および ϕ' は③の滑り系と同じく、(53-a)、(53-b) 式で与えられる。 η' は次式から求められる。

$$\eta' = \sin^{-1} \left[\frac{-\cos\theta'\sin\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) + (A+B)r_p^r\lambda_3^r\sin\theta'}{r_p^r\lambda_3^r\sin 2\theta'\sin\Phi_p^{(4)}} \right] \quad (57-a)$$

ここで、

$$A = \left(\frac{1}{r_p^r\lambda_1^r} \right)$$

$$\times [\cos\phi\cos\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) - \sin\phi\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})] \quad (57-b)$$

$$B = \left(\frac{1}{r_p^r \lambda_2^r} \right) \times [\sin\phi\cos\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) + \cos\phi\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})] \quad (57-c)$$

である。

$$\textcircled{5} \quad k=5, \quad n_p^{(4)} = [\cos\Phi_p^{(4)}, \sin\Phi_p^{(4)}, 0], \\ n_s^{(4)} = [\cos\Phi_s^{(4)}, \sin\Phi_s^{(4)}, 0] = [-\sin\Phi_p^{(4)}, \cos\Phi_p^{(4)}, 0]$$

から、

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\phi'\cos\theta'\cos(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ -\sin\phi'\sin(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ \sin\phi'\cos\theta'\cos(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ +\cos\phi'\sin(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ -\sin\theta'\cos(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \end{array} \right\} = (1/r_p^r) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} (1/\lambda_1^r) [\cos\phi\cos\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) \\ -\sin\phi\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})] \\ (1/\lambda_2^r) [\sin\phi\cos\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) \\ +\cos\phi\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})] \\ (1/\lambda_3^r) [-\sin\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)})] \end{array} \right\} \quad (58-a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\cos\phi'\cos\theta'\sin(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ -\sin\phi'\cos(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ -\sin\phi'\cos\theta'\sin(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ +\cos\phi'\cos(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \\ \sin\theta'\sin(\eta'+\Phi_p^{(4)}) \end{array} \right\} = (1/r_s^r) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^r [-\cos\phi\cos\theta\sin(\eta+\Phi_p^{(4)}) \\ -\sin\phi\cos(\eta+\Phi_p^{(4)})] \\ \lambda_2^r [-\sin\phi\cos\theta\sin(\eta+\Phi_p^{(4)}) \\ +\cos\phi\cos(\eta+\Phi_p^{(4)})] \\ \lambda_3^r [\sin\theta\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})] \end{array} \right\} \quad (58-b)$$

より、

$$\theta' = \sin^{-1} \left\{ \frac{\sin\theta [\cos^2(\eta+\Phi_p^{(4)}) + (\lambda_3^r)^4 \sin^2(\eta+\Phi_p^{(4)})]^{1/2}}{r_p^r \lambda_3^r} \right\} \quad (59-a)$$

$$\phi' = \cos^{-1} \left[\pm \frac{(1-C-D)^{1/2}}{\sin\theta'} \right] \quad (59-b)$$

ここで、

$$C = \left(\frac{1}{r_p^r \lambda_2^r} \right)^2 \times [\cos\phi\cos\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) - \sin\phi\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})]^2 \quad (59-c)$$

$$D = \left(\frac{\lambda_1^r}{r_p^r} \right) \times [-\cos\phi\cos\theta\sin(\eta+\Phi_p^{(4)}) - \sin\phi\cos(\eta+\Phi_p^{(4)})]^2 \quad (59-d)$$

であり、 η' は次式から求められる。

$$\eta' = \sin^{-1} \left[\left(\frac{1}{r_p^r \lambda_1^r \lambda_2^r} \right) \{ \lambda_1^r \cos\phi' [\sin\phi\cos\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) + \cos\phi\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})] - \lambda_2^r \sin\phi' [\cos\phi\cos\theta\cos(\eta+\Phi_p^{(4)}) - \sin\phi\sin(\eta+\Phi_p^{(4)})] \} - \Phi_p^{(4)} \right] \quad (59-e)$$

ここで、 r_s^r 、 r_p^r の大きさは、(45-a)、(45-b) 式により、変形前の角度成分で表される。

2.4 単位方向に伴う仕事増分

結晶単位の滑り面に作用するせん断応力と、その結果生ずるせん断ひずみ増分に伴う仕事増分 dW_2 と巨視的な応力とひずみ増分に伴う仕事増分 dW_1 に対し、これまで、多結晶集合体の塑性滑りを取り扱う場合、前者は最小せん断の原理¹⁴⁾、後者は最大塑性仕事の原理¹²⁾ に対応させて解析が行われ、結局、両者が平衡になるよう線形計画法¹⁵⁾ による双対問題を適用して、滑り系の優先順位を検討することが有効な方法である。

しかし、本研究では各滑り系のせん断ひずみ増分 $d\gamma^{(k)}$ が定量的に取り扱えないので、これを一種のパラメーターと考えて計算を進め、ここでは計算可能な最大塑性仕事の原理¹²⁾ を 1 個の結晶単位に適用すると、(2) 式および (12) 式から、次に示す仕事増分が最大になるよう取り扱う。

$$dW_1 = \sum_{m=1}^6 \dot{\sigma}_m d\epsilon_m \quad (60)$$

このときの制限条件は (18-a) 式より、

$$\{\tau^{cR(k)}\} \geq [T^{c(k)}] AK \quad (18-a')$$

として考える。これを具体的に示すと、

$$dW_1 = (d\epsilon_3 - d\epsilon_1) K$$

に (34) 式以下に示す各滑り系のひずみ増分を代入すると、

$$dW_1 = \{ (a_{32}a_{31} - a_{12}a_{11}) d\gamma^{(1)} + (a_{33}a_{31} - a_{13}a_{11}) d\gamma^{(2)} + (a_{33}a_{32} - a_{13}a_{12}) d\gamma^{(3)} + [(a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)}) a_{33} - (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)}) a_{13}] d\gamma^{(4)} + [(a_{31}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{32}\sin\Phi_p^{(4)}) (-a_{31}\sin\Phi_p^{(4)} + a_{32}\cos\Phi_p^{(4)}) - (a_{11}\cos\Phi_p^{(4)} + a_{12}\sin\Phi_p^{(4)}) (-a_{11}\sin\Phi_p^{(4)} + a_{12}\cos\Phi_p^{(4)})] d\gamma^{(5)} \} K \quad (61)$$

をそれぞれの結晶単位に対して得る。

ここで、 dW_1 が注目する単位で最大になるように、その結晶単位の方位について有効に作用する滑り系を発見する。すなわち、せん断ひずみ増分 $d\gamma^{(k)}$ を各滑り系で同一と仮定して、各 5 個の滑り系が単一の滑り系として、それぞれ単独に作用したときの dW_1 の値と比較して、そのうち最も大きな dW_1 に相当する滑り系を、その方位の有効滑り系として選択する。

いっぽう、(61)式を取り扱う場合に、複数の滑り系が同時に作用すると考える方法および双対問題も考えられるが、この点に関しては今後の課題である。

3. 結 論

HDPE をロール延伸する際の微結晶単位の塑性変形に伴う配向の様子を、金属塑性学⁸⁾的に PE で考えられる 5 組の滑り系をモデルとして、巨視的な応力およびひずみ増分と結晶単位に発生するせん断応力およびせん断ひずみ増分との関係から配向挙動の解析法を示した。

本報では、滑り面および滑り方向が変形後も直交性を保持⁹⁾することを前提に、変形率 λ の条件を設定する方法を採用するとともに、巨視的なロール延伸の変形条件に伴う各滑り系の配向挙動を解析する方法を示した。また、この配向機構を評価する上で、最大塑性仕事の原理に基づく、仕事増分が最大になる各滑り系を個々の結晶単位で選択する方法を示した。したがって、本報で示した各 5 組の単一滑り系のうち、どれかの滑り系が各方位の単位で発生するものとして考慮する。

具体的な HDPE フィルムのロール延伸の場合の計算と実測の比較は、次報で報告する。

参 考 文 献

- 1) Yoshihara, N., Fukushima, A., Watanabe, Y., Nakai, A., Nomura, S. and Kawai, H.:

- Sen'i-Gakkaishi*, **37**, T-387(1981)
- 2) Ma, C.T. and Han, C.D.: *J. Appl. Polym. Sci.*, **35**, 1725(1988)
- 3) Kaito, A., Nakayama, K. and Kanetsuna, H.: *J. Appl. Polym. Sci.*, **30**, 1241(1985)
- 4) Kaito, A., Nakayama, K. and Kanetsuna, H.: *J. Appl. Polym. Sci.*, **28**, 1207(1983)
- 5) 日比貞雄, 前田松夫, 横山明宏, 藤田健一, 倉田信夫: 高分子論文集, **42**, 63(1985)
- 6) 日比貞雄, 鈴木浩司, 平野妙子, 鳥居隆司, 藤田健一, 中西英二, 前田松夫: 高分子論文集, **45**, 237(1988)
- 7) 鈴木浩司, 日比貞雄, 鳥居隆司, 小林雅明, 中西英二, 前田松夫: 高分子論文集, **44**, 491(1987)
- 8) 山田嘉明, 木原諄二: 金属塑性学, 95(1973)丸善
- 9) 吉村慶丸: 塑性力学, 106 (1955), 共立出版
- 10) Miles, J.M. and Mills, J.N.: *J. Mater. Sci.*, **10**, 2092(1975)
- 11) 鳥居隆司, 日比貞雄, 隅田克彦, 牧野博文, 前田松夫, 中西英二: 高分子論文集, **45**, 371(1988)
- 12) Bishop, W.F.J. and Hill, R.: *Phil. Mag.*, Ser.7, **42**, 414(1951)
- 13) 鷲津久一郎著, 日本鋼構造協会編: コンピュータによる構造工学講座 I-3-B, エネルギー原理入門, 32(1970), 培風館
- 14) Taylor, I.G.: *J. Inst. Metals*, **62**, 307(1938)
- 15) 大久保忠恒: 塑性と加工, **11**, 152(1970)