粘弾性流体の高ワイセンベルグ数問題および 二重管ダイスウェルシミュレーション

田上 秀一^{*1}・古閑 二郎^{*2}・梶原 稔尚^{*3}・家元 良幸^{*1}・船津 和守^{*4}

High Weissenberg Number Problem and Numerical Simulation of an Annular Extrudate Swell of Viscoelastic Fluids

TANOUE, Shuichi^{*1}/KOGA, Jiro^{*2}/KAJIWARA, Toshihisa^{*3}
IEMOTO, Yoshiyuki^{*1}/FUNATSU, Kazumori^{*4}

It is difficult to analyze numerically the annular extrudate swell of a viscoelastic fluid at high Weissenberg numbers ($We > 100$) though the streamline-upwinding (SU) finite element method is used. We first reviewed the past mathematical studies of the high Weissenberg number problem of the Maxwell model and the Oldroyd-B model. The Newtonian stress term in the Oldroyd-B model allows a solution to the steady-state flow problem in practical geometries at high Weissenberg numbers. This term suppresses the change of type to hyperbolic in the governing equations for steady state viscoelastic flow. We proposed a new calculation technique, TME (Transformation of Momentum equation to the Elliptic equation), which involves an underrelaxation of the deformation rate tensor in the viscoelastic flow governing equations for high We annular extrudate swell simulation. And we used TME to annular extrudate swell simulation problem for the Giesekus model. The limitations of calculated We by TME with SU were about 6 times (at $\alpha=0.1$) and over 250 times (at $\alpha=0.5$) higher than those by SU only. However it may be necessary to refine the mesh, including the use of TME, for high We annular extrudate swell simulation at $\alpha=0.1$.

Key words: High Weissenberg number problem/Viscoelastic fluid/Numerical simulation/Finite element method/Annular extrudate swell

1. 緒 言

高分子流体の流動の数値解析が広く試み始められた1985年、86年にDupretら^{1),2)}およびJosephら^{3),4)}は、upper-convected Maxwell モデルの流動方程式系の厳密解の存在に関する数理的検討を行った。また、Dupretら⁵⁾は、Maxwell モデルおよびOldroyd-B モデルの急縮小流動の数値解析を行い、厳密解の存在しない条件でも有限要素解が得られること、およびOldroyd-B モデルはMaxwell モデルより計算可能なワイセンベルグ数が高いことを示した。これらの研究の目的は、“高ワイセンベルグ数問題”と呼ばれる数値解析の困難性の解明にあり、それ以前に報告されたRutkevitch⁶⁾の結果の再確認にとどまらず、数値解析法の改善に反映された。

^{*1} 福井大学 工学部 材料化学科
福井市文京 3-9-1 (〒910)

Department of Materials Science and Engineering,
Fukui University

3-9-1 Bunkyo, Fukui-shi, Fukui 910 Japan

^{*2} 埼玉大学 工学部 応用化学科

浦和市下大久保 225 (〒338)

Department of Applied Chemistry, Saitama University
225 Shimo-Okubo, Urawa-shi, Saitama 338 Japan

^{*3} 九州工業大学 工学部 物質工学科

北九州市戸畑区仙水町 1-1 (〒804)

Department of Applied Chemistry,
Kyushu Institute of Technology

1-1, Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu 804 Japan

^{*4} 九州大学 大学院工学研究科 化学システム工学専攻

福岡市東区箱崎 6-10-1 (〒812-81)

Department of Chemical Systems and Engineering,
Kyushu University

6-10-1, Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812-81 Japan

1996.12.14 受理

1987年, Marchal ら⁷⁾は, 流線上流型有限要素法 (SU) を提案し, 高ワイセンベルグ数問題は大きく解決の方向に向かった。桑野ら⁸⁾は, SU 法を用いて Giesekus モデルの平板, 円管ダイスウェル問題で高ワイセンベルグ数領域の解析に成功したが, 二重管ダイスウェル問題では低いワイセンベルグ数領域までしか計算できなかった。

二重管ダイスウェルはブロー成形のパリソン形成過程に見られる流れ系である。筆者ら^{9), 10)}は, 計算可能なダイスウェルシミュレーション結果を利用して, パリソン形成過程を解析し, 工学的に有用な結果を得た。しかしながら, 広範な条件でのパリソン形状の予測および詳細な検討を行うには, 二重管ダイスウェルの高ワイセンベルグ数問題の解決が不可欠であることが再認識された。その後, ワイセンベルグ数の増加に対して Oldroyd-B モデルが Maxwell モデルに比べ安定であることに着目し, 筆者ら¹¹⁾は, 二重管ダイスウェル問題において高ワイセンベルグ数領域での数値計算を可能にする方法を見いだした。

本論文ではまず, 1985年, 86年になされた高ワイセンベルグ数問題の数理的検討をレビューし, その意味を明確にする。次に, 筆者ら¹¹⁾の提案した不足緩和法の一つである新しい計算法について説明し, この方法が計算値に及ぼす影響の程度を検討した。また, 流線上流型有限要素法 (SU) とこの方法とを併用して, 二重管ダイスウェル流動シミュレーションを行い, 計算可能な We を比較した。

2. 高ワイセンベルグ数問題の数理

等温, 非圧縮性の Maxwell モデルの流動方程式系 (連続の式, 運動方程式, 構成方程式) は, 圧力 p , 速度ベクトル $\mathbf{v}$, 応力テンソル $\mathbf{T}$ を用いると,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2)$$

$$\mathbf{T} + \lambda \dot{\mathbf{T}} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (3)$$

で与えられる。ここに, λ は緩和時間, η_0 はせん断粘度である。また,

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (5)$$

である。Eqs. (1)~(3) を代表長さ H , 代表速度 $\langle u \rangle$, 代表応力 $\eta_0 \langle u \rangle / H$ で無次元化する。いま, 無次元化された圧力, 速度, 応力も有次元の記号と同一のそれで表現するなら, Eqs. (1), (4), (5) の表現は変わらず, Eqs. (2), (3) だけ,

$$Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (6)$$

$$\mathbf{T} + We \dot{\mathbf{T}} = 2\mathbf{D} \quad (7)$$

となる。ここに, Re はレイノルズ数, We はワイセンベルグ数であり次式で定義される。

$$Re = \frac{\rho \langle u \rangle H}{\eta_0}, \quad We = \frac{\lambda \langle u \rangle}{H} \quad (8)$$

Dupret ら^{1), 2)}は, Eqs. (1)~(3) に示した Maxwell モデルの非定常流動方程式系の厳密解の存在条件を, 特性理論を用いて明らかにした。その結果を Eqs. (1), (6), (7) について記すと,

$$\mathbf{T}_A = We \mathbf{T} + \mathbf{I} \quad (9)$$

で定義されるテンソルが正定値であるならば, 非定常流動の厳密解は存在する。ここに, $\mathbf{I}$ は単位テンソルである。いま, 対象とする非定常流動問題で, 初期状態において $\mathbf{T}_A$ が正定値であれば, 発展性の喪失 (流速が増加すると, 微小な解の振動の振幅が大きくなり, 不安定となって解が得られなくなる) は起こらず, この非定常流動問題は適切である。なお, Newton 流体では, $We=0$ であるので, $\mathbf{T}_A = \mathbf{I}$ となり非定常流動問題で発展性の喪失は起こらない。

また, 彼らおよび Joseph ら^{3), 4)}は, この Maxwell モデルの定常流動方程式系における渦度方程式の楕円型から双曲型への型変化の起こる基準も報告している。結果のみを述べると, 次式で定義されるテンソル $\mathbf{T}_B$,

$$\mathbf{T}_B = \mathbf{T}_A - We Re \mathbf{v} \mathbf{v} \quad (10)$$

が正定値であれば, 双曲型への型変化は起こらない。なお, $\mathbf{v} \mathbf{v}$ は $\mathbf{v}$ と $\mathbf{v}$ とのテンソル積である。速度が大きくなると, $\mathbf{T}_B$ は非正定値になり, 厳密解は存在しない。なお, Stokes 近似, すなわち, $Re=0$ では, $\mathbf{T}_B = \mathbf{T}_A$ となるため, 非定常流動問題における発展性の喪失と定常流動問題での楕円型から双曲型への型変化の基準を与えるテンソルは同一となる。

平行平板内流動や円管内流動では, $\mathbf{T}_A$ は正定値であるので, Maxwell モデルの非定常流動問題では, 常に発展性の喪失が起こらず, 定常流動の境界値問題は適切である。しかしながら, 急縮小流動やダイスウェル流動のような成形加工でよく見られる実際的な流路形状での流動は, コーナー部やダイ出口部が特異点であるため, この特異点近傍で低 We 数においても $\mathbf{T}_A$ が非正定値となり, 解が得られなくなる。これが高ワイセンベルグ数問題の内容である。

次に, Oldroyd-B モデルの高ワイセンベルグ数問題を考察する。Crochet ら¹²⁾が提案した Oldroyd-B モデルの構成方程式を無次元化して以下に示す。

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} + 2s\mathbf{D} \quad (11)$$

$$\mathbf{E} + We \dot{\mathbf{E}} = 2(1-s)\mathbf{D} \quad (12)$$

ここに, s は, $0 < s < 1$ なるパラメータである. Eq. (11) は,

$$\boldsymbol{T} + We \bar{\boldsymbol{T}} = 2\boldsymbol{D} + 2sWe \bar{\boldsymbol{D}} \tag{13}$$

を与え, Eqs. (11), (12) が通常の Oldroyd-B モデルの構成方程式と同一であることがわかる. Oldroyd-B モデルの非定常流動問題が適切であるためには, Eq. (10) に対応して,

$$\boldsymbol{T}_{AE} = We \boldsymbol{E} + \boldsymbol{I} \tag{14}$$

が正定値でなければならない. Oldroyd-B モデルも実際の形状での流動問題は特異点があるため, We 数の増加に従って, この特異点近傍で $\boldsymbol{T}_{AE}$ が非正定値となり, 発展性の喪失を起こす. しかし, 定常流動問題では, $Re=0$ あるいは $Re \neq 0$ のいずれの場合にも, s の値を大きくすると, 双曲型への型変化を抑えることができる. Joseph ら^{3),4)} は, Oldroyd-B モデルのように Newton 粘性を含む構成方程式における粘性項の効果を, 遷音速流動で Euler 方程式に付加される人工粘性項のそれと類似と考えている. また, Dupret ら^{1),2)} も, 実際の形状での流動問題において, 型変化が起こらないように構成方程式を修正あるいは拡張することは有意義であるとし, 元の構成方程式は拡張されたその極限であると考えことを提案している. この Joseph らおよび Dupret らの示唆は, 実際の形状での高 We 数での定常流動問題の数値解析に重要な指針を与える.

3. 数値解法

3.1 流体モデルと流動特性

粘弾性流体を表す構成方程式として, Oldroyd-B モデルに応力の非線形項が加わった形式の単一モードの Giesekus モデルを用いた, 無次元化された構成方程式は, Eq. (11) と

$$\boldsymbol{E} + We \bar{\boldsymbol{E}} + \frac{\alpha We}{1-s} \boldsymbol{E}^2 = 2(1-s) \boldsymbol{D} \tag{15}$$

で与えられる. ここに, α は $0 \leq \alpha \leq 1$ なるパラメータである. $\alpha=0$ ならば, Oldroyd-B モデルである. 本研究では過去の研究⁸⁾ との比較も考慮に入れ, Giesekus モデルのモデルパラメータ $\alpha=0.1$ および 0.5 (いずれも $s=1/9$) の 2 つの流体について考えた. Fig.1 に定常のせん断流動特性および伸長流動特性を示す. $\alpha=0.1$ の流体は $\alpha=0.5$ の流体に比べ, 同じせん断速度において第一法線応力差が大きく, また伸長粘度は伸長速度の増加とともに立ち上がる strain-thickening 性を示し, 物性の非線形性が強く, 弾性の強い流体を表している.

3.2 計算手法

流動方程式系の離散化には, Marchal ら⁷⁾ の SU 法

(a) Shear viscosity and the primary normal stress difference

(b) Elongational viscosity

Fig.1 Steady state flow characteristics curves of the Giesekus model ($s=1/9$) used in the calculation

を適用した. ここでは, 速度については 9 節点二次補間, 圧力には 4 節点一次補間を用い, 応力については 1 つの四角形要素を 4×4 のサブエレメントに分割し, それぞれのサブエレメントで 4 節点一次補間を用いる. 次に, 構成方程式の upper-convected 時間微分中に存在する移流項のみに Brooks ら¹³⁾ が提唱した流線上流型の重み関数を適用する. Eq. (15) を SU 法により離散化すると, 応力の試行関数を Π_i として次式のようになる.

$$\int_V \Pi_i \left(\boldsymbol{E} + We \bar{\boldsymbol{E}} + \frac{\alpha We}{1-s} \boldsymbol{E}^2 - 2(1-s) \boldsymbol{D} \right) dV + \int_V \hat{k} \boldsymbol{w} \cdot \nabla \Pi_i (We \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{E}) dV = 0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \tag{17}$$

$$\hat{k} = \frac{\sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2}}{2} \tag{18}$$

$$v_\xi = (\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{e}_\xi) h_\xi, \quad v_\eta = (\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{e}_\eta) h_\eta \tag{19}$$

ここに, $\boldsymbol{v}_0$ は要素中心部における速度, $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$ は要素内の ξ 方向, η 方向の単位ベクトル, h_ξ , h_η は ξ 方

Fig. 2 Schematic diagram of e_ξ , e_η , h_ξ and h_η ; v_ξ and v_η are the ξ - and η -components of the velocity on the center of the each finite element, respectively

向, η 方向の要素代表長さである (Fig. 2 参照). この流線上流化は一次精度の風上差分化と同一である.

粘弾性流体の Stokes 流れの運動方程式,

$$-\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (20)$$

に注目する. Eq. (11) を Eq. (20) に代入すると,

$$-\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{E} + 2s \nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (21)$$

が得られる. 一般に, s の値を適当にとることで, Eqs. (1), (20), (21) から構成される定常流動方程式系の双曲型への型変化を抑えることができる. ただし, s は物性定数なので, 反復計算の途中では変化できても, 最終的に解を得る段階では最初に与えられた物性値でなければならない. 本研究では, s の値を固定して Eq. (21) を数値的に解くことを考える. Eq. (21) の両辺にニュートン応力項 $2f \nabla \cdot \mathbf{D}$ (f はパラメータ) を加え,

$$-\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{E} + 2(s+f) \nabla \cdot \mathbf{D} = 2f \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (22)$$

とする. Eq. (21) と Eq. (22) とは同値である. Eq. (22) を有限要素法によって離散化する. 速度の試行関数を Φ_i として, Galerkin 法を適用すると,

$$\begin{aligned} & \int_V \nabla \Phi_i \cdot [-p \mathbf{I} + \mathbf{E} + 2(s+f) \mathbf{D}] dV \\ &= \int_V \nabla \Phi_i (2f \nabla \cdot \mathbf{D}) dV \\ &+ \int_S \Phi_i \{ (-p \mathbf{I} + \mathbf{E} + 2s \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n} \} dS \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる. ここに, $\mathbf{n}$ は境界上の法線方向に立てた単位ベクトルである. この代数方程式を Newton-Raphson 法のような反復法を適用して解く場合, $(n+1)$ ステップでの計算では, 右辺は n ステップでの値を用いる. この定式化を Eq. (22) に施すと次式が得られる.

$$\begin{aligned} & -\nabla p^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{E}^{n+1} \\ & + 2(s+f) \nabla \cdot \mathbf{D}^{n+1} = 2f \nabla \cdot \mathbf{D}^n \end{aligned} \quad (24)$$

Eq. (24) を変形速度 $\mathbf{D}$ に対して展開, 整理すると,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}^{n+1} &= \frac{f}{s+f} \nabla \cdot \mathbf{D}^n \\ &+ \left(1 - \frac{f}{s+f} \right) \left(-\frac{\nabla p^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{E}^{n+1}}{2s} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

となり, ここで用いた計算法は変形速度 $\mathbf{D}$ に対する不足緩和法と解釈できる. 式中の $f/(s+f)$ が緩和係数に対応し, f の値の増加は不足緩和を増大させる. この結果, 解が安定に得られる We の範囲の増大が期待できる. また, この手法での f の増加は反復計算の過程で s の寄与を増大させることに対応し, s を適当にとることで定常流動方程式系の双曲型への型変化を抑えることができることを考えると, この手法での定式化は方程式系の楕円型への寄与を保たせるように運動方程式を変形したと解釈できる. 以上のことから, 今回の定式化を TME (Transformation of Momentum equation to the Elliptic equation) と称することにする.

3.3 計算領域と境界条件

ここでは, ダイの内径/外径比 $\kappa=0.75$ のストレートな二重管流路を通るダイスウェルを対象にした. Fig. 3 に流路形状および解析で用いたメッシュ, Fig. 4 に境界条件を示す.

流入条件として完全に発達した流れを仮定した. すなわち, 速度および応力についての 5 個の Dirichlet

Fig. 3 Initial finite element mesh pattern and flow geometries used in the annular extrudate swell simulation at $\kappa=0.75$. The flow analysis region is extended to $z/R_o = -1.25$ in the upstream direction and $z/R_o = 10$ in the downstream direction

Fig. 4 Boundary conditions used in the simulation of annular extrudate swell

条件を与えた。流入条件で与える値は、流れ方向には物理量の変化がなく、流路幅方向のみの変化を考えた一次元の二重管ダイ内粘弾性流動モデルを用い、流路幅方向に一次元メッシュを切り、壁面すべり無しの境界条件の下で別途計算により求めた。また、流出条件に一樣流れを仮定した。特性の理論によれば、方程式系の流入—流出位置における Dirichlet 境界条件の数は、方程式系の特性根から決定される。方程式系の特性根が N 個で、そのうち実根が N_r 個で複素根が N_c 個である場合、境界条件の数は $N_r + N_c/2$ である。流入および流出位置において特性根は 2 個の実数および 4 個の虚数であるため、流入—流出位置での Dirichlet 条件の数はそれぞれ 4 個で十分である。ここでの境界条件は特性の理論に反する。流入条件で完全発達流れを用いる場合、流入—流出位置が速度および応力の不連続になる位置（本研究ではダイリップ）にかなり近いと、物理的に不自然な解に収束する。筆者らは、現段階では流入条件として完全発達流れ以外の条件を与えることができない。そこで、物理的に妥当な解を得るために、本研究ではダイリップから十分離れた位置において流入条件に完全発達流れ、流出条件に一樣流れを仮定した。また、壁面では速度成分をゼロ、自由表面上ではせん断応力がゼロで法線応力は大気圧とつり合っているとした。自由表面の位置は次式で与えられる運動学的方程式を陽解法により求めた。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (26)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ は自由表面上の法線方向に立てた単位ベクトルである。

4. 結果および考察

4.1 二重管ダイスウェルシミュレーションにおける計算可能な We の従来法との比較

TME の有用性を検討するために、手法 I : TME + SU 法、手法 II : SU 法のみ、手法 III : TME のみの 3 種類について、計算可能な We の比較を行った。 We は次式で定義する。

$$We = \frac{\lambda \langle u \rangle}{(R_o - R_i)/2} \quad (27)$$

ここで、 $\langle u \rangle$ はダイリップにおけるダイ内平均流速、 R_o , R_i はダイリップにおけるダイ外半径、ダイ内半径である。Table 1 にそれぞれの手法における計算可能な We を示す。ここで手法 I と手法 III において $f=8/9$ とした。SU では計算可能な We はたかだか 2 程度であるのに対し、手法 I の計算可能な We は $\alpha=0.1$ で 9.8、 $\alpha=0.5$ で 500 以上と手法 II の場合に比べ約 6～250 倍増加している。PS や HDPE のような比較的弾性の弱い成形材料に近い流動特性を示す $\alpha=0.5$ の流

Table 1 Limitation of Weissenberg numbers in an annular extrudate swell simulation of the Giesekus model by various calculation method at $\kappa=0.75$ and $s=1/9$

	Method I	Method II	Method III
$\alpha=0.1$	9.8	1.56	1.78
$\alpha=0.5$	>500	2.04	10.6

Method I : TME with SU ($f=8/9$, $\hat{k}=\text{given}$), Method II : SU ($f=0$, $\hat{k}=\text{given}$), Method III : TME without SU ($f=8/9$, $\hat{k}=0$). $\hat{k}$ is the artificial diffusion defined by Eq. (18).

体では、ブロー成形において実成形レベルである数百程度の We 数での計算が TME の導入により可能になった。手法 III では $\alpha=0.1$ で 1.78、 $\alpha=0.5$ で 10.6 と手法 II に比べると計算可能な We が増加したが、手法 I ほどの高 We 計算はできなかった。この結果から、高 We 領域の計算では TME と SU 法との併用が有効であるといえる。また、計算可能な We の比較により、解の収束性が議論できると考えられ、今回検討した手法のうち、TME と SU 法との併用が最も収束性がよい手法であると判断できる。

4.2 TME における計算値の評価

二重管ダイスウェルシミュレーションにおける流入条件の計算で得られる二重管ダイ内流動の計算値について、TME における不足緩和係数を示すパラメータ f の大小による影響を調べた。ここでは、速度、応力、圧力勾配について各 f における計算値と $f=0$ における計算値との偏差を次式により求め、

$$D_x = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{|x_i|_{f=\text{given}} - x_i|_{f=0}|}{|x_i|_{f=0}} \times 100 \right\} / N \quad (28)$$

その平均値を比較する。Fig. 5 に偏差に及ぼす f の効果を示す。偏差は、 $We=0$ から We が上昇するにつれ大きくなり、 $We=0.6$ 付近で最大値を示し、それ以上の We では We が大きくなるとともに偏差は小さくなっていることがわかる。一方、 f の増加に従い、いずれの計算値も偏差が大きくなっていることがわかる。偏差が比較的大きい応力についてみると、 $We=0.5$ では、 $f=44/9$ で 7.6 %、 $f=8/9$ で 1.7 % であるのに対し、 $We=10$ では $f=44/9$ で 0.5 %、 $f=8/9$ で 0.1 % となり、 We の大きい領域ではある程度 f の値を入れても得るべき解に近い計算ができることがわかる。また、例えば $f=17/9$ を選んだ場合、偏差が 1 % 以内となる $We=1.5$ 程度の We における計算は $f=0$ としても計算できる領域なので、実際の計算を行う上では問題ない。それゆえ、 We の低い領域では f の値をできるだけ

Fig.5 Average deviation of valuables as a function of We at various f values in an axial annular flow in a die ($\kappa=0.75$) for the Giesekus model at $\alpha=0.5$ and $s=1/9$

小さくし、 We を徐々に上昇させ計算結果が得られなくなったら、 f の値を大きくするスキームが考えられる。

4.3 TMEにおける f と計算可能な We の関係

TMEにおいて各 f の値における計算可能な We について評価するために、最初に $f=0$ として計算を開始し、 We を上昇させながら計算を進める過程において、発散を起こした場合に f を $1/9$ ずつ上昇させて計算を続けるという手順による二重管ダイスウェルシミュレーションを実施し、計算過程における f と We の関係について検討した。なお、 f の値には上限はないが、本研究では f を1まで上昇させることにした。

Fig.6に各 α における We と f の関係を示す。 f の変化がステップ状になっているのは発散した We で f の値を変えているからである。 $\alpha=0.1$ では、計算限界である $We=9.8$ では $f=4/9$ で計算できたが、それ以上になると f を1まで上昇させても解は発散した。 $\alpha=0.5$ では少なくとも $We=450$ 以上の計算が可能で、そのとき $f=3/9$ であった。不足緩和係数 $f/(s+f)$ を計算するとそれぞれ0.8, 0.75となり、 f の値としてはわずかであるが、 $s=1/9$ として計算を行っているため大きな不足緩和の寄与が作用していることがわかる。しかし、 $\alpha=0.1$ のケースでは大きい不足緩和の寄与が作用しても、 $We=9.8$ までしか計算できなかった。Fig.7に今回の計算で得られた二重管ダイスウェル形状の一例を示す。図中にはそれぞれの We における外径スウェル比 χ_{R0} 、肉厚スウェル比 χ_T を示した。それぞれのスウェル比は次式で定義される。

$$\chi_{R0} = R_{f0}/R_0 \quad (29)$$

$$\chi_T = (R_{f0} - R_{f1}) / (R_0 - R_1) \quad (30)$$

Fig.6 Parameter f as a function of We in the annular extrudate swell simulation for the Giesekus model at $\kappa=0.75$ and $s=1/9$

ここで、 R_{f0} 、 R_{f1} はそれぞれ押出物の平衡流部における外半径、内半径である。従来のSU法では計算できなかった We 領域($We>2$)においても、 We の増加とともに押出物全体が外径方向に膨張する傾向が見られるが、その中で特に $\alpha=0.1$ では発散点付近の $We=9$ において、ダイ出口直後から急激な外径方向のスウェルが起こっていることがわかる。 $We=9$ における肉厚スウェル比 χ_T が $We=2$ のときよりも減少していることから、その膨張の程度が判断できる。これにより、メッシュ形状のひずみが大きくなり、発散に至ったものと考えられる。また、仮に f を1以上にしても、Fig.3のようなメッシュを用いると $We=9.8$ 以上の計算はできないと予想される。 $\alpha=0.5$ では $We=450$ といった高 We 領域においても押出物の膨張の程度は緩やかであるので、メッシュのひずみも少なく、高い We 領域までの計算が可能となったと考えられる。したがって、 $\alpha=0.1$ の流体について高 We 領域の計算結果を得るには、TMEの適用の他にメッシュ形状の工夫も必要と考えられる。

Fig. 7 Simulation results of the annular extrudate swell for the Giesekus model at $\kappa=0.75$ and $s=1/9$

5. 結 言

これまで高ワイセンベルグ数領域での計算ができなかった微分型構成方程式を用いた二重管ダイスウェルシミュレーションを成功させるために、運動方程式の両辺に最高次数微分項であるニュートン応力項を加え、右辺を既知項として反復計算の定式化を行う不足緩和法の一つである新しい手法 (TME) を考え、SU 法との併用により、 $We=500$ 以上の高ワイセンベルグ数計算を達成した。また、上述の手法について二重管ダイス内流動の計算値については、得られた結果について従来の手法との比較を行ったところ、両者の偏差は $We=10$ 以上でたかだか $10^{-1}\%$ 以内であり、結果の妥当性が示された。さらに、二重管ダイスウェルシミュレーションにおける係数 f と計算可能な We の関係

について検討し、 $\alpha=0.1$ の流体で高 We 二重管ダイスウェルシミュレーションを行うには、TME の適用の他にメッシュ分割の工夫の必要性を示唆した。

今後の課題としては、例えば流れ系に微小な外乱を与えて収束計算を行ったときの解の収束挙動など解の収束性や安定性に対する f の影響や、支配方程式の正しい解を得るための収束判定基準など、TME に関するより詳細な検討が必要と思われる。

参 考 文 献

- 1) Dupret, F. and Marchal, J.M.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 143 (1986).
- 2) Dupret, F. and Marchal, J.M.: *J. de Mécanique théorique et appliquée*, **5**, 403 (1986).
- 3) Joseph, D.D., Renardy, M. and Saut, J.C.:

- Arch. Ration. Mech. Anal.*, **87**, 213 (1985).
- 4) Joseph, D.D. and Saut, J.C.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 117 (1986).
- 5) Dupret, F., Marchal, J.M. and Crochet, M. J.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **18**, 173 (1985).
- 6) Rutkevich, I.M.: *J. Appl. Math. Mech.*, **34**, 35 (1970).
- 7) Marchal, J.M. and Crochet, M.J.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **26**, 77 (1987).
- 8) 桑野善文, 梶原稔尚, 船津和守: 日本レオロジー学会誌, **21**, 130 (1993).
- 9) Tanoue, S., Kuwano, Y., Kajiwar, T., Funatsu, K., Terada, K. and Yamabe, M.: *Polym. Eng. Sci.*, **35**, 1546 (1995).
- 10) Tanoue, S., Kajiwar, T., Funatsu, K., Terada, K. and Yamabe, M.: *Polym. Eng. Sci.*, **36**, 2008 (1996).
- 11) Tanoue, S., Kajiwar, T. and Funatsu, K.: *PPS-11 Extended Abstracts*, 439 (1995).
- 12) Crochet, M.J. and Keunings, R.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **10**, 339 (1982).
- 13) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R.: *Comput. Meth. Appl. Eng.*, **32**, 199 (1982).
-