雪の結晶の落下速度

Falling Velocity of Snow Crystals

孫 野 長 治 *
Chōji MAGONO

1. 緒 論

雨滴の殆んどが雪の結晶のとけたものであり、雪の結晶の成長はその落下速度に関係するから、降水現象を量的に扱うには雪の結晶の落下速度は重要な要因であるにも拘わらず、中谷教授¹⁾の観測このかた落下速度についての議論がなされていない。雪の結晶の成長速度を計算するには種々の形の結晶の落下速度を大きさの函数の形で表しておくのが便利である。雨滴と異り密度を 1 gcm^{-3} と限るわけにもゆかず、また結晶の形もまちまちで落ちかたも複雑であるから、理論的な取扱いは落下中の形や密度の同時観測値が必要である。著者²⁾は前に雪片の落下速度を観測して報告したが、その時のストロボ写真装置に種々の形の雪の単結晶も撮影されたので、単結晶の落下のしかたがわかり、それらの流体力学的な取扱が可能になったので報告する。結晶の大きさ、密度、落下速度については主として中谷教授の観測値に基いて計算した。

2. 平板結晶の落下速度

a) 樹枝状結晶

ストロボ写真によれば平板結晶はその面を水平に保ちながら、ひらひらと落下する。このひらひらの振動運動を無視すれば、この型の結晶の定常落下状態では面に対する空気の抵抗が重力とつりあつて

$$Sh(\sigma - \rho)g = C_p S \frac{1}{2} \rho u^2 \dots \dots \dots (1)$$

が成立する。ここで S は結晶の水平断面積 (雪の実質部分だけを考慮して枝の○間は除く)、 h は平板結晶の厚さ、 σ は結晶の密度、 ρ は空気の密度、 g は重力加速度、 u は落下速度で C_p は円板の抗力係数である。枝のすき間を通り抜ける空気は僅かと考えられるから無視して第1-A図のように六本の枝に外接する円板の抗力係数を採用した訳である。(1)式を変形して

$$u = \sqrt{\frac{2h(\sigma - \rho)g}{C_p \rho}} \dots \dots \dots (2)$$

Fig. 1

中谷教授の観測によれば、平板樹枝状結晶の厚さは大きさに無関係に大体 0.0011 cm である。

密度は雪の実質部分についての議論であるから、 σ を 0.9 cmg^{-3} とおいてよい。 C_p は Spilhaus 博士³⁾の論文に従つて 1.2 と考えた。レーノルド数^{**}は $10^1 \sim 10^2$ である。 C_p が決まれば、落下速度は (2) 式から、 $35 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ となり、中谷教授の指摘されたように平板樹枝状結晶の終端落下速度は大きさに無関係となり、また第2

* 横浜国立大学物理学教室

** 厳密には抗力係数はレーノルド数によつて変るが、ここでは $u = 1 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$ として計算をすすめる。

図下方の破線に示す如く、観測値（実線）とかなりよく一致する。両者の相違は C_p の選定と落下中の振動状態を無視したことによるものであろう。

b) 雪粒付結晶

雪粒付結晶の密度の同時観測値が得られないので、(2) 式のままでは使えないが、中谷教授により雪の単結晶の質量 $m(g)$ と、直径 $d(cm)$ の間に次の関係式が報告されている。

$$\text{平板樹枝状} \cdots \cdots m = 0.00038 d^2 \quad (3)$$

$$\text{平板雪粒付} \cdots \cdots m = 0.0027 d^2 \quad (3')$$

$$\text{立体樹枝状} \cdots \cdots m = 0.0010 d^2 \quad (3'')$$

いま雪粒付結晶の厚さがその質量に比例するものとすれば (3), (3') 式から厚さ h は次のように計算される。

$$h = 0.0011 \times \frac{0.0027 d^2}{0.00038 d^2} \text{cm} = 0.0079 \text{cm}$$

ここでいう厚さは結晶の実際の厚さではなくて氷でつまつた実質部分を指しているから密度も $0.9 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ とすべきである。従つて雪粒付結晶の落下速度は (2) 式から $94 \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ となる。この場合も第 2 図上方の破線に見られる如く大きさに無関係である。観測値の方は大きさと共に落下速度が増しているが、この不一致は (3') 式のよりに質量は直径の平方だけに關係して厚さは一定と考えたからであらう。実際は大きいほど厚くなる傾向がある。

3. 立体結晶の落下速度

この場合にも厚さと密度の評価が難しいから結晶の密度に対して空気の密度を無視して (1) 式を次の近似式でおきかえる。

$$u = \sqrt{\frac{2h(\sigma - \rho)g}{C_p \rho}} \approx \sqrt{\frac{2h\sigma g}{C_p \rho}} \cdots \cdots (4)$$

立体結晶を第 1-B 図のように、樹枝間の空間も含めて円筒形として取扱うことにすればその体積 v は $\pi/4 d^2 h$ で表される。 d は円筒の底面の直径、 h は高さを示す。(3'') 式から密度は次のように計算される。

$$\sigma = \frac{v}{m} = 0.0040 \frac{h}{\pi} \cdots \cdots (5)$$

従つてこの場合の (2) 式は

$$u = \sqrt{\frac{0.008 g}{C_p \pi \rho}}$$

となり、落下速度は大きさに無関係になり、第 2 図で見られるように観測値とかなりよく一致する。ただ計算値のやや小さいのは C_p を平板の場合の 1.2 を採用したためにほかならない。

立体結晶の厚さは底面の直径と同程度の大きさであるから、円板の場合よりも抗力が小さい筈である。

4. 針状結晶の落下速度

Fig. 2.

ストロボ写真によれば、針状結晶は流体力学で予想される如く、軸を水平に保ちながら第1-C図の如く落下する。定常落下状態では重力と針の側面にはたらく空気の抵抗がつりあうから

$$\frac{\pi}{4} d^2 l (\sigma - \rho) g = C_c d l \frac{1}{2} \rho u^2 \dots \dots \dots (6)$$

が成立する。ここでは l は針の長さ、 d は直径、 C_c は空気流に軸が直角の場合の長円筒の抗力係数である。従つて (6) 式から

$$u = \sqrt{\frac{\pi d (\sigma - \rho) g}{2 C_c \rho}} \dots \dots \dots (7)$$

が得られる。観測値は針の長さ l で与えられているから (7) 式と比較するには直径 d との関係が必要になる。「雪の研究」所載の写真から2群の針状結晶の d と l との関係を調べてみると第3図のようになり大体

$$d = 0.08 l$$

と見做すことができる。かつて Houghton 博士⁴⁾ も $d = 0.1 \sim 0.075 l$ として計算されたことがある。また針状結晶の密度は「雪の研究」に出ている6例でみると、大きさは特別な関係はなく、平均 0.15 g cm^{-3} である。風洞実験⁵⁾の結果によれば、レーノルド数 $10^2 \sim 10^3$ では側面が空気流に直角な場合の抗力係数 C_c は、約0.7であるから、落下速度は (7) 式から $1.4 \times 10^2 \sqrt{l} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ となり長いほど大きくなる。また第2図で見られるように観測値とよく一致している

Fig. 3

5. 霰の落下速度

霰状雪を除けば霰の形は円底の円錐形といつてよい。抵抗を調べるには落下するときの向きが問題になる。ストロボ写真では、ほぼ底を下に頂点を上にしながら斜に落ちている例が少しあるがはつきりしない。中空の円錐形の模形を落としてみると底を上にして落ちるが、中が詰まっている場合には底を下目にして斜に落ちる。これは流体力学からも予想されることで、太さも密度も一樣な細長い棒は針状結晶の例の如く横になつて落ちるが、密度が一樣でも、一方が太ければ空気の抵抗も大きくなつて、太い部分が上になることもあり、また太さが一樣でも密度の大きい方が下に傾く筈である。霰の場合はかつて Reynold 氏⁷⁾が指摘したように、底の方の密度が大きいから底を下にして落ちると考えられる。横浜で大粒の霰が降つたことがある。泥の上に落ちるのを観測すると、落ちた瞬間に横倒しにならないものは、殆んど円錐の底を下にしたまま泥にはまり込んだ。底を真下にして落ちたかは別として、下側に向けて落ちたことは確実であり、底は大体円いから抗力係数としては球形の値を採用してよいであろう。この場合は定常状態で

$$\frac{\pi}{6} d^3 (\sigma - \rho) g = C_s \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho u^2 \dots \dots \dots (8)$$

が成立する。 d は霰の半球形の底の直径、 σ は霰全体を球形と考えた場合の密度、 C_s は球の抗力係数である。したがつて (8) 式は

$$u = \sqrt{\frac{4d(\sigma - \rho)g}{3C_s\rho}} \dots \dots \dots (9)$$

となる。抗力係数 C_s もまたレーノルド数によつて変るが、速度がわからないから、Newtonの評価にしたがい、0.5を採用して計算をすすめるが、この評価についてはあとで詳述する。結局、落下速度は霰の直径と密度だけの函数になるから第4図に密度 σ をパラメーターとし d の函数として破線で示しておいた。黒丸実線は観測値であるが、密度からいうと径2mm以下の小霰を除けば $0.12 \sim 0.14 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ の間におさまっている。この時の霰の密度は大きさに無関係に $0.125 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ と報告されているから (9) 式は観測値をよく表しているといつてよいであろう。径2mm以下の範囲で観測値の方が小さいのは、事実小霰の密度が小さいためか、または抗力係数の選びかた

Fig. 5

によるのであろう。

R. Gunn 氏⁸⁾の水球落下の実験によれば、径2 mm以下の霰の落下に相当するレイノルド数 2×10^2 程度では抗力係数 C_d は0.5ではなくて0.7である。このことを考慮すれば、観測値と計算値の差は更にちぢまるであろう。しかし霰の密度を大きさに無関係とすることにも問題があるので、中谷教授、高橋喜平氏⁹⁾及び著者の観測値を直径に応じて図示してみると第5図のようになり、大きい霰ほど密度の大きい傾向のあることは否定できない。霰の落下速度を更に詳しく論ずるには個々の霰の密度の同時観測がどうしても必要になる。

本論文の本質的な部分はすべて「雪の研究」所載の観測値に基いているが、中谷教授に深甚の謝意を表す。また流体力学的取扱いについては、教示を賜はつた工学部助教授丸尾氏に負うところ大で深く感謝する。

参 考 文 献

- 1) 中谷宇吉郎 雪の研究 岩波書店 昭和24年
- 2) 孫野長治 雪氷の研究 No.1 日本雪氷協会
- 3) Spilhaus, A. F. Jour. Met. U. S. A. Vol. 5 (1948) 108.
- 4) Houghton, H. G. Jour. Met. U. S. A. Vol. 7 (1950) 363.
- 5) Wieselberger, C. Handbuch der Exp. Phys. Bd. 4 2 Teil., (1932) 312.
- 6) Magono, C. Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sec. I, No. 2 (1953) 18.
- 7) Reynold. Nature, Vol. XV (1877) 166
- 8) Gunn, R., G. D. King Jour. Met. U. S. A. Vol. 6, (1949) 243.
- 9) 高橋喜平 雪氷 第12巻第5号 昭和26年 170頁