報 文

水面上の平板氷の凍結と融解についての考察¹⁾

中 塚 茂²⁾, 安 藤 政 夫³⁾

1. まえがき

氷の凍結 (生成) と融解については1860年代の F. Neumann の研究を最初に, いくつかの方法が移動境界問題の一種として提案されているが, ここでは氷と水の境界面に座標の原点をおき, 境界面における伝熱は熱伝達によるものとしてこの問題を考える。

2. 考察の基礎

この問題についての今までに発表された論文の多くは座標の原点を水面に浮かぶ氷の上表面に置き, 氷と水の境界面は氷の相変化 (凍結, 融解) によって移動する, すなわち移動境界問題として処理されてきた (片山他, 1976; 斎藤, 1986)。

ここではこれと異なり, 図1に示すように座標の原点を氷と水の境界面に置いたので, 氷の生成にともない氷は v なる速度で境界面の上方に, 融解にともない下方に移動することとなる。即ち境界面は紙面に固定され, 氷が移動するのでこの問題は移動境界問題から移動物質 (氷) 問題になる (Carslaw and Jaeger, 1959; Jakob, 1950)。

このように考えると氷内の不定常温度 $u(x, t)$ 分布についての偏微分方程式は, 移動境界問題としたときの放物型から移動速度 v を含んだ次のような偏微分方程式になる [追記1] 参照]

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho c v \frac{\partial u}{\partial x} = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

1) Studies on freezing and thawing of flat ice on the water surface.

2) チッソ (株) 技術本部

〒100 東京都千代田区丸の内 2-7-3

(Shigeru NAKATSUKA, Manufacturing Technology Department, Chisso Co. Ltd., 2-7-3 Marunouchi, Chiyodaku, Tokyo 100, Japan)

3) チッソエンジニアリング (株)

〒260 千葉市中央区新町3-13 千葉TNビル

(Masao ANDO, Chisso Engineering Co., Ltd., 3-13 Shinmachi Chuoku, Chiba 260, Japan)

図1 平板氷の垂直断面

この式において λ は氷の熱伝導率, ρ は密度, c は比熱, x は氷と水の境界面からの距離, t は時間である。(1)

式は Fokker-Planck 型の偏微分方程式である。

また v は氷の厚さを $\varepsilon(t)$ とすると

$$v = d\varepsilon / dt \quad (2)$$

であるから v の符号は氷が生成する場合は正, 融解の場合は負になる。

次に図1において, 氷と水の境界面における熱バランスに注目すると, まず $x=0$ において氷を通して上方向に伝導される熱量 q は $(-\lambda \partial u / \partial x |_{x=0})$ であり, これと氷の生成による発熱 ($v\rho L$) と水から氷への伝達熱量 (hu_f) の和がバランスするから単位面積, 時間あたり

$$-\lambda \partial u / \partial x |_{x=0} = v\rho L + hu_f = q \quad (3)$$

となるが, ここに L は氷の潜熱, h は氷と水の間の熱伝達係数, u_f は水温である.

さて(1)式を解くためには二つの境界条件と, 一つの初期条件が必要になり, (3)式を解くためには一つの初期条件が必要になる. そこでまず(1)式の境界条件として

$$x=0 \text{ で } u=0; \quad x=\varepsilon \text{ で } u=u_s, \dots\dots\dots (4)$$

初期条件として

$$t=0 \text{ で } u=u(x, 0); \quad 0 \leq x \leq \varepsilon_0 \dots\dots\dots (5)$$

とする. ここに ε_0 は $t=0$ における氷の厚さである.

次に(3)式を解くためには左辺の値を必要とするが, $t=0$ での値は(5)式から得られるけれども, 任意の t では(1)式からの u が必要になる. しかし(1)式で v は普通は時間 t の関数であるから u の解析解を得ることはできない [追記2) 参照].

3. 近似解について

後から数値的に説明するが, u の時間的変化は氷の場合その厚さ ε が0付近を除けば非常に緩やかであるから(1)式において常に $\partial u / \partial t = 0$ とし, (4)式を境界条件として解くと(1)式の解は

$$u = u_s \frac{1 - \exp(\rho c v x / \lambda)}{1 - \exp(\rho c v \varepsilon / \lambda)} \dots\dots\dots (6)$$

となる.

これも後からの数値例で検討するが, 多くの場合(6)式では $\rho c v \varepsilon / \lambda \ll 1$ であるから近似的には

$$u = u_s x / \varepsilon \dots\dots\dots (6')$$

である. (6')式で ε は未知であるが, この式を(3)式の左辺に, 右辺の v には(2)式の $d\varepsilon/dt$ を代入すると

$$-\lambda u_s / \varepsilon = \rho L (d\varepsilon/dt) + h u_f \dots\dots\dots (3')$$

となるので, $t=0$ で $\varepsilon = \varepsilon_0$ という初期条件のもとで(3')式を解くと

$$a = \lambda u_s / \rho L; \quad b = h u_f / \rho L \dots\dots\dots (7)$$

として次式が得られる.

$$\varepsilon_0 - \varepsilon + \frac{a}{b} \ln \frac{(a+b\varepsilon)}{(a+b\varepsilon_0)} = bt \dots\dots\dots (8)$$

次に氷の移動速度 v は(3')式より

$$v = d\varepsilon/dt = -(a+b\varepsilon)/\varepsilon \dots\dots\dots (2')$$

であり ε が時間によって変化するから v は時間の関数に

なり正なら氷は生成し, 負なら融解する. そして0なら相変化はなく, 氷の厚さ ε はそのまま停止する.

更に(2')式で $\varepsilon \neq 0$ で $|b\varepsilon| \gg |a|$ の時には $v = -b$ であるから(7)式から知れるように氷からの受熱と氷の融解熱がバランスしており, v は時間的に一定となる.

また(8)式で

$$|\varepsilon b/a| \ll 1; \quad \varepsilon_0 = 0 \dots\dots\dots (9)$$

であれば, この時の ε を ε_a , 比例定数を α_a とすると ε_a は

$$\varepsilon_a = \sqrt{-2 \lambda u_s / \rho L} \cdot \sqrt{t} = \alpha_a \sqrt{t} \dots\dots\dots (10)$$

となる. (10)式は F. Neumann らが問題を解くために使った条件の一つであるけれども, 筆者らはこの条件の代わりに(6')式を使ったことになる.

(10)式の場合には(9)式が成り立つ範囲で ε は時間 t とともに限りなく増大するが, (8)式の場合一般的には(2')式で $v=0$ になる時平衡値 ε_m となる. すなわち

$$\varepsilon_m = -a/b = -\lambda u_s / h u_f \dots\dots\dots (11)$$

であり, ε_m に到達するまでの時間は $t \rightarrow \infty$ である.

また(11)式には ρL は含まれない. これは相変化が停止しており氷の受熱($h u_f$)がそのまま氷を通過して氷の上表面から放出される量 ($-\lambda u_s / \varepsilon_m$) に等しいことを示している.

4. 近似解の数値例

以上に得られた結果の理解の助けにするために以下数値例について述べてみる.

そこでまず一例として

氷の上表面温度 $u_s = -10^\circ\text{C}$, 水温 $u_f = 5^\circ\text{C}$ とし, 氷の物性を SI 単位で

$$\lambda = 2.209 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}; \quad c = 2.051 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$L = 334.88 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad \rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

とすると(10)式から $\alpha_a = 0.3632 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-0.5}$ となる.

また(11)式から $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ のとき $\varepsilon_m = 0.4418 \text{ m}$ となるが, 前述した様に ε_m になるまでの時間 t は ∞ である.

次に(7)式の a, b は前記の値では

$$a = -0.06596 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}; \quad b = 0.1493 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

であるから, (2')式において $v\varepsilon$ は

$$v\varepsilon = -(a+b\varepsilon) = (0.06596 - 0.1493\varepsilon) \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

となる. 更にこの $v\varepsilon$ を(6)式の $\rho c v \varepsilon / \lambda$ に代入して整

理すると

$$\rho c v \varepsilon / \lambda = 0.06124 - 0.1386 \varepsilon \dots\dots\dots (12)$$

となるので $\rho c v \varepsilon / \lambda$ は $\varepsilon = 0$ m の時 0.06124, 前述の $\varepsilon = \varepsilon_m = 0.4418$ m の時 0 となるから $\varepsilon = 0 \sim \varepsilon_m$ の範囲では $\rho c v \varepsilon / \lambda \leq 1$ となり, 近似的に(6')式の利用が可能になる。

次に $t=0$ で氷の厚さ ε_0 が ε_m 以上ある時は $t \geq 0$ で氷は融解となるが $\varepsilon_0 > 1$ m では(6')式の利用が次第に困難となり(6)式を必要とする。

図2には(8)式から計算した $\varepsilon_0 = 0$ m で, $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ と $h = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ の時の時間 t (h) と氷の厚さ ε (m) の関係及び(3)式の q ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) を与えておいた。

また, 図3には(8)式において $u_f = 5^\circ\text{C}$, $h = 10 \text{ W} \cdot$

図2 氷生成初期における生成時間 t (h) と氷の厚さ ε (m) および氷表面よりの放熱 q ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) の関係

図3 $u_f = 5^\circ\text{C}$, $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ で $\varepsilon_0 = 0$ m 又は 1 m $u_s = 0, -1, -10^\circ\text{C}$ の時の時間 t (h) と氷の厚さ ε (m) の関係

$\text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ で $\varepsilon_0 = 0$ m, $u_s = -10^\circ\text{C}$ の時, 及び $\varepsilon_0 = 1$ m で $u_s = 0^\circ\text{C}, -1^\circ\text{C}, -10^\circ\text{C}$ の時の t と ε の関係を図2よりも長時間にわたって示しておいた。次に図3の p はこの場合は氷内の温度分布が(6')式で示すように直線的であるから氷表面よりの放熱に等しい。

なお念の為に付け加えると, 図3において $u_s = -10^\circ\text{C}$ の時 $\varepsilon_0 = 0$ m または 1 m のいずれでも $t \rightarrow \infty$ で $\varepsilon_m = 0.4418$ m となる。

筆者らは h または hu_f のこのような場合についての実測のデータを発見することはできなかったが, ここでは $u_f = 5^\circ\text{C}$ としているので hu_f は $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ で $50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, $h = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ で $150 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ となる。

海水の場合後者は大き過ぎ, 前者ないしはそれ以下らしい(石川・小林, 1982)。なおこの場合の u_f は明らかにされていないが, 5°C より低いとすれば h は前記の $(10 \sim 30) \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ よりもっと大きくなる。

5. むすび

ここではまえがきで述べたように氷の生成、融解問題を座標の原点を氷と水の境界面において考えてみた。

そうすると氷の生成にともない氷は座標軸の上方に, 融解にともない下方に移動するので, 問題は移動境界問題から移動物質問題になり, 氷内の温度 $u(x, t)$ は(1)式のように移動速度 v の項を含む偏微分方程式になった。

筆者らは(1)式の正確な解を得ることはできなかったが氷の場合十分実用になると思われる氷の厚さ ε の時間的な変化を与える解(8)式を得ることができたので, その数値的検討を行った。

謝 辞

本研究に関し多くの人々から種々の教示を受けたが, 特に北海道大学低温科学研究所, 石川信敬助教授から CRREL-Monograph (88-1) など沢山の資料をいただいた。記して感謝いたします。また長年にわたって物理数学を教えて頂いた元熊本大学教授, 故小貫章先生に本文を捧げたい。

文 献

Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., 1959: Conduction of Heat in Solids, 2nd ed. Oxford, Clarendon Press, 13.

石川信敬・小林俊一, 1982: 海水の成長に伴う表面熱収支の変化 I - サロマ湖における冬期の表面熱収支 -。低温科学, 物理編, 41, 179-189.

Jakob M., 1950: Heat Transfer. Vol. 1. New York, John

Willy and Sons Inc., 21-22.

片山功蔵・斎藤彬夫・服部賢, 1976: 非定常熱伝導の数値解法. 伝熱工学の進展3 (著者代表 藤井哲), 東京, 養賢堂, 189-209.

斎藤武雄, 1986: 数値伝熱学. 東京, 養賢堂, 165-174.

追記1)

(1)式は次のように考えて作ることができる.

まず図1で平板氷の中に x 軸に垂直な単位面積を取り, 熱伝導による単位時間あたりの熱量の移動を考え, 厚さ Δx の空間に着目すると, x 点で $-\lambda \partial u / \partial x$ の熱量が Δx 内に流入し, $(x+\Delta x)$ 点で $-\lambda \{ \partial u / \partial x + (\partial^2 u / \partial x^2) \Delta x \}$ が流出するから Δt 時間あたり Δx の氷中に差引

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta t \dots\dots\dots (13)$$

だけの熱量が残る.

次に(2)式の速度 v による単位時間あたりの熱量の移動は, やはり Δx 空間に着目すると, x 点で熱量 $\rho c v u$ が流入し, $(x+\Delta x)$ 点で $\rho c v \{ u + (\partial u / \partial x) \Delta x \}$ が流出するから Δx の氷の中に差引 Δt 時間あたり

$$-\rho c v (\partial u / \partial x) \Delta x \Delta t \dots\dots\dots (14)$$

だけの v による熱量の流入がある.

これら(13)式 + (14)式の熱量は単位面積、厚さ Δx の氷の温度を Δu だけ上昇させるがこの熱量は

$$\rho c \Delta x \Delta u \dots\dots\dots (15)$$

であるから(13)式 + (14)式=(15)式より(1)式が得られる.

追記2)

((1)式の解法の一例として, まず(5)式の初期条件に(6')式で ε を ε_0 とした式をとり, これを(3)式に代入して v を求め, これを v_1 として極めて短い時間 Δt_1 では v_1 を一定として(1)式を解き, 得られた u を $u_1(x, t \leq \Delta t_1)$ とし, これを(3)式に代入して得られた v を v_2 とし, やはり短い時間 Δt_2 ではこれを一定として(1)式を解いて u_2 を得, これをまた(3)式に代入するという様に逐次的に計算を進行すれば時間 t における氷の厚さ ε は

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots\dots\dots \\ t &= \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (16)$$

として得られる.

もし境界面において $\pm Q$ なる急速冷凍または電熱などによる時間的に一定の吸・発熱があり, この $\pm Q$ が氷を通しての熱伝導による熱流 $\lambda \partial u / \partial x$ を無視できるほどに大きい時は(3)式の代わりに

$$-\lambda \partial u / \partial x \big|_{x=0} \pm Q \doteq \pm Q = \rho v L + h u_f$$

より

$$v = (\pm Q - h u_f) / \rho L \dots\dots\dots (17)$$

となって v は時間的に一定となるので(1)式は(3), (4), (5)式の条件で解が得られるようになる.

(1992年7月18日受付, 1993年7月6日改稿受付; 討論期限1994年3月30日)