単体分離を考慮した粉砕モデル*

岡 屋 克 則¹

Comminution Model Involving Mineral Liberation

by Katsunori OKAYA¹

1. Department of Geo-system Engineering, The University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656

The comminution process is often an indispensable unit operation for mineral processing. The main purpose of mineral processing is to separate the valuable minerals from the gangue ones. It necessitates mineral liberation by comminution. Most of the conventional comminution models however, represents only the size reduction phenomena excluding liberation ones.

Different comminution matrices were applied for the free and the locked particles respectively. For the locked particles the liberation probability function was introduced in addition to the above matrix. This probability function was determined assuming completely random cutting off the spherical particles from the coarser primary particles. The degree of liberation caused by fracture of the locked particle can be obtained by an approximated equation involving the liberation probability function and the content of the component concerned.

KEY WORDS : Liberation Model, Comminution Model, Middling Particles

1. 緒 言

鉱物処理プロセスで中心となる単位操作は粉砕と分離である。特に浮選プロセスにとっては有用鉱物の単体分離が重要な課題であるにもかかわらず、通常の粉砕モデルでは粉砕産物の粒度分布についての評価が中心となっている。

Kiss and Shoenert (1980) は人工的に合成した砕料を粉砕し、2成分の単体分離モデルを経験的に作成した。それに対して論理的なモデルについては、Weigel (1976) や Peterson and Herbst (1985) が分配関数に単体分離を考慮した粉砕モデルを提案しているが、単体分離モデルと分配関数とを結び付けるには至っていない。一方単体分離については、単純化された一次元モデル (King, 1979; Klimpel and Austin, 1983; 朴, 1988)、方眼状に粉砕が行われる二次元モデル (Gaudin, 1939)、賽の目切りの粉砕とする三次元モデル (Weigel and Li, 1967) がある。Meloy らは三次元空間から球形粒子を切り出すことを考え (Meloy and Gotoh, 1985)、一次粉砕における単体粒子生成確率を求めた (Meloy, 1984)。なお、これらの単体分離モデルでは、均一な粉砕確率を仮定しており、粒間破壊などの現象を表現することはできない。

本研究では単体分離確率を加味した粉砕モデルを提示し、さらにそのために必要な単体分離モデルも提案する。この単体分離モデルでは、一次粉砕時の粒度別単体分離確率と片刃粒子の粉砕 (二次粉砕) での単体分離粒子生成確率を考慮している。

2. 単体粒子生成を考慮した粉砕モデル

通常の粉砕速度論での方程式では、砕料を単成分として、次式のように選択関数 $S(x)$ と分配関数 $\partial B(\gamma, x)/\partial x$ によって与えられる下積算粒度分布 $D(x, t)$ の物質収支式として粉砕過程がモデル化される。

$$\frac{\partial^2 D(x, t)}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial D(x, t)}{\partial x} S(x) + \int_x^{\infty} \frac{\partial D(\gamma, t)}{\partial \gamma} S(\gamma) \frac{\partial B(\gamma, x)}{\partial x} d\gamma \quad \dots\dots\dots (1)$$

これに対して、砕料が脈石を含めて n 成分からなる鉱石である場合を考える。この砕料を単体分離された成分 ($k = 1, \dots, n$) と片刃成分 ($k = 0$) の $n + 1$ 成分に分けて取り扱うことにする。単体分離されている粒子については従来の粉砕方程式に片刃成分 D_0 が粉砕されることによって新たに生成される単体分離粒子の項が追加され、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D_k(x, t)}{\partial t \partial x} = & -\frac{\partial D_k(x, t)}{\partial x} S_k(x) + \int_x^{\infty} \frac{\partial D_k(\gamma, t)}{\partial \gamma} S_k(\gamma) \frac{\partial B_k(\gamma, x)}{\partial x} d\gamma + \int_x^{\infty} E_k(\gamma, x) \frac{\partial D_0(\gamma, t)}{\partial \gamma} \\ & S_0(\gamma) \frac{\partial B_0(\gamma, x)}{\partial x} d\gamma, \quad (0 < k \leq n) \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで $E_k(\gamma, x)$ は、粒度 x の片刃粒子が粒度 γ に粉砕されたときに成分 k の単体粒子になる確率である。一方、片刃成分については、粉砕された片刃粒子のうち、各成分ごとに単体分離された粒子分が減少する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D_0(x, t)}{\partial t \partial x} = & -\frac{\partial D_0(x, t)}{\partial x} S_0(x) + \int_x^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n E_k(\gamma, x) \right\} \frac{\partial D_0(\gamma, t)}{\partial \gamma} S_0(\gamma) \frac{\partial B_0(\gamma, x)}{\partial x} d\gamma \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

式(2)、(3)の粒度区分と粉砕時刻を離散化することによって次式を得る。

* 1999年4月27日受付 7月23日受理

1. 正会員 東京大学助手 大学院工学系研究科地球システム工学専攻 [著者連絡先] FAX 03-3818-7492 (東大・地球システム)

キーワード: 単体分離モデル, 粉砕モデル, 片刃粒子

$$f_{0,j}(t+\Delta t) = -f_{0,j}(t)s_{0,j} + \sum_{i=0}^j \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n e_{k,i,j} \right\} f_{0,i}(t)s_{0,i}b_{0,i,j} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$f_{k,j}(t+\Delta t) = -f_{k,j}(t)s_{k,j} + \sum_{i=0}^j f_{k,i}(t)s_{k,i}b_{k,i,j} + \sum_{i=0}^j e_{k,i,j}f_{0,i}(t)s_{0,i}b_{0,i,j}, \quad (0 < k \leq n) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで $f_{k,j}$ は成分 k の粒度区分 j に属する重量割合であり、 $e_{k,i,j}$ は粒度区分 j の片刃粒子が粉砕されて成分 k の粒度区分 i に属する確率である。また、 $s_{k,i}$ および $b_{k,i,j}$ は選択関数および分配関数を粒度区分で離散化したものである。

各成分の粒度分布データのベクトル F_k ($k = 0, \dots, n$) を結合したベクトルについての粉砕マトリクスを考えると次式のようにになる。ここで、注意すべき点は各成分の粒度分布データのベクトルが、単に積算粒度分布データの粒度区分ごとの差分値ではなく、その値に各成分の重量割合を積算したものでなければならないことである。従来の粉砕マトリクスでは単一成分であったので成分ごとの重量割合は考える必要がなかったのであるが、単体分離を考える本モデルでは成分ごとの割合を考慮しなければならない。

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} G_{00} & & & 0 \\ G_{10} & G_{11} & & \\ & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ G_{n0} & 0 & \dots & 0 & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}_t \quad \dots\dots\dots (6)$$

なお、一旦単体分離された成分は他の成分になったり片刃粒子に戻ることはないので、各成分ごとの粉砕としての対角成分マトリクスと、片刃成分が単体分離に移行する左端一列の粉砕マトリクスだけが存在する。したがって単体分離を考慮した粉砕マトリクスは、片刃粒子の粉砕 (G_{00})、単粒子分離された粒子の粉砕 (G_{kk})、片刃粒子から単粒子分離粒子への移行 (G_{k0}) の三種類の部分マトリクスで構成される。各部分マトリクスの成分 (g_{00} , g_{kk} , g_{k0}) を記述すると以下のようにになる。

$$g_{00,i,j} = \begin{cases} 0, & (j > i) \\ 1 - s_{0,j} \left\{ 1 + b_{0,i,j} \left(1 - \sum_k e_{k,i,j} \right) \right\}, & (j = i) \\ s_{0,j} b_{0,i,j} \left(1 - \sum_k e_{k,i,j} \right), & (j < i) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$g_{kk,i,j} = \begin{cases} 0, & (j > i) \\ 1 - s_{k,j} (1 + b_{k,i,j}), & (j = i) \\ s_{k,j} b_{k,i,j}, & (j < i) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$g_{k0,i,j} = \begin{cases} 0, & (j > i) \\ s_{0,j} b_{0,i,j} e_{k,i,j}, & (j \leq i) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9)$$

すなわち、 G_{kk} は従来の粉砕マトリクスと同等であり、 G_{00} は従来の粉砕マトリクスに単体分離によって除外される要素の項が付加され、 G_{k0} のマトリクスは G_{00} で除外された要素が単粒子分離された成分として加えられている。

さらに、粉砕された片刃粒子が同じ粒度区分に属する単体粒子となる確率 $e_{k,i,j} = 0$ と近似すれば

$$g_{00,i,j} = 1 - s_{0,j} (1 + b_{0,i,j}), \quad (j = i) \quad \dots\dots\dots (10)$$

と簡略化ができる。

このようにして、各成分ごとの粉砕性を考慮した粉砕モデルを構成することができた。ただし片刃成分に関しては、片刃度および片刃成分別の取り扱いをしていないモデルであるため、元鉱石の平均的な粉砕性を片刃粒子の粉砕性として用いることとする。

図1 単体分離のモデル

3. 単体粒子生成モデル

前述の単体分離を考慮した粉砕マトリクスを完成させるためには、粉砕による単体粒子生成確率を求めるためのモデルを構築しなければならない。

3・1 粉砕粒度による単体分離度

まず、元鉱石中の着目成分 A (鉱物粒または脈石粒) の粒度分布 (重量頻度分布) が $f_{A0}(x_A)$ であったとする。

着目成分の含有率が P_A の場合、元鉱石中の任意点 p が着目成分の粒度 x_A の粒子内である確率は $P_A f_{A0}(x_A)$ である。粒子形状を球と仮定して、この点を中心にして粒度 x の粒子を切り出し、その粒子が成分 A のみで構成される確率 $E_{A0}(x_A, x)$ は、切り出した粒子が粒度 x_A の粒子内に収まる確率であるので (図 1)。

$$E_{A0}(x_A, x) = P_A f_{A0}(x_A) \frac{V_{x_A-x}}{V_{x_A}} = P_A f_{A0}(x_A) \frac{(x_A - x)^3}{x_A^3} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。ただし、 $x < x_A$ でなければならない。この確率は、切り出される元鉱石、すなわち粉砕される粒子が粒度 x_A に比べて無限にあるいは十分に大きい場合に成り立つものである。すなわち、いわゆる一次粉砕に適用される方程式である。

次に、成分 A についての単体分離度 $\psi_A(x)$ は x_A についての積分式によって求められる。

$$\psi_A(x) = \int_x^\infty f_{A0}(x_A) \frac{(x_A - x)^3}{x_A^3} dx_A \quad \dots\dots\dots (12)$$

この式の意味するところは、粉砕産物粒度が十分に小さければ単体分離度が 1 に近づき、逆に粉砕粒度が大きくなると単体分離度が低下することである。原則的に着目成分の粒度に比べて粉砕粒度を小さくしなければ単体分離が困難になることは周知の事実であり、その関係が比例的であることもまた容易に推測される。

図 2 は元鉱石中の成分 A の粒度分布を対数正規分布と仮定した場合の粉砕粒度に対する単体分離度である。単体分離度は、成分 A の代表粒径 x_0 と粉砕粒度との比率によって決定される関数

図2 粉砕粒度と単体分離度の関係

図3 粉碎粒度と単体分離度の関係(分布幅の異なる場合)

と見なすことができるので、成分 A の代表粒径が小さくなるにつれて単体分離が困難になる。

一方、成分 A の粒度分布の分散に関しては単体分離度には比較的影響が小さい。図 3 の(a)に示すように成分 A の粒度分布の分散がかなり異なっている、同図(b)に示すように、単体分離度はそれほど変わっていない。したがって、鉱物の単体分離を考える際には元鉱石中の着目成分の代表粒径を慎重に推量しなければならず、その分散に関してはそれほど重視する必要はない。

一般的に選鉱対象となる鉱物の元鉱石中での代表粒度は、およそ $100\mu\text{m}$ から 1mm 程度の範囲にあるものと推測され、それ以下の微晶質の鉱石に対しては通常の粉碎-分離工程では単体分離が殆んど期待できない。

3・2 片刃粒子の単体分離確率

単体分離を加味した粉碎モデルを構築するには、片刃粒子の粉碎によってどの程度単体分離した粒子が生成されるかを知らなければならない。そこで、粒度 x_0 の粒子を粉碎する場合を考える。この粒子は片刃でなければならない。また、片刃粒子と単体分離粒子とを別に取り扱うモデルでは、単体分離された粒子と片刃粒子には異なった処理が行われなければならない。例えば、粉碎関数の異なる 2 成分系の粉碎を考える場合に、単体分離された 2 成分と片刃成分について個別の粉碎特性を与えるようにする必要がある。無論、片刃成分についても片刃度によって粉碎特性が異なるとも考えられるので、さらに片刃度ごとの粉碎特性を与えることも可能ではあるが、ここでは単純化して片刃粒子と単体分離粒子とに分けて考えることにする。

粒度 x_0 に粉碎された片刃粒子に成分 A の粒度 x_A の一個粒子の一部または全部が含まれているとすると式(13)または式(14)が成り立つ。すなわち、元鉱石から任意に切り出した粒度 x_0 の粒子に成分 A の粒度 x_A の粒子の一部が含まれていて、しかも単体分離された成分 A の粒子ではない確率、すなわち片刃粒子である確率 $E_0(x_A, x_0)$ は、 $x_0 < x_A$ の範囲では、

$$E_0(x_A, x_0) = P_A f_{A0}(x_A) \frac{(x_A + x_0)^3}{x_A^3}$$

図4 砕料の粒度を考慮した単体分離モデルの概念

図5 砕料の粒度を考慮した単体分離の範囲

$$\begin{aligned} -P_A f_{A0}(x_A) \frac{(x_A - x_0)^3}{x_A^3} &= P_A f_{A0}(x_A) \left\{ \frac{6x_A^2 x_0 + 2x_0^3}{x_A^3} \right\} \\ &= P_A f_{A0}(x_A) \frac{2x_0}{x_A} \left\{ 3 + \left(\frac{x_0}{x_A} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

となる。また、 $x_0 \geq x_A$ なら、単粒子分離はあり得ないのだから、必ず粒度 x_A の粒子をすべて含むことになり、式(13)の第 2 項は無くなり、

$$E_0(x_A, x_0) = P_A f_{A0}(x_A) \left(1 + \frac{x_0}{x_A} \right)^3 \dots\dots\dots (14)$$

となる。

さて、次に粒度 x_0 の片刃粒子から粒度 x の単体分離された粒子を切り出すことを考える。図 4 において、A が成分 A の粒子とする。B がそこから切り出された片刃の粒子で、C が B から切り出される粒子とする。C が B から切り出された粒子で、かつ成分 A のみから成る確率、すなわち A の単体分離された粒子になる確率を求める。ここで、D も B から切り出された粒子ではあるが、所定の粒度にはならないので除外すると考えることにする。すると、図 5 に示すように、C の中心点は B の内部の a の領域にあるもののみが A の単体分離された粒子になる。また、b の領域にあるものは片刃または A 以外の成分で構成される。c の領域に中心を置く粒子は、前述のように C の粒子径にはならないので、a と b の領域のみが B から切り出された粒子 C の中心点が存在し得る範囲となる。

以降暫く方程式を分かりやすくするために、粒子径を用いず粒子半径によって説明を続ける。A, B, C の粒子半径をそれぞれ r_A, r_0, r とする。C が A の単体分離された粒子となるためには、C の中心は A の中心から半径 $r_A - r$ より内側になければならない。同時に、C が B から切り出された粒子であるためには、C

の中心は B の中心から半径 $r_0 - r$ より内側になければならない。粒子は球であると仮定しているので、 B の中心が A の中心から x_0 離れている場合に、 B から切り出された粒子 C が A の単体分離された粒子となる確率 $E_1(x_0, r_A, r_0, r)$ は、 a の体積を $a + b$ の体積で除したものとなる。

$$E_1(x_0, r_A, r_0, r) = \frac{V_a}{V_a + V_b} = \frac{\int_{x_0 - (r_0 - r)}^{x_C} \pi \{ (r_0 - r)^2 - (x_0 - x)^2 \} dx}{\frac{4}{3}\pi(r_0 - r)^3 + \int_{x_C}^{r_A - r} \pi \{ (r_A - r)^2 - x^2 \} dx} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 x_C は半径 $r_A - r$ の円と x_0 を中心とした半径 $r_0 - r$ の円の交点の x 座標であり、

$$(r_A - r)^2 - x_C^2 = (r_0 - r)^2 - (x_0 - x_C)^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

である。ここで式を簡略化するために次のように置く。

$$R_A = r_A - r \\ R_0 = r_0 - r \quad \dots\dots\dots (17)$$

すると式(15)の V_a は、

$$V_a = \pi \int_{x_0 - R_0}^{x_C} \{ R_0^2 - (x_0 - x)^2 \} dx + \pi \int_{x_C}^{R_A} (R_A - x^2) dx \quad \dots\dots\dots (18)$$

となり、式(16)は、

$$R_A^2 - x_C^2 = R_0^2 - (x_0 - x_C)^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\therefore x_C = \frac{R_A^2 - R_0^2 + x_0^2}{2x_0} \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。 x_C を代入して積分式(18)を解くと、

$$V_a = \frac{\pi}{12x_0} \{ x_0^4 - 6x_0^2(R_0^2 + R_A^2) + 8x_0(R_0^3 + R_A^3) - 3(R_0^4 - R_A^4) \} \quad \dots\dots\dots (21)$$

となり、

$$E_1(x_0) = \frac{V_a}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} = \frac{3}{48\pi x_0 R_0^3} \{ x_0^4 - 6x_0^2(R_0^2 + R_A^2) + 8x_0(R_0^3 + R_A^3) - 3(R_0^4 - R_A^4) \}, (x_0 > r_0 - r_A) \quad \dots\dots (22)$$

となる。ただし、この式は $x_0 > r_0 - r_A$ で成立する。 $R_A > R_0$ 、すなわち $r_A > r_0$ なら $r_0 - r_A$ は負になり、 x_0 は正であるので、この式は常に成立する。それに対して、 $r_A \leq r_0$ では、粒子 A が粒子 B 内に入る場合があるので、 $r_0 - r_A \geq x_0 \geq 0$ では、

$$E_1(x_0) = \frac{\frac{4}{3}\pi R_A^3}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} = \frac{R_A^3}{R_0^3}, (x_0 < r_0 - r_A) \quad \dots\dots (23)$$

となる。

次に、 A 内に粒子 B の全部または一部が存在するので、 x_0 の取り得る確率を乗じて積分を行い、 A 内全体における確率を求める。すなわち B の中心がある位置についての積分を行い、 C が A の単体分離をした粒子になる確率を求める。 $R_A > R_0$ 、すなわち $r_A > r_0$ 、である場合には、図6に示すように B の取り得る範囲は $R_A - R_0$ から $R_A + R_0$ 、すなわち $r_A - r_0$ から $r_A + r_0 + 2r$ のドーナツ状の範囲になる。ただし、ここでは球体を考えるので、ドーナツ状というのは不適当な表現で、厳密には同心球面の間の領域というべきかもしれない。一方、図7に示すように、 $R_A \leq R_0$ 、すなわち $r_A \leq r_0$ 、である場合には、 B の取り得る範囲は 0 から $R_A + R_0$ までである。よって、粒子半径 r_A の A から切り出された半径 r_0 片刃の粒子 B から切

り出される半径 r の粒子が A の要素のみからなる確率 $E_2(r_A, r_0, r)$ は次の積分式で表される。

$$E_2(r_A, r_0, r) = \begin{cases} \frac{\int_{R_A - R_0}^{R_A + R_0} 4\pi x_0^2 E_1(x_0) dx}{\int_{R_A - R_0}^{R_A + R_0} 4\pi x_0^2 dx}, & (R_A > R_0) \\ \frac{\int_{R_0 - R_A}^{R_A + R_0} 4\pi x_0^2 E_1(x_0) dx + \int_0^{R_0 - R_A} 4\pi x_0^2 E_0(x_0) dx}{\int_0^{R_A + R_0} 4\pi x_0^2 dx}, & (R_A \leq R_0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (24)$$

この積分式を解くと、

$$E_2(r_A, r_0, r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3R_0 R_A}{R_0^2 + 3R_A^2} \right\}, & (R_A > R_0) \\ \frac{R_A^3}{(R_0 + R_A)^3}, & (R_A \leq R_0) \end{cases} \quad \dots\dots (25)$$

となるので、式(17)による置換を元に戻して、

$$E_2(r_A, r_0, r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3(r_0 - r)(r_A - r)}{(r_0 - r)^2 + 3(r_A - r)^2} \right\}, & (r_A > r_0) \\ \frac{(r_A - r)^3}{(r_A + r_0 - 2r)^3}, & (r_A \leq r_0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (26)$$

が得られる。なお $r_0 > r$ でなければならないことは定義より明

図6 片刃粒子 B の中心のとり得る範囲 ($A > B$ の場合)

図7 片刃粒子 B の中心のとり得る範囲 ($A < B$ の場合)

らかである。ここで粒子半径を粒子径に変換すると次式になる。

$$E_2(x_A, x_0, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3(x_0 - x)(x_A - x)}{(x_0 - x)^2 + 3(x_A - x)^2} \right\}, & (x_A > x_0) \\ \frac{(x_A - x)^3}{(x_A + x_0 - 2x)^3}, & (x_A \leq x_0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで求められた確率 E_2 は、粒子径 x_0 の粒子 B が成分 A の粒径 x_A の粒子 A の一部または全部を含む片刃粒子であり、かつ A のみで構成される粒子径 x の単体分離粒子 C を切り出すことが可能である場合に、単体分離粒子 C を生成する確率である。そこで、粒子径 x_0 の粒子 B がこの条件を満たす確率は、成分 A の含有率と元鉱石中での粒度分布および粒子径 x_0 と粒子径 x に依存する関数であり次式で与えられる。

$$E_0(x_A, x_0, x) = \begin{cases} P_A f_{A0}(x_A) \frac{2(x_0 - x)}{x_A^3} \{ 3(x_A - x)^2 + (x_0 - x)^2 \}, & (x_A > x_0) \\ P_A f_{A0}(x_A) \left(1 + \frac{x_0 - 2x}{x_A} \right)^3, & (x_A \leq x_0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (28)$$

この式は、式(13)、式(14)の拡張であり、粉砕後の粒度を考慮した式である。したがって、粒子径 x_0 の粒子が粉砕されて、粒径 x_A の成分 A のみからなる粒子径 x の単体分離粒子が生成される確率 E_{A1} は $E_0 E_2$ で求められる。

$$E_{A1}(x_A, x_0, x) = \begin{cases} P_A f_{A0}(x_A) \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_A} \right)^3 - \left(1 - \frac{x_0}{x_A} \right)^3 \right\}, & (x_A > x_0) \\ P_A f_{A0}(x_A) \left(1 - \frac{x}{x_A} \right)^3, & (x_A \leq x_0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (29)$$

最後に成分 A の粒径 x_A についての積算を行うことにより、任意の粒子径 x_0 の粒子を粉砕して粒子径 x の粒子を生成したときに単体分離される確率が得られる。

$$\begin{aligned} E_A(x_0, x) &= \frac{1}{1 - \sum_j P_j \psi_j(x_0)} \int_x^\infty E_{A1}(x_A, x_0, x) dx_A \\ &= \frac{1}{1 - \sum_j P_j \psi_j(x_0)} \left[\int_{x_0}^\infty P_A f_{A0}(x_A) \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_A} \right)^3 - \left(1 - \frac{x_0}{x_A} \right)^3 \right\} \right. \\ &\quad \left. dx_A + \int_x^{x_0} P_A f_{A0}(x_A) \left(1 - \frac{x}{x_A} \right)^3 dx_A \right] \\ &= \frac{P_A}{1 - \sum_j P_j \psi_j(x_0)} \left\{ \int_x^\infty f_{A0}(x_A) \left(1 - \frac{x}{x_A} \right)^3 dx_A \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_0}^\infty f_{A0}(x_A) \left(1 - \frac{x_0}{x_A} \right)^3 dx_A \right\} \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

この方程式で $P_j \psi_j(x_0)$ は粒度 x_0 における各成分ごとの単体分離割合である。すなわち、片刃粒子の割合は全体から既に単体分離されているものを取り除いた残りであり、この値で正規化することによって、片刃粒子だけから成る粒度 x_0 の粒子を粉砕によって粒度 x にしたときの単体分離度が得られることになる。他の成分についても同様の式で、粉砕過程での単体分離度が求められる。さらに、この方程式は次のように整理される。

$$E_A(x_0, x) = \frac{P_A \{ \psi_A(x) - \psi_A(x_0) \}}{1 - \sum_j P_j \psi_j(x_0)} \quad \dots\dots\dots (31)$$

煩雑な誘導の結果得られた式は、極めて単純化されたものであった。この式の意味するところは、粉砕によって得られる粒度 x の単体分離割合から粉砕前の粒度 x_0 での単体分離割合を引いた

ものを粒度 x_0 での片刃粒子の割合で正規化したものが、粒度 x_0 の片刃粒子を粒度 x に粉砕したときの単体分離率となることである。

また、もし元鉱石中の各成分ごとの粒度分布が同じである場合には次式が成り立つ。

$$E_A(x_0, x) = \frac{P_A \{ \psi(x) - \psi(x_0) \}}{1 - \psi(x_0)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

一般的に、元鉱石中の各成分の粒度分布はそれほど明確に捉えられてはいないので、これを一定と見なすことができる、または一定とせざるを得ない場合が多いと思われるので、この式の実用的な価値は高い。

3・3 単体分離度の近似式

本稿で提案する単体分離を考慮した粉砕モデルを用いるには、式(31)または式(32)に式(12)を代入し、元鉱石中の各成分の粒度分布 $f_{A0}(x_A)$ を用い、粉砕過程での単体分離粒子の生成確率を求める。さらに粉砕マトリクスで用いる各粒度区分ごとの平均的な確率を算出することによって式(6)～(10)に示した単体分離を考慮した粉砕モデルとなる。

ところで、この積分方程式は粒度分布が入っている定積分で、何らかの粒度分布関数を与えて解析解を得ることができる場合もあるが、少なくとも対数正規分布では解析解は得られない。したがって、粉砕回路のシミュレーションでは離散的な粒度区分を用いていることもあり、数値解を用いるのが妥当である。

ここで、この関数をより実用的に使うために、粒度分布関数を対数正規分布として近似式を提示する。

元鉱石中の成分 A の粒度分布 $f(x_A)$ が、

$$f(x_A) = \exp \left\{ - \left(\frac{\ln(x_A) - \ln(x_{A0})}{\ln(\sigma_A)} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

なる平均 x_{A0} 、分散 σ_A の対数正規分布で与えられる場合に、任意の粉砕粒度 x における単体分離度 $\psi(x)$ は

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_x^\infty f(x_A) \left(1 - \frac{x}{x_A} \right)^3 dx_A \\ &= \int_x^\infty \exp \left\{ - \left(\frac{\ln(x_A) - \ln(x_{A0})}{\ln(\sigma_A)} \right)^2 \right\} \left(1 - \frac{x}{x_A} \right)^3 dx_A \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。

さらに、この積分方程式を数値的に取り扱いやすくするために次式の関数で近似する。

$$\psi(x) \approx \left\{ 1 + \exp \left(\frac{\ln(x) - \ln(x_{A0})}{\ln(a)} \right) \right\}^{-b} \quad \dots\dots\dots (35)$$

この関数は、ロジスティック分布を若干修正した形式であり、近似関数として適していると思われる。ここで、係数 a および b は次の経験式で与えると比較的良好一致が得られる。

$$\begin{aligned} a &= 0.55\sigma_A + 1.6 \\ b &= 5.0/\sigma_A + 1.5 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (36)$$

図8 単体分離度の近似関数の誤差

図9 単体分離率の一例

図8は近似関数と数値解との誤差を示したもので、通常の粒度分布によく現れる標準偏差が1.5~4の範囲では最大誤差は0.02以下であり、式(34)と式(35)によって描かれる曲線はほぼ完全に一致する。

そこで、この単体分離率 $\Psi(x)$ の近似関数を用いれば、各成分ごとの単体分離率 $E_A(x_0, x)$ を容易に求めることができる。例えば、元鉱石中の各成分ごとの粒度分布が同じで、50% 粒度 $1,000 \mu\text{m}$ 、標準偏差 2.0 の対数正規分布に従うとき、片刃粒子の粒度 x_0 をパラメータとして粉砕粒度 x に対する各成分の含有率で正規化した単体分離率 $E_A(x_0, x)/P_A$ は図9のようになる。したがって、この $E_A(x_0, x)/P_A$ に各成分の含有率 P_A を乗ずることによって、各成分ごとの単体分離率 $E_A(x_0, x)$ を得ることができる。

4. 考察

上記のようなモデルによって複数の成分からなる碎料についての単体分離を考慮した粉砕モデルが構築される。その妥当性については前述の通りであるが、前提とした仮定について若干の問題点があるのでここで考察し、今後の展開の可能性を示したい。

まず、この単体分離粉砕モデルの前提は、粒子の切り出し、すなわち粉砕が完全に均一に起きるという仮定である。実際には、インパクトクラッシャなど粒間破壊が支配的な粉砕機もあるので、そのような場合にはこのモデルは適当ではない。定性的には、粒間破壊が起きる場合には単体分離率は本モデルよりも向上すると考えられる。ただし、通常の粉砕機では粒間破壊のみが起きるのではなく、粒内破壊と並列的に粉砕が行われるので本モデルはある程度修正することで対処できるものと思われる。

また、片刃粒子を一括して取り扱っている点にも改善の余地があると思われる。将来的には片刃度別の取り扱いを実現することが望まれる。例えば、浮選工程では泡への鉱物の吸着特性によって分離が行われるのであるが、現時点での浮選モデルでは完全な単体分離を前提としたモデルになっており、論理的な片刃度の取り扱いは考慮されていない。すなわち、片刃度が浮選効果に影響する要因は鉱粒表面に露出している成分の割合および分布であり、成分率としての片刃度だけでは浮選効果を厳密に規定することはできない。そこで、実験的に得られる浮選速度定数の分布を用いた検討が行われることもあるが、これは論理的解析とはいえない。

したがって、現実的には粉砕産物には片刃粒子が含まれており、浮選効果はそれぞれの粒子表面での優勢な成分によって支配されるはずである。浮選における片刃粒子の挙動のモデル化は浮選工程をより正確に表現するために有効なはずであるが、そのためには粉砕工程での片刃粒子の生成機構がモデル化されなければならない。これまでの浮選モデルで片刃粒子の取り扱いが保留されてきた理由は、単に片刃度の計測が困難であるということだけではなく、粉砕モデルの不備が原因とも考えられる。そこで片刃粒子を考慮できる粉砕モデルは分離工程のモデル化にも貢献するものと考えられる。

本稿で提案しているモデルを拡張するには、単に片刃粒子として一括して取り扱っているものを、成分の組み合わせと、何段階かの片刃度のレベルに分けた粒子群として個別に取り扱う方法が考えられる。例えば、脈石と2種類の有用鉱物からなる鉱石についての片刃の組み合わせは4種類、有用鉱物が3種類なら片刃は11種類となり、組み合わせが爆発的に増える問題があるが、片刃成分ごとの粉砕性をより厳密に捉えるという観点からは有用かもしれない。さらに、片刃度別の取り扱いについても同様な有効性が期待できると思われる。

5. 結 言

本研究で提案した単体分離モデルは、元鉱石中の各成分の粒度分布および含有率に基づいて、そこから切り出される粒子が片刃になる確率と、その片刃粒子から切り出される粒子が単体分離された粒子になる確率を球形粒子を仮定して求めたものである。

さらにこの単体分離モデルを用いて、単体分離された粒子と片刃粒子とを個別に取り扱うことのできる粉砕モデルを提案し、成分別の粉砕性の導入や粉砕による片刃粒子から単体分離された粒子への移行を考慮できるようにした。

また、単体分離モデルの方程式を簡略化して実用性を求めるために、各成分の粒度分布が対数正規分布に従うものとした場合の近似式も提案した。

今後の課題としては、片刃粒子の成分別、片刃度別の取り扱いが期待される。

引 用 文 献

- Gaudin, A. M. (1939): Principles of mineral dressing, McGraw-Hill, N. Y., p. 70-91
- Weigel, R. L. and Li, K. (1967): Trans. Soc. Min. Eng. AIME, p. 59-88
- Weigel, R. L. (1976): Trans. AIME, Vol. 260, p. 147-152
- King, R. P. (1979): Int. J. Miner. Process., No. 6, p. 207-220
- Kiss, L. and Shoenert, K. (1980): Aufbereitungs Technik, No. 5, p. 223-230
- Klimpel, R. R. and Austin, L. G. (1983): Powder Technol., Vol. 34, p. 121-130
- Meloy, T. P. (1984): Int. J. Miner. Process., No. 13, p. 313-324
- Meloy, T. P. and Gotoh, K. (1985): Int. J. Miner. Process., No. 14, p. 45-55
- Peterson, R. D. and Herbst, J. A. (1985): Int. J. Miner. Process., No. 14, p. 111-126
- 朴在九 (1988): 「粉砕ならびに単体分離に関する研究」, 東京大学工学部博士論文, p. 15-22