多亀裂問題の亀裂進展解析への 応力補償変位不連続法の適用*

佐藤 晃¹ 鈴木 康正²
深堀 大介³ 菅原 勝彦⁴

Application of Stress Compensation - Displacement Discontinuity Method (SC-DDM) to The Crack Propagation Analysis of Multi-crack Problem

by Akira SATO^a, Yasumasa SUZUKI^b,

Daisuke FUKAHORI^c and Katsuhiko SUGAWARA^c

a. Faculty of Engineering, Kumamoto University, 2-39-1, Kurokami, Kumamoto, 860-8555, Japan (Corresponding author: E-mail asato@alpha.msre.kumamoto-u.ac.jp)

b. Tokyo Electric Power Service Co., Ltd.

c. Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University

The rock mass properties such as deformability and strength are highly dependent on the existence of cracks. The crack propagation directly influences the decrease of effective Young's modulus and rock mass failure, and the analysis of crack propagation is indispensable for the evaluation of mass properties.

In this study, crack propagation analysis was conducted by applying SC-DDM (stress compensation-displacement discontinuity method) to the two-dimensional multi-crack model. Since it is difficult to consider mechanical interaction between all cracks which has arbitrary arrangements, the homogenization method was introduced in the analysis. The model, crack homogenization model, consists of infinite numbers of unit cells and each unit cell has the same crack distribution. Consequently, all cracks behave the same and the mechanical properties of the entire model can be estimated from the analysis of representative unit cell. Here, the alternative model of a single crack set is assumed. The procedure of crack propagation analysis was introduced and the optimization method of crack propagation angle was discussed. In this study, the accuracy of the analyses was verified through the evaluation crack propagation angle and crack profiles, then the characteristics of the crack propagation analysis was discussed. It was proved that the results have enough accuracy and that this method is suitable for the crack propagation analysis. It was also found that this model has a peak strength during crack propagation process, and the relation between loading angle and crack propagation stress was discussed.

KEY WORDS : Crack Propagation, Multi-Crack Set, Rock, SC-DDM, Fracture Mechanics

1. 緒 言

岩盤のように内部に多数の亀裂を有する材料の場合、その力学的挙動は亀裂セット(ほぼ同じ方向を持つ亀裂の集合)の数や性状、あるいは岩盤の応力状態に大きく依存している。さらに、岩盤内部の亀裂の進展は岩盤マスの有効ヤング率の低下あるいは破壊などに直接影響するため、亀裂相互の力学的干渉の影響を考慮した上で亀裂進展挙動を解明することは、岩盤マスの特性を評価する上で必要不可欠である。これまで、圧縮応力下における亀裂進展については、主に室内実験によって亀裂の進展の様子が明らかにされてきた。例えば、Braceら¹⁾あるいはHoek²⁾らはガラス板に存在する平面亀裂の亀裂進展について論じ、1軸圧縮応力下で亀裂が境界まで進展し得ることを示した。同じように Nemat-

Nassarら³⁾、Horiiら⁴⁾は樹脂製プレート内部に複数のスリットを作成し、圧縮応力下における亀裂の進展挙動を室内実験により明らかにするとともに、亀裂進展に伴う応力拡大係数を分析している。さらに、Germanovichら⁵⁾は樹脂中に円盤状亀裂を作成し、圧縮応力下での亀裂の進展を可視化するとともに、数値解析により応力拡大係数ならびに円盤状亀裂周辺の応力状態の分析を行っている。しかし、実際の岩盤の場合にはこれらの研究で用いられているモデルよりも亀裂の密度は高く、これらの力学的干渉の影響を考慮した上で亀裂進展解析を行う必要がある。

そこで本研究では、多数の亀裂を含む2次元モデルを用いて開口亀裂問題の亀裂進展解析を実施する。ただし、任意の亀裂配置での亀裂相互の力学的干渉をすべて考慮するのは困難であることから、ここでは亀裂問題に均質化法⁶⁾を導入し、平川ら^{7,8)}が示した応力補償変位不連続法(Stress Compensation-Displacement Discontinuity Method, 以下 SC-DDM と称す)を適用して亀裂進展解析を実施する。均質化法の概念に基づいて構築される亀裂均質化モデルでは、微視的な構造の特性はユニット・セルと呼ばれる代表体積要素により表現され、巨視的な構造はユニット・セルの集合体であるとして、

* 2004年2月18日受付 7月30日受理

1. 普通会員 博士(工学) 熊本大学助手 工学部環境システム工学科

2. 東電設計(株)

3. 熊本大学大学院 自然科学研究科 博士後期課程

4. 普通会員 工博 熊本大学教授 自然科学研究科

[著者連絡先] FAX 096-342-3694(熊本大・佐藤)

E-mail: asato@alpha.msre.kumamoto-u.ac.jp

キーワード: 亀裂進展, 多亀裂セット, 岩石, SC-DDM, 破壊力学

その力学的性質や挙動が解析される。また、SC-DDMは変位不連続法⁹⁾を基本にした複合解析法であり、このモデル内の亀裂の応力拡大係数やモデル全体の变形特性などの解析に有効な方法である^{7,8,10)}。本研究では、圧縮応力下における亀裂均質化モデルの亀裂進展解析法を示し、解析結果の精度を検証する。さらに、亀裂先端の応力拡大係数あるいは本モデル内の巨視的な応力とひずみの関係の評価結果などから、亀裂進展時の多亀裂モデルの力学的特徴を分析する。

2. 亀裂進展方向および亀裂進展応力の評価法

2・1 亀裂均質化モデル

複数の亀裂の相互干渉を解析するために、平川ら^{7,8)}および佐藤ら¹⁰⁾が用いた亀裂均質化モデルを採用する。すなわち、無限弾性体中に存在する亀裂分布を均質化して表現する。ここで、Fig.1(a)のように直角座標系(x, y)を定め、座標軸に平行な辺をもつ四角形の弾性体のユニット・セルABCDの内部で亀裂分布が既知であるものとする。そして、これが岩盤モデルを代表する要素であるとし、岩盤全体をFig.1(b)に示すようにユニット・セルの無限集合として表現する。言い換えると、ユニット・セルによって無限に続く岩盤を分割し、いずれのユニット・セルにおいても亀裂分布が等しいと仮定する。本研究では、ユニット・セル中央に初期亀裂長さ $2a_0$ の開口亀裂がx軸と平行に一つだけ含まれる単一開口亀裂セットを用いるものとする(Fig.1(a))。また、ユニット・セルは幅 $2w$ 、高さ $2h$ であり、ユニット・セルは千鳥状に配列する千鳥配列モデルを考える(Fig.1(b))。なお、本亀裂均質化モデルの詳細については平川ら^{7,8)}および佐藤ら¹⁰⁾の論文を参照されたい。

2・2 亀裂先端の応力拡大係数

亀裂均質化モデルに負荷応力 $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}$ が作用する場合を考える。このとき、平川ら^{7,8)}が示したように亀裂先端の応力拡大係数 $\{K\} = \{K_I, K_{II}\}^T$ は、無次元係数 $\eta_{xx}, \eta_{yy}, \eta_{xy}, \rho_{xx}, \rho_{yy}, \rho_{xy}$ を用いて次のように表記できる。

$$K_I = (\eta_{xx}\sigma_{xx} + \eta_{yy}\sigma_{yy} + \eta_{xy}\sigma_{xy}) \cdot \sqrt{\pi a_0} \quad (1)$$

$$K_{II} = (\rho_{xx}\sigma_{xx} + \rho_{yy}\sigma_{yy} + \rho_{xy}\sigma_{xy}) \cdot \sqrt{\pi a_0} \quad (2)$$

(a) A unit cell ABCD of square containing single crack.

(b) Alternative arrangement of unit cells.

Fig.1 Homogenization of multi crack sets.

平川ら^{7,8)}は先に述べた亀裂均質化モデルにSC-DDMを適用し、具体的に無次元係数 $\eta_{xx}, \eta_{yy}, \eta_{xy}, \rho_{xx}, \rho_{yy}, \rho_{xy}$ を評価する方法を提案し、さらに、これらの無次元係数を精度よく評価する条件について検討している。これらの詳細については平川ら⁷⁾の論文を参照されたい。

さて、負荷応力 $\{\sigma\}$ の主応力成分を $\{\sigma_p, \sigma_Q\}$ とすると、式(1)および式(2)で与えられる応力拡大係数は、主応力座標系に変換して次のように表記することができる。

$$K_I = \Phi_I \sigma_p \sqrt{\pi a_0}, \quad K_{II} = \Phi_{II} \sigma_p \sqrt{\pi a_0} \quad (3)$$

ただし、 Φ_I および Φ_{II} は亀裂長さ、ユニット・セルの幅 $2w$ と高さ $2h$ 、ユニット・セルの配列といったモデルパラメータおよび応力比によって決定される無次元係数である。ただし、以下では応力比を $\kappa = \sigma_Q / \sigma_p$ と定義する。なお、亀裂均質化モデルの千鳥配列の特徴から亀裂両端の応力拡大係数は全ての亀裂で等しい。

2・3 亀裂進展角度

亀裂均質化モデルに無限遠から一様な負荷応力 $\{\sigma\}$ が作用するとき、亀裂先端にはモードIとモードIIの負荷が同時に作用する混合モード負荷問題が発生する。混合モード負荷における亀裂進展基準に関しては、すでにいくつかの理論的研究があるが、本研究では最大周方向応力基準¹¹⁾を採用する。この最大周方向応力基準は、亀裂先端における周方向の応力成分 σ_θ が最大となる方向に微小亀裂が進展すると仮定するものであり、亀裂先端の応力分布に依拠して、亀裂進展角度、ならびに微小亀裂の進展に必要な亀裂先端の応力拡大係数 $\{K_I, K_{II}\}$ の関係が定められる。亀裂先端に原点を持つ極座標系をFig.2のように示すと、この極座標系(r, θ)の周方向応力 σ_θ とせん断応力成分 $\tau_{r\theta}$ は次式で与えられる。

$$\sigma_\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left\{ K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left\{ K_I \sin\theta + K_{II} (3\cos\theta - 1) \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5)$$

ここで、純粋なモードI負荷の場合には、 $\theta=0$ の方向で σ_θ が最大値をとり、 $\tau_{r\theta}=0$ である。この純粋なモードIの破壊条件は、破壊靱性値を K_{ICpure} とすると次のように書ける。

$$\sigma_{\theta \max} = \frac{K_{ICpure}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (6)$$

これと同じように、混合モード負荷の場合にも亀裂が進展する方向 $\theta=\beta$ で周方向応力 σ_θ が最大値をとり、せん断応力成分 $\tau_{r\theta}$ は零となるので、式(4)および式(5)より、次に示す関係が得られる。

$$K_I \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin\beta = \frac{K_{ICpure}}{\cos(\beta/2)} \quad (7)$$

$$K_I \sin\beta + K_{II} (3\cos\beta - 1) = 0 \quad (8)$$

この式(7)および式(8)から、微小亀裂が進展する角度 β と応力拡大係数 K_I と K_{II} の関係が得られる。式(8)を β について解くと次のようである。

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{K_I}{K_{II}} \mp \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \frac{K_I}{K_{II}} > 0 \\ \frac{K_I}{K_{II}} < 0 \end{array} \right) \quad (9)$$

よって本解析では、式(9)の関係式から亀裂進展角度 β を決定し、

Fig.2 Coordinate system at crack tip.

亀裂先端から β 方向に微小亀裂が進展するものとする。この微小亀裂を逐次進展させる要素分割法については後述する。

また、最大周方向応力基準により、微小亀裂が進展する時の負荷応力の大きさを求めることができる。いま、無限弾性体中に長さ $2a_0$ の開口亀裂が存在し、これにモード I の負荷を作用させた場合を考える。以下では、この問題を基本問題と称することにする。この基本問題において、亀裂進展開始応力を σ_{single} とすると、 σ_{single} は次式で表される。

$$\sigma_{\text{single}} = \frac{K_{\text{ICpure}}}{\sqrt{\pi a_0}} \quad (10)$$

ここで、式 (7), (8) の満たす亀裂進展時の応力拡大係数 $\{K_I, K_{II}\}$ はそれぞれ K_{ICpure} に比例するので

$$K_I = \alpha_I \cdot K_{\text{ICpure}} \quad (11)$$

と表記でき、式 (3) より以下の関係が導かれる。

$$\sigma_p = \frac{\alpha_I \cdot K_{\text{ICpure}}}{\Phi_I(\kappa) \sqrt{\pi a_0}}, \quad \sigma_Q = \kappa \cdot \sigma_p \quad (12)$$

さらに、式 (12) で求められる亀裂均質化モデルの亀裂進展応力 σ_p を、基本問題の破壊応力 σ_{single} で正規化すると、式 (13) が得られる。

$$\bar{\sigma}_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_{\text{single}}} = \frac{\alpha_I}{\Phi_I(\kappa)}, \quad \bar{\sigma}_Q = \kappa \cdot \bar{\sigma}_p \quad (13)$$

すなわち、亀裂均質化モデルに SC-DDM を適用することにより亀裂先端の応力拡大係数を求め、亀裂進展角度 β が求められれば、式 (13) の関係から本解析モデルの亀裂進展開始応力を求めることができる。

3. 亀裂進展解析法

3・1 要素分割法

応力補償変位不連続法による亀裂進展解析方法について述べる。本研究では、式 (9) の関係から求められる亀裂進展角度である β 方向に、長さ 2Δ の変位不連続要素を亀裂両端に 2 個ずつ追加することにより亀裂の進展を表現する。次に、このようにして得られた新しい亀裂モデルに対して一連の解析を実施する。以下、同様に亀裂先端の応力拡大係数ならびに亀裂進展角度 β を求め、亀裂先端に再び変位不連続要素を追加する (Fig.3)。つまり、亀裂は長さ $2a_0$ の初期亀裂と要素を追加することにより得られた進展亀裂から成る。いま、要素の追加回数を i 、1 回の解析での追加要素長を da ($=4\Delta$)、片側の亀裂先端からの亀裂進展長さを χ とすると $\chi = i \times da$ であり、亀裂全長を $2a$ とすると、 $2a = 2(a_0 + \chi) = 2(a_0 + i \times da)$ と表される。

3・2 亀裂進展角度解析結果

上述の手順で亀裂均質化モデルの亀裂進展解析を実施した。解析結果のうち、例として亀裂進展長さ χ/a_0 と亀裂進展角度 β との関係を図 4 に示す。ただし、図の横軸は亀裂半長 a_0 で基準化している。この結果は、ユニット・セルの縦横比が $h/w = 0.5$ 、初期亀裂長さが $a_0/w = 0.6$ であり、 $\phi = 30^\circ (= \pi/6)$ の方向に巨視的に圧縮応力を負荷した場合の解析結果である。また、亀裂上の要素分割数を N とすると、ここでは初期亀裂上には $N = 100$ の変位不

Fig.3 Initial and propagated parts of crack simulated by displacement discontinuity elements.

続要素 ($2\Delta/w = 0.012$) を配置して亀裂を模擬した。なお、解析領域については平川ら^{7,8)}と同様のパラメータを用いて計算を実施した。また、以下では理解を簡単にするため、角度は度 (degree) を用いて表すものとする。

さて、この図から亀裂進展角度は巨視的には負荷応力の作用方向に収束している様子が分かる。しかし、Fig.4 に示すように、亀裂進展開始時および進展角度収束直前で亀裂進展に伴う亀裂進展角度 β の値が上下に変動しており、単調な変化を示していない。これは以下の理由によるものと考えられる。つまり、上述の方法で亀裂の進展を表現する場合、連続な亀裂進展を有限な長さを持つ変位不連続要素で分割することになる。しかし、式 (9) の関係から得られる周方向応力 σ_θ が最大となる方向 β に変位不連続要素を追加しても、要素追加後の亀裂先端が真の亀裂位置とは異なるためである。

この問題を解決する方法として、変位不連続要素をさらに小さくする方法が考えられるが、これはさらに大きな計算量と時間が必要になるため、有用な方法とはいえない。そこで、次節においては要素追加時の亀裂進展角度の最適化方法について検討する。

4. 亀裂進展角度の最適化方法

亀裂先端を中心とする新たな座標 (x', y') を定める (Fig.2)。ここで、求められた β は $x'=0$ において真の値であるが、 β 方向に変位不連続要素を追加した場合、要素先端において誤差を生じ、真の亀裂進展形状をうまく近似できない。そこで、先端要素における亀裂進展角度の最適化方法としてまず次の仮定を設ける。すなわち、亀裂進展に伴う局所的な亀裂進展角度の推移は 2 次関数で近似できるものと仮定する。

上述の仮定より、具体的にはそれぞれの段階で $(\chi, \beta) = (0, \beta_0), (da, b_0), (2da, c_0)$ を通るとすると

$$\beta = \frac{\chi(\chi-da)}{2(da)^2} c_0 + \frac{\chi(\chi-2da)}{-(da)^2} b_0 + \frac{(\chi-da)(\chi-2da)}{2(da)^2} \beta_0 \quad (14)$$

と表せる。ここで、 β_0, b_0, c_0 はそれぞれ $\chi=0, da, 2da$ における真の亀裂進展角度である。また、上式より $\chi=3da$ における (4 回目の要素追加時の) 亀裂進展角度

$\beta_{\text{exp}}^{(0)}$ は次のように表せる。

$$\beta_{\text{exp}}^{(0)} = \beta_0 - 3b_0 + 3c_0 \quad (15)$$

さて、亀裂進展解析は $\chi=0$ で β_0 が既知として実施され、 $\chi=da$ における次の亀裂進展角度を b' 、 $\chi=2da$ における次の亀裂進展角度を c' とする。角度 b' および c' が含む真の亀裂進展角度との差を $\Delta\epsilon_b$ および $\Delta\epsilon_c$ であるとするれば、真の亀裂進展角度との関係は以下のようなものである。

$$b_0 = b' + \Delta\epsilon_b, \quad c_0 = c' + \Delta\epsilon_c \quad (16)$$

Fig.4 Crack propagation angle by the direct analysis (no optimization).

これら β_0, b', c' の解析値を通る 2 次曲線は同じように $(\chi, \beta) = (0, \beta_0), (da, b_0, \Delta\epsilon_b), (2da, c_0, \Delta\epsilon_c)$ を通る 2 次関数として表すことができる。ここで、式 (15) の関係から $\chi=3da$ における亀裂進展角度を推定すると、推定値 $\beta_{\text{exp}}^{(1)}$ は次のようになる。

$$\beta_{\text{exp}}^{(1)} = \beta_0 - 3b' + 3c' = 3(c_0 - \Delta\epsilon_c) - 3(b_0 - \Delta\epsilon_b) + \beta_0 \quad \dots\dots (17)$$

一方、3 回の亀裂進展解析によって得られた $\chi=3da$ における解析値 $\beta_{\text{exp}}^{(2)}$ も同様に誤差 $\Delta\beta$ を有するものとする、次式が得られる。

$$\beta_{\text{exp}}^{(2)} = \beta_{\text{exp}}^{(1)} + \Delta\beta \quad \dots\dots (18)$$

ここで、 $\beta_{\text{exp}}^{(1)}$ (式 (17)) と $\beta_{\text{exp}}^{(2)}$ (式 (18)) 両者の差を ϵ とし、その 2 乗 ϵ^2 を求めると、

$$\epsilon^2 = (\beta_{\text{exp}}^{(1)} - \beta_{\text{exp}}^{(2)})^2 = (3\Delta\epsilon_b - 3\Delta\epsilon_c + \Delta\beta)^2 \quad \dots\dots (19)$$

であるので、 ϵ^2 を最小とするような $(\Delta\epsilon_b, \Delta\epsilon_c, \Delta\beta)$ の組み合わせを求め、最適な亀裂進展角度を評価する。

この最適化を実際の解析に適用した例を、Fig.5 の解析例を取り挙げて説明する。まず、亀裂進展解析を $\chi=3da$ まで行い、誤差を有する亀裂進展角度解析結果を得る。ここで、 $\chi=da$ における真の亀裂進展角度は、変動している範囲内 ($\beta_0 - c'$ 間) にあると予想し、 $\chi=da$ において以下に示す 3 つの修正進展角度 $b_i' (i=1, 2, 3)$ を考える (Fig.5)。

$$b_1' = \frac{\beta_0 + c'}{2}, \quad b_2' = \frac{b_1' + c'}{2}, \quad b_3' = \frac{b_1' + \beta_0}{2} \quad \dots\dots (20)$$

次に、 $\chi=da$ ではそれぞれの b_i' の角度に要素を追加し $\chi=3da$ まで解析を行い、新たな亀裂進展角度 $c_i' \beta_{\text{exp}}^{(2)}$ ($i=1, 2, 3$) を得る。次にこれら ($b_i', c_i' \beta_{\text{exp}}^{(2)}$) を用いて式 (19) で示した ϵ_i^2 を求める。ここで、 ϵ_i^2 が十分小さい値をとるならば、その時の b_i' を亀裂進展角度の最適解 b_0 と決定する。

いずれの b_i' に対しても十分に小さい ϵ_i^2 の値が得られなければ、次の方法をとる。まず、Fig.6 に示すように (b', ϵ^2) 空間にこれら

Fig.5 An example of optimization procedure of crack propagation angle (at the beginning of crack propagation).

Fig.6 Relation between residual and optimized crack propagation angle.

をプロットする。この 3 点を通る放物線を求め、この放物線の最小値を求める。このときの b' を b_1' とし、この値と最も近い b_i' を b_m' と書き換える。続いて、 $b_2' = (b_1' + b_m')/2$, $b_3' = (b_1' - b_m')/2$ となる値を求め、再び $\chi=da$ において b_1', b_2', b_3' 方向に要素を追加し、上述と同様に ϵ_i^2 を求める。この手順を順次 ϵ_i^2 が十分小さくなるまで実施し、そのときの $\chi=da$ における亀裂進展角度を最適解 b_0 とする。以下、次の段階では最適な亀裂進展角度 b_0 を β_0 と置き換え、順次亀裂進展解析を実施していく。

全ての亀裂進展角度について上述の最適化を実施した場合について亀裂進展長さ χ/a_0 と亀裂進展角度 β の関係を Fig.7 に示す。先に示した Fig.4 と比較して明らかなように、亀裂進展角度が荷重応力の作用方向にスムーズに収束しており、亀裂進展の様子をより適切に表現できていると判断できる。本研究では、上述の最適化が有効であるとし、以後紹介する解析結果は全て最適化を行ったものである。

5. 解析結果

5・1 解の収束性に関する考察

亀裂進展解析では亀裂先端に要素を追加しながら進展を表現することから、要素分割数が解析結果に大きく影響することが考えられる。そこで、解析結果と要素分割数 N との関係について検討する。モデルとしては $h/w=0.5$ ならびに 1.0 の 2 つを考え、一軸圧縮応力の作用方向は $\phi=30^\circ (= \pi/6)$ であるとする。また、いずれのモデルも初期亀裂長さは $a_0/w=0.6$ とする。ここでは、初期亀裂の要素分割数は $N=50, 100, 150, 200, 250$ の 5 通りについて検討する。まず、亀裂進展角度の解析結果について述べる。Fig.8 は各 N の値で計算した亀裂進展角度 β と、同じ亀裂長さ χ での $N=250$ の亀裂進展角度 $\beta_N=250$ との差をとり $\pi/2$ で基準化した量を縦軸にとっている。また、図中では $\chi/a_0=0.16, 0.32, 0.48, 0.64$ の位置について比較を行った。その結果、要素分割数 N の増加とともに明らかに解は収束しており、十分な精度を有していることが分かる。また、亀裂が進展していくにつれて誤差が小さくなる傾向が読み取れる。

次に、上述と同様の条件で解析を実施した結果得られた亀裂の進展形状を Fig.9 に示す。図は $h/w=0.5$ の場合の結果であり、図中の点の変位不連続要素の中心点を表している。また、本解析の特性上、亀裂進展解析は先端の要素がユニット・セルの内部にある範囲で実施した。この図に示すように、要素分割数 N の違いにより亀裂進展形状に大きな違いは見られない。また、 $N=250$ の計算結果のうち A の位置 ($\chi/a_0=0.24$) および B の位置 ($\chi/a_0=0.96$) と、 $N=50, 100, 150, 200$ それぞれの A の位置および B の位置との距離 d_A および d_B を求め、初期亀裂半長 a_0 で基準化した量を Fig.10 に示す。ここでは、同じ亀裂進展長さでの $h/w=1.0$ の結果も併せて示す。このように、 N の増加とともに d_A および d_B は一

Fig.7 Crack propagation angle after optimization. The results without optimization are also plotted for the sake of comparison.

Fig.8 Comparison of crack propagation angle depending on element number of initial crack ($a_0/w=0.6$). (a) $h/w=0.5$, (b) $h/w=1.0$

定値に収束していく傾向が読み取れる。また、亀裂半長を基準にした場合、 $N=150$ と収束値の差は0.5%程度である。したがって平川ら^{7,8)}が示したように、亀裂進展解析においても初期亀裂の要素分割数は $N=200$ 程度で十分な精度の解析が可能であることが確認できる。以下では、要素分割数を $N=200$ として解析を実施した。

5・2 亀裂進展形状に関する考察

単一亀裂に対して無限遠から一軸圧縮応力が作用する問題については、Nemat-Nassarら³⁾およびHoriiら⁴⁾がMuskhelishviliの応力関数を用いた積分方程式を数値的に解くことにより応力拡大係数を評価し、亀裂進展解析を実施している。無限弾性体中に存在する単一亀裂に $\phi=36^\circ (= \pi/5)$ から負荷応力が作用している場合について、本解析手法で得られた結果とHoriiら⁴⁾の解を併せてFig.11に示す。このように、亀裂進展直後はやや形状が異なる。特に、本解析の場合には亀裂進展直後は応力の作用方向に対して深い角度で進展している。この理由は以下によるものと考えられる。本研究で対象としているモデルでは、亀裂進展の過程で初期亀裂部分は常に開口している。そのため、圧縮応力に対して亀裂は開口し、さらに亀裂先端付近ではこの開口によりせん断が生じる。一方、Nemat-Nassarら³⁾およびHoriiら⁴⁾のモデルでは亀裂進展前の初期亀裂は閉合しており、初期亀裂のせん断に伴い初期亀裂先端から開口亀裂が進展する。しかし、初期亀裂は常に閉合しているため、初期亀裂の開口による亀裂先端付近でのせん断の発生はない。このような初期亀裂の閉口に伴うせん断の発生の有無により、Fig.11に示した違いが生じたものと考えられる。なお、筆者らは初期亀裂が閉合している場合の亀裂進展過程についても検討を行っているが、詳細については別の機会に議論する予定である。

5・3 応力とひずみの関係

亀裂均質化モデルのコンプライアンスを求める方法は平川ら⁸⁾が示しているが、本研究においても同様の手法でモデルのコンプライアンスを解析し、その結果から負荷応力方向のモデルの巨視的なひずみを求めることができる。また、式(13)の関係から亀裂進展

Fig.9 Comparison of crack propagation profile depending on the element number ($h/w=0.5$, $a_0/w=0.6$). (a) $N=50$, (b) $N=100$, (c) $N=150$, (d) $N=200$, (e) $N=250$

開始応力を求めることができることから、本亀裂均質化モデルの応力とひずみの関係を求めることができる。先に述べた $h/w=0.5$, $a_0/w=0.6$ なるモデルに対して、 $\phi=30^\circ (= \pi/6)$ の方向から一軸圧縮応力を負荷した場合の応力とひずみの関係を求めた結果をFig.12に示す。ただし、ここでは引張を正としている。この図に示すように、亀裂進展開始後の応力-ひずみ線図には、つぎのような特徴がある。すなわち、(1) 軸ひずみと負荷応力 σ_y の関係は見事な線形を示す。(2) 横ひずみはやや非線形を示し、やがて応力がピーク値をとると横ひずみの発生は顕著となる。(3) ピークを過ぎても、軸ひずみは依然として線形であり、応力の増加過程と同じ経路を逆に辿りながら、軸ひずみが減少する。このように、亀裂均質化モデルが軸方向に極めて著しい弾性を示すことがわかる。

5・4 亀裂進展と応力拡大係数との関係

亀裂進展にともなう応力拡大係数の変化をFig.13に示す。縦軸

Fig.10 Comparison of propagated crack position depending on the element number ($a_0/w=0.6$). (a) $h/w=0.5$, (b) $h/w=1.0$

Fig.11 Comparison of propagated crack profile.

の応力拡大係数は、均質化亀裂モデルの亀裂先端の応力拡大係数 $\{K_I, K_{II}\}$ を基本問題の応力拡大係数 K_{I0} で正規化したものである。また、図中には無限弾性体中に存在する単一亀裂に同様の応力が作用した場合について亀裂進展解析を実施した結果を併せて示す。まず、 K_{II} の値に注目すると亀裂進展開始後は K_I に比較して非常に小さい値をとる。つまり、亀裂均質化モデルの亀裂は近似的には Mode I の開口で進展していることになる。ただし、わずかに K_{II} が値を有することにより亀裂進展方向が変化していることになる。さて、 K_I に注目すると亀裂が進展開始した直後は単一亀裂モデルの K_I と同様に減少していることから、周囲の亀裂の影響を受けていないと考えられる。しかし、ある程度亀裂が進展すると、単一亀裂モデルの K_I は減少して零に収束していくのに対し、亀裂均質化モデルの場合は $\chi/a_0=0.42$ 付近で増加に転じる。その結果、式 (13) で示した関係より亀裂進展開始応力が $\chi/a_0=0.42$ 付近で最大値を取り (Fig.12), その後、減少することになる。

5・5 亀裂均質化モデルの亀裂進展形状

亀裂進展開始応力が最大になる時の亀裂進展位置を Fig.14 中に○印で示す。先に述べたようにこのときの亀裂進展長さは $\chi/a_0=0.42$ であり、亀裂進展の初期の段階で応力とひずみの関係はピークを迎える点に特徴がある。さらに Fig.7 より、 $\chi/a_0=0.42$ の位置は亀裂の進展方向が負荷応力方向に収束し始める位置であるとみなすことが出来る。Fig.14 中には比較のため無限弾性体中に存在

Fig.12 Stress-strain relation of crack homogenization model estimated by SC-DDM ($h/w=0.5$, $a_0/w=0.6$, $\phi=\pi/6$).

Fig.13 Stress intensity factor $\{K_I, K_{II}\}$ of crack homogenization model ($h/w=0.5$, $a_0/w=0.6$, $\phi=\pi/6$). Stress intensity factor K_I of single crack problem is also plotted for the sake of comparison.

Fig.14 Comparison of crack profile between crack homogenization model and single crack.

する単一亀裂に、同じ $\phi=30^\circ (= \pi/6)$ から応力を負荷した場合の亀裂進展形状を示す。亀裂均質化モデルと単一亀裂モデルどちらの進展形状も負荷応力の作用方向に徐々に収束していくように進展している。いずれの場合も亀裂の進展形状はよく似ているが、特に最大負荷応力に達するまでの間は、その形状がほぼ等しいとみなすことができる。

さて、亀裂の配列、進展形状ならびに負荷応力との関係を考察するために、負荷応力の作用方向を座標軸とする座標系 (P, Q) を考える。この座標系で示した亀裂均質化モデルの亀裂進展形状を Fig.15 に示す。図の上下方向から、一軸圧縮応力 σ_p が作用している。この図に示すように、亀裂は徐々に負荷方向に向かって進展し、互いにほぼ平行な亀裂群を形成している。このとき、亀裂の開口量および亀裂先端の開口量は先に Fig.12 で示した横ひずみの発生と密接に関係していると考えられる。つまり、横ひずみの増加により亀裂の開口は容易になり、したがって Fig.13 に示したように亀裂先端の応力拡大係数は大きくなることが可能であると予測できる。その結果、先に述べたように亀裂進展開始応力が減少する。

次に、モデル内の幾何学的な構造について考える。つまり、モデルは亀裂が入り込んでいる長柱 (A) と、亀裂があまり入り込んでおらず、ほぼ弾性体と見なせる長柱 (B) および (C) から構成さ

Fig. 15 Crack profile after propagation and schematic model of pillars which support acting stress.

れていると考えることができる。亀裂は、長柱 (A) を切るように進展しており、長柱 (B) および (C) が主に荷重応力を支えていると考えられる。また、亀裂の進展とともに長柱 (A) の断面は小さくなり、その結果この長柱 (B) および (C) が支えるべき荷重応力は大きくなる。したがって長柱 (B) および (C) を切る方向には進展しにくくなることが予想される。先に Fig. 14 で示した単一亀裂との亀裂進展形状のズレは、多亀裂配置によるモデル内部での応力分布の変化によるものと解釈することが出来る。

5・6 荷重応力作用方向の影響

荷重応力の作用方向 ϕ を変化させた場合について考察する。初期亀裂から亀裂が進展し始めるときの応力ならびに最大荷重応力と荷重方向との関係を Fig. 16 に示す。図中には、無限弾性体中の単一亀裂モデルに同様の荷重を作用させた場合の亀裂進展開始応力を併せて示す。まず、亀裂進展開始応力は、初期亀裂とのなす角度 ϕ が小さい時と大きい時に発散し、 $\phi = 32^\circ$ の時に最も亀裂が進展しやすくなっている。これは、単一亀裂モデルの亀裂進展開始応力の曲線と比較してもほぼ同様である。つまり、初期亀裂から亀裂が進展し始めるときの応力は、周囲の亀裂からの影響をあまり受けてないということがわかる。

次に、荷重応力の作用方向と最大荷重応力との関係をみると、最大荷重応力は狭い範囲内 ($15^\circ < \phi < 40^\circ$) で極小値をとり、それ以外の範囲では発散していると見なすことができる。また、このモデルにおける最大荷重応力が最も小さい値をとるのは、 $\phi = 30^\circ$ 付近であることが分かる。このように本モデルの場合、荷重応力の作用方向に対して最大荷重応力は強い異方性を示す。

6. 結 言

岩盤の力学特性と密接に関係する内部亀裂の進展挙動を理解するために、多数の亀裂を含む 2 次元モデルである亀裂均質化モデルを用いて、応力補償変位不連続法を適用することにより亀裂進展解析を実施した。本研究で得られた知見は以下の通りである。

(1) 亀裂先端の応力拡大係数の解析結果から、亀裂進展方向な

Fig. 16 Relation between crack propagation stress and loading angle ($h/w=0.5$, $a_0/w=0.6$).

らびに亀裂進展開始応力を求める方法を示した。また、亀裂進展過程で進展方向のバラツキを修正し、精度よく亀裂進展角度を評価する方法を示した。その結果、亀裂進展方向のバラツキは解消され、亀裂進展角度は滑らかに変化する結果が得られた。

- (2) 亀裂進展角度、亀裂進展形状について解の収束性を検討した。その結果、要素数 N が大きいほどある値に収束する傾向が見られた。さらに、亀裂進展角度、亀裂進展形状ともに十分な精度で解析が可能であることを示した。
- (3) 無限弾性体中に存在する単一亀裂の 1 軸圧縮問題について、本解析方法と Horii らの解析結果を比較した。その結果、初期亀裂から亀裂が進展し始める直後の形状は異なるものの、Horii らの解析結果と同様に荷重応力方向に亀裂進展方向が収束していく傾向が示された。
- (4) 亀裂均質化モデルの応力とひずみの関係を求めた結果、亀裂進展開始応力はピークをとることが分かった。また、軸方向ひずみはピークを過ぎても依然として線形であり、亀裂均質化モデルが軸方向に極めて著しい弾性を示すことがわかった。
- (5) 亀裂が進展する方向と、亀裂の配列および荷重応力の作用方向の幾何学的関係について考察した。さらに、荷重応力の作用方向と最大応力との関係から解析に用いたモデルの強度の異方性を明らかにした。

References

- 1) W.F. Brace and E.G. Bombolakis: Int. J. Geophys. Res., **68**(1971), 3709-3713.
- 2) E. Hoek and Z.T. Bieniawski: Int. J. Fracture Mech., **1**(1965), 137-155.
- 3) S. Nemat-Nassar and H. Horii: J. Geophys. Res., **87**(1982), 6805-6821.
- 4) H. Horii and S. Nemat-Nassar: J. Geophys. Res., **90**(1985), 3105-3215.
- 5) L.N. Germanovich, L.M. Ling, B.J. Carter, A.R. Ingraffea and A.V. Dyskin: Proc. Int. Congress on Rock Mech. (1995), pp.219-226.
- 6) K. Terada: Ph.D. dissertation thesis, The University of Michigan, (1996).
- 7) Y. Hirakawa, K. Sugawara, A. Sato and S. Eto: Shigen-to-Sozai, **117**(2001), 251-257.
- 8) Y. Hirakawa, K. Sugawara, A. Sato and S. Eto: Shigen-to-Sozai, **117**(2001), 258-264.
- 9) S.L. Crouch and A.M. Starfield: *Boundary element methods in solid mechanics*, (George Allen & Unwin, London, 1983), pp.79-109.
- 10) A. Sato, Y. Hirakawa, K. Kurogi and K. Sugawara: Shigen-to-sozai, **119**(2003), 99-106.
- 11) F. Erdogan and G.C. Sih: J. Basic Engineering, **85**(1963), 519-527.