電気探査学における n -層問題の電位式 に含まれる核函数の一般公式*

正会員 小野寺清兵衛**

General Formula for the Kernel Function in the Formal Electric Potential Equation for n -Layer Resistivity Problem

Seibei ONODERA

A explicit expression for the kernel function involved in the formal electric potential equation for the general case of n layered media, each layer being homogeneous and isotropic, is given in the form

$$K_n(k_j, h_j; \lambda) = \frac{G_n}{D_n} = \frac{G_n}{H_n - G_n},$$

where

$$G_n = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m+1,s}^{(n-1)}, \quad H_n = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m,s}^{(n-1)}, \quad D_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i S_{i,s}^{(n-1)}$$

where

$$S_{i,s}^{(n-1)} = \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_i} k_{\alpha_1} k_{\alpha_2} \dots k_{\alpha_i} \exp[-2\lambda\{h_{\alpha_i} - h_{\alpha_{i-1}} + \dots + (-1)^{i+1} h_{\alpha_1}\}]$$

$$S_{0,s}^{(n-1)} = 1$$

called the elementary symmetric expression of $k_1, \dots, k_{n-1}$ with their induced exponential functions of $h_1, \dots, h_{n-1}$,

$$s = n-1 - C_i, \quad i=0, 1, \dots, n-1,$$

$$\left[\frac{n-1}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{for } n \text{ even} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{for } n \text{ odd} \end{cases}$$

and the symbol $k_j, j=1, 2, \dots, n-1$, is resistivity factors, h_j layer-depth, λ a parameter and n the number of layers.

By making use of the general formula, the kernel function for the special case of five layered media is given in the paragraph 2.4. In section 3, the basic method of expressing the kernel function is suggested with an example such as $n=6$. Finally, some properties of the kernel function are explained in the subsequent section of the present paper.

1. 緒 論

電気探査学における基礎的問題の1つである n 層問題——これは均質等方媒質からなる n 個の地層が水平な地表面に対して成層している半無限の地下構造をモデルとして、地表面におかれた点電流源による地表面の任意の点の電位を求める問題である——については STEFANESCO and SCHLUMBERGER¹⁾ による電位の積分表示式がある。しかしその中の核函数に対しては FLATHE²⁾ の漸化式が知られているのみで、これによつて n 層の核函数を計算することははなはだ面倒で、事実上不可能に近い。

著者はこの点を解決して、ここに n 層問題の核函数を省略なしに判然とした形に表わす一般公式を提出する。

さて STEFANESCO et al. の取扱つたモデル(第1図)の地表面における電位分布を解析的に求める問題は、円筒函数を使えば、静電論 Z 型境界値問題³⁾ になつて、これを解くと、所要の電位函数は次の一般形で与えられる。

$$V(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} + 2 \int_0^\infty K_n(k_j, h_j; \lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \right\} \dots (1.1)$$

ここで $\rho_1 I / 2\pi$ は電極の強さ; I は電流; r は電極間距離; J_0 は第1種0位のベッセル函数; λ はパラメータである。 $K_n(k_j, h_j; \lambda)$ は核函数と呼ばれ、固有抵抗反射係数 k_j , 地層深度 h_j 及び λ の函数である。ここに k_j は

$$k_j = \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{\rho_{j+1} + \rho_j}, \quad j=1, 2, \dots, n-1 \quad (1.2)$$

* 昭和34年9月4日受理。日本鉱業会昭和33年, 34年度春季大会(東京)にて講演

** 九州大学助教授 採鉱学教室

第 1 図

で与えられ、 ρ_j は各媒質の固有抵抗を表わす。

核函数は STEFANESCO and SCHLUMBERGER によつて

$$K_n(k_j, h_j; \lambda) = \frac{N_1}{\Delta} \quad (1.3)$$

の形に表わされたのであるが、 Δ をその第 1 列の組成分子について分解すれば、 Δ に対して D_n と書いて

$$D_n = H_n - G_n \quad (1.4)$$

が得られる。また N_1 の第 1 列にそれぞれ第 2 列、第 4 列、...、第 $2n-4$ 列、第 $2n-2$ 列を加えると

$$N_1 = G_n \quad (1.5)$$

になる。ゆえに (1.3) は

$$K_n(k_j, h_j; \lambda) = \frac{G_n}{H_n - G_n} \quad (1.6)$$

の形に書換えられる。ここに下の式 (1.7)、(1.8) をおく。

ただし

$$\kappa_j = \rho_j / \rho_{j+1}, \quad j=1, 2, \dots, n-1. \quad (1.9)$$

* これは著者が便宜上名付けたものである。

$$G_n = \begin{vmatrix} -e^{-\lambda h_1} & -e^{-\lambda h_1} & -e^{-\lambda h_1} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-\lambda h_1} & \kappa_1 e^{-\lambda h_1} & -\kappa_1 e^{-\lambda h_1} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda h_2} & e^{-\lambda h_2} & -e^{-\lambda h_2} & -e^{-\lambda h_2} & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda h_2} & e^{-\lambda h_2} & \kappa_2 e^{-\lambda h_2} & -\kappa_2 e^{-\lambda h_2} & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots e^{-\lambda h_{n-2}} & e^{-\lambda h_{n-2}} & -e^{-\lambda h_{n-2}} & -e^{-\lambda h_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots -e^{-\lambda h_{n-2}} & e^{-\lambda h_{n-2}} & \kappa_{n-2} e^{-\lambda h_{n-2}} & -\kappa_{n-2} e^{-\lambda h_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & e^{-\lambda h_{n-1}} & e^{-\lambda h_{n-1}} & -e^{-\lambda h_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & -e^{-\lambda h_{n-1}} & e^{-\lambda h_{n-1}} & \kappa_{n-1} e^{-\lambda h_{n-1}} \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

$$H_n = \begin{vmatrix} e^{-\lambda h_1} & -e^{-\lambda h_1} & -e^{-\lambda h_1} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-\lambda h_1} & \kappa_1 e^{-\lambda h_1} & -\kappa_1 e^{-\lambda h_1} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda h_2} & e^{-\lambda h_2} & -e^{-\lambda h_2} & -e^{-\lambda h_2} & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda h_2} & e^{-\lambda h_2} & \kappa_2 e^{-\lambda h_2} & -\kappa_2 e^{-\lambda h_2} & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots e^{-\lambda h_{n-2}} & e^{-\lambda h_{n-2}} & -e^{-\lambda h_{n-2}} & -e^{-\lambda h_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots -e^{-\lambda h_{n-2}} & e^{-\lambda h_{n-2}} & \kappa_{n-2} e^{-\lambda h_{n-2}} & -\kappa_{n-2} e^{-\lambda h_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & e^{-\lambda h_{n-1}} & e^{-\lambda h_{n-1}} & -e^{-\lambda h_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & -e^{-\lambda h_{n-1}} & e^{-\lambda h_{n-1}} & \kappa_{n-1} e^{-\lambda h_{n-1}} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

したがつて核函数の明白な形を見出す問題は G_n, H_n を展開する問題に移行するわけである。

多層地下構造に対する固有抵抗曲線の数値計算の分野においては、多くの著者^{4)~13)}の研究から明らかなように、核函数の形が与えられはじめて (1.1) の数値計算が可能になっているという現状からして、核函数はこの分野において極めて重要な役割を果しているといわなければならない。

2 層問題の核函数は OLLENDORFF¹⁴⁾、3 層及び 4 層の核函数は STEFANESCO and SCHLUMBERGER¹⁾ によつて求められている。これらの研究内容についての詳細な解説は京都大学清野武教授¹⁵⁾によつてなされている。また、SLICHTER⁶⁾ は STEFANESCO の行列式を変形した形の行列式を用いて n 層の核を表わし、 $n=5$ のときの核(これは 6 層問題に相当する)を図式表示によつて与えられた。ある深さで導電率函数が変つている問題がやがて PEKERIS⁹⁾ によつて研究され、SLICHTER の核と呼ばれるに至つた。その骨子は SLICHTER 行列式を LAPLACE 展開して、多層構造の核を電位の漸近展開の可能な形で与えたもので、著者の場合とは異なる。続いて前田活郎¹⁶⁾ は核媒介函数* の分子・分母に別々の表示を行ない、 n の偶・奇によつて生ずる 2 つの表示方法を提案しているがその証明はなされていない。FLATHE²⁾ は STEFANESCO の行列式を展開して、漸化式を導き、これによつて核函数の表示を行い、定理の形で提出された。La Campagnie Générale de Geophysique¹²⁾ では k_j, h_j の函数として核の記号表示を行ない 7 層問題の核の形を与えている。著者¹⁶⁾ は前田の方法を拡張して、核表示の一般化を行なうと同時に、核媒介函数 $P_n(\lambda)$ の分母及び分子だけ

の項数の総和はいずれも 2^{n-2} で与えられることを発見した。

この論文では、はじめに G_n, H_n の一般展開を行ない、その形を論じる上に FLATHE の漸化式よりもさらに進歩した形の漸化式を導出している。その性質に基づいて、 $K^{(n-1)}$ 上の $S_{i,s}^{(n-1)}$ -函数, $i=0,1,\dots,n-1$, あるいは指数函数付基本対称式を定義し、 G_n, H_n, D_n の $S_{i,s}^{(n-1)}$ による恒等変換式が定理 I の形で与えられている。その帰結として、核函数を表わす一般公式が定理 II として導出されている。その例として、 $n=5$ の場合の核函数の形が 2.4 に与えられる。

さらに代数学における表現論を通して、 n 層問題の核函数は $K^{(n-1)}$ 上の基本対称式 $o_{i,s}^{(n-1)}$, $i=0,1,\dots,n-1$, の多項式として一意的に表わされるという核函数構成の基本定理に到達している。これから核函数表示の一般的方法が提案され、 $n=6$ のときの例を示している。

最後に核函数の 2, 3 の性質が明らかにされている。しかし実際問題として必要なのはそれらの理論ではなくして、3.2 及び 3.3 の核函数のつくり方とその実例だけである。これは初等数学で十分理解できる。

謝辞：本文にはいるに先だち、懇篤なる指導と校閲の労を執られた大野克郎教授（通信学教室）並びに恩師野口高教授に対し、ここに謹んで謝意を表する。

2. 核函数表示の一般化

2.1 G_n, H_n の展開

(1.7) 及び (1.8) で与えられる行列式 G_n 及び H_n は第 1 列の第 1, 第 2 行の組成分子だけが異なる。

いまこれらの行列式において、初めの 2 行及び 2 列からなる 2 次の首座小行列式を G_2, H_2 ; 初めの 4 行及び 4 列からなる 4 次の首座小行列式を G_4, H_4 ; ..., 初めの $2n-4$ 行及び $2n-4$ 列からなる $2n-4$ 次の首座小行列式を G_{n-1}, H_{n-1} とすると*, 行列式 G_n 及び H_n はそれぞれの行列式の最後の 2 行についての LAPLACE 展開によつて

$$G_n = G_{n-1}(1 + \kappa_{n-1}) + G_{n-1}^+(1 - \kappa_{n-1})e^{-2\lambda h_{n-1}}, n \geq 3 \quad (2.1)$$

$$H_n = H_{n-1}(1 + \kappa_{n-1}) + H_{n-1}^+(1 - \kappa_{n-1})e^{-2\lambda h_{n-1}}, n \geq 3 \quad (2.2)$$

なる形の漸化式で表わされる。ここに、 G_{n-1}^+, H_{n-1}^+ はそれぞれ第 $2n-4$ 列の組成分子を第 $2n-3$ 列の組成分子で入れ換えてつくつた $2n-4$ 次の首座小行列式を表わす。

G_{n-1} の組成分子におけるべき指数 h の符号を全部換えてしまうと、簡単な操作の後に

$$G_{n-1} \mid \pm h_{n-2} \rightarrow \mp h_{n-2} = H_{n-1}^+.$$

になる。同様に

$$H_{n-1} \mid \pm h_{n-2} \rightarrow \mp h_{n-2} = G_{n-1}^+$$

そこで

$$G_{n-1}^+ = H_{n-1}'; H_{n-1}^+ = G_{n-1}'$$

とおくと、(2.1) 及び (2.2) は

$$G_n = G_{n-1}(1 + \kappa_{n-1}) + H_{n-1}'(1 - \kappa_{n-1})e^{-2\lambda h_{n-1}}, n \geq 3 \quad (2.3)$$

$$H_n = H_{n-1}(1 + \kappa_{n-1}) + G_{n-1}'(1 - \kappa_{n-1})e^{-2\lambda h_{n-1}}, n \geq 3 \quad (2.4)$$

の形に書換えられる。ただし

$$G_2 = (1 - \kappa_1)e^{-2\lambda h_1} \quad (2.5)$$

$$H_2 = (1 + \kappa_1) \quad (2.6)$$

$$G_2' = (1 - \kappa_1)e^{2\lambda h_1} \quad (2.7)$$

$$H_2' = (1 + \kappa_1) \quad (2.8)$$

(2.3), (2.4) は H. FLATHE の漸化式に相当するものであるが、その導出の仕方は異なる。

2.2 $S_{i,s}^{(n-1)}$ -函数による G_n, H_n 及び D_n の変換

ここで次の記号表示を定義する：

$$G_n^x = G_n \mid \kappa_{n-1} \rightarrow -\kappa_{n-1} \quad (2.9)$$

$$G_n^{x'} = G_n' \mid \kappa_{n-1} \rightarrow -\kappa_{n-1} \quad (2.10)$$

記号 G_n^x 及び $G_n^{x'}$ はそれぞれ G_n 及び G_n' において κ_{n-1} の代りに $-\kappa_{n-1}$ とおいた式を表わす。

そうすると、(2.9) によつて (2.3) から

$$G_n^x = G_{n-1}(1 - \kappa_{n-1}) + H_{n-1}'(1 + \kappa_{n-1})e^{-2\lambda h_{n-1}} \quad (2.11)$$

が導かれる。さらに (2.10) によれば、(2.11) は

$$\begin{aligned} G_n^{x'} &= G_{n-1}'(1 - \kappa_{n-1}) + H_{n-1}'(1 + \kappa_{n-1})e^{-2\lambda h_{n-1}} \\ &= \{G_{n-1}'(1 - \kappa_{n-1})e^{-2\lambda h_{n-1}} + H_{n-1}'(1 + \kappa_{n-1})\}e^{2\lambda h_{n-1}} \\ &= H_n e^{2\lambda h_{n-1}} \end{aligned}$$

の形に書かれる。あるいは

$$H_n = G_n^{x'} e^{-2\lambda h_{n-1}} \quad (2.12)**$$

$$H_n' = G_n^x e^{2\lambda h_{n-1}} \quad (2.13)**$$

(2.13) において n に対して $n-1$ と書くと

$$H_{n-1}' = G_{n-1}^x e^{2\lambda h_{n-2}} \quad (2.14)$$

が得られるが、これを (2.3) に代入すれば

$$G_n = G_{n-1}(1 + \kappa_{n-1}) + G_{n-1}^x(1 - \kappa_{n-1})e^{-2\lambda(h_{n-1} - h_{n-2})} \quad (2.15)$$

が得られる。これは G_n, H_n から導かれた最終漸化式であつて、 G_n の形を論じる上に、漸化式 (2.3), (2.4) より遙かに優れた性質を表わしている。

さらに (2.15) を具体化するために、(1.2) と (1.9) との間に存在する関係式

$$k_j = \frac{1 - \kappa_j}{1 + \kappa_j}, i=1, 2, \dots, n-1 \quad (2.16)$$

* G, H の右下添字はそれぞれ 2 層, 3 層, ..., $n-1$ 層を意味する。

** この関係式は行列式からも直接わかる。

を用いて、次の対称函数を定義する。

$$\left. \begin{aligned} S_{0,s}^{(n-1)} &= 1, \\ S_{1,s}^{(n-1)} &= k_1 e^{-2\lambda h_1} + \dots + k_{n-1} e^{-2\lambda h_{n-1}}, \\ S_{2,s}^{(n-1)} &= k_1 k_2 e^{-2\lambda(h_2-h_1)} + \dots \\ &\quad + k_{n-2} k_{n-1} e^{-2\lambda(h_{n-1}-h_{n-2})}, \\ &\dots\dots\dots \\ S_{1,s}^{(n-1)} &= \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_i} k_{\alpha_1} k_{\alpha_2} \dots k_{\alpha_i} \exp[-2\lambda\{h_{\alpha_i} \\ &\quad - h_{\alpha_{i-1}} + \dots + (-1)^{i+1} h_{\alpha_1}\}], \\ &\dots\dots\dots \\ S_{n-1,s}^{(n-1)} &= k_1 k_2 \dots k_{n-1} \\ &\quad e^{-2\lambda(h_{n-1}-h_{n-2}+\dots+(-1)^n h_1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

ここに

$$s = n-1 C_i, \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (2.18)$$

で与えられ、 $S_{i,s}^{(n-1)}$ —函数の項数を表わすものとする。

$S_{i,s}^{(n-1)}$ —函数のことを可換体 $*$ $K^{(n-1)} = K[k_1, \dots, k_{n-1}]$ 上の i 次の指数函数付基本対称式と名付ける $**$ 。ただし不定素 $k_1, \dots, k_{n-1}$ は固有抵抗反射係数に相当し、 h_i は第1図に示す地層深度を表わす。

しかるとき、 G_n, H_n, D_n の $S_{i,s}^{(n-1)}$ —函数への恒等変換に関して次の定理が成立つ。

定理 I :

$$G_n = \prod_{j=1}^{n-1} (1+\kappa_j) \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m+1,s}^{(n-1)} \quad (2.19)$$

$$H_n = \prod_{j=1}^{n-1} (1+\kappa_j) \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m,s}^{(n-1)} \quad (2.20)$$

$$D_n = \prod_{j=1}^{n-1} (1+\kappa_j) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i S_{i,s}^{(n-1)} \quad (2.21)$$

ここに

$$\left[\frac{n-1}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n: \text{奇数} \\ \frac{n}{2} - 1, & n: \text{偶数} \end{cases} \quad (2.22)^{***}$$

証明 初めに (2.19) が漸化式 (2.15) と恒等であることを数学的帰納法を用いて証明する。

$n=3, 4$ のような定まつた値に対しては視察によつて (2.19) は (2.15) と恒等になるから、(2.19) の成立つことが知られる。

(2.19) が n のとき成立ち、(2.15) と恒等であると仮定する。

(2.9) で与えられる定義によつて、(2.19) から G_n^* の形を求めれば

$$\begin{aligned} G_n^* &= \prod_{j=1}^{n-1} (1+\kappa_j) \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m+1,s}^{(n-1)} \Big|_{\kappa_{n-1} \rightarrow -\kappa_{n-1}} \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} (1+\kappa_j) \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m+1,s}^{(n-1)*} k_{n-1} \end{aligned} \quad (2.23)$$

* 可換整域としてもよい。

** その単項式あるいは多項式あるいは単項式と多項式間には四則に関する基本律が成立つ。

*** Gauss の記号である。

**** これは著者が便宜上名付けたものである。

になる。ここで

$$S_{2m+1,s}^{(n-1)*} = S_{2m+1,s}^{(n-1)} \Big|_{\kappa_{n-1} \rightarrow \kappa_{n-1}^{-1}} \quad (2.24)$$

である。

(2.19) と (2.23) とを n の代りに $n+1$ とおいた漸化式 (2.15) に代入すれば、その右辺は

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \prod_{j=1}^n (1+\kappa_j) \left\{ \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m+1,s}^{(n-1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m+1,s}^{(n-1)*} k_{n-1} k_n e^{-2\lambda(h_n-h_{n-1})} \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

になる。(2.25) の $\{ \}$ に対して、定理 2, 系 1^{iv} を適用するときは

$$(2.25) = \prod_{j=1}^n (1+\kappa_j) \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} S_{2m+1,s}^{(n)} \equiv G_{n+1}$$

になり、(2.19) は $n+1$ のときにも成立する。

しかるに、 $n=2$ のときは (2.19) は

$$G_2 = \prod_{j=1}^{2-1} (1+\kappa_j) \sum_{m=0}^{\frac{2}{2}-1} S_{2m+1,s}^{(2-1)} = (1+\kappa_1) k_1 e^{-2\lambda h_1}$$

$$s = 2-1 C_1 = 1$$

になり、明らかに (2.5) と恒等である。

よつて、(2.19) は 2 より大きい正の整数に対して (2.15) と恒等関係を満たすことが証明された。

次に、(2.20) の成立つことは、定理 2, 系 2^{iv} を用いて、(2.19) の証明の場合と同様に証明することができる。

最後に、(2.21) は (2.19)、(2.20) の帰結として、(1.4) から当然成立つ。

よつて定理 I はここに確立された。

2.3 一般公式

(2.19)、(2.20)、(2.21) を (1.6) に代入することにより、(1.1) に含まれる $K_n(k_j, h_j; \lambda)$ の一般化された表示に関して、次の定理が成立つ。

定理 II : n 層問題に対する核函数は次の公式で与えられる。

$$K_n(k_j, h_j; \lambda) = \frac{G_n}{D_n} = \frac{G_n}{H_n - G_n} \quad (2.26)$$

ここに

$$G_n = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m+1,s}^{(n-1)} \quad (2.27)$$

$$H_n = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} S_{2m,s}^{(n-1)} \quad (2.28)$$

$$D_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i S_{i,s}^{(n-1)} \quad (2.29)$$

もし核媒介函数****を

$$P_n(\lambda) = \frac{G_n}{H_n} \quad (2.30)$$

で定義すれば、核函数は

$$K_n(k_j, h_j; \lambda) = \frac{P_n(\lambda)}{1 - P_n(\lambda)} \quad (2.31)$$

あるいは

$$= \frac{1}{1 - P_n(\lambda)} - 1 \quad (2.32)$$

の形に書かれる。(2.31) は前田¹⁰⁾の表示である。

第1表は $n=2\sim 10$ に対する $j, n-1; m = \left[\frac{n-1}{2} \right]; \{m\}; 2m; 2m+1$ の関係数表を示す。

第 1 表

地層の数		kj		$m=\left[\frac{n-1}{2}\right]$		$\{m\}$	$2m$	$2m+1\}$
n		$i, n-1$		$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$			
偶	奇	奇	偶					
2		1		0		0	0	1
	3		2		1	0, 1	0, 2	1, 3*
4		3		1		0, 1	0, 2	1, 3
	5		4		2	0, 1, 2	0, 2, 4	1, 3, 5*
6		5		2		0, 1, 2	0, 2, 4	1, 3, 5
	7		6		3	0, 1, 2, 3	0, 2, 4, 6	1, 3, 5, 7*
8		7		3		0, 1, 2, 3	0, 2, 4, 6	1, 3, 5, 7
	9		8		4	0, 1, 2, 3, 4	0, 2, 4, 6, 8	1, 3, 5, 7, 9*
10		9		4		0, 1, 2, 3, 4	0, 2, 4, 6, 8	1, 3, 5, 7, 9

* $n-1$ 個の kj についての $2m+1$ 個の組合せの法則を満たすためには、太い罫線の外側の3*, 5*, ... はオミットする。

2.4 例 題

5層問題, $n=5$, に対する核函数 $K_n(k_j, h_j; \lambda)$ を求める。(2.16) により $j=1, 2, 3, 4$ に応じて k_1, k_2, k_3, k_4 の4個の固有抵抗反射係数の存在することがわかる。まずはじめに (2.26) の分子に相当する G_5 の形を求めよう。(2.22) において $\left[\frac{5-1}{2} \right] = 2$ であるから, $\{m\}=0, 1, 2$ に応じて, $2m+1=1, 3, 5$ となるのであるが, k_1, k_2, k_3, k_4 の中から $2m+1=5$ 個取って並べるわけにはいかないからこれは捨てる (第1表参照)。

ゆえに G_5 は

$$G_5 = S_{1,s}^{(4)} + S_{3,s}^{(4)} \quad (2.33)$$

で与えられることになる。ここで (2.33) の右辺の第1項及び第2項の項数を計算するに, (2.18) から

$${}_4C_1=4, \quad {}_4C_3=4$$

になる。すなわち $S_{1,s}^{(4)}$ 及び $S_{3,s}^{(4)}$ の項数はそれぞれ4項からなることが知られる。これは G_5 を間違いなく書き下すのに大切な事柄である。さて (2.17) を用いると (2.33) は一意的に

$$G_5 = k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2} + k_3 e^{-2\lambda h_3} + k_4 e^{-2\lambda h_4} \\ + k_1 k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2+h_1)} + k_1 k_3 k_4 e^{-2\lambda(h_4-h_3+h_1)} \\ + k_1 k_2 k_4 e^{-2\lambda(h_4-h_2+h_1)} + k_2 k_3 k_4 e^{-2\lambda(h_4-h_3+h_2)} \quad (2.34)$$

になる。

同様に H_5 は (2.28) を用いて

$$H_5 = S_{0,s}^{(4)} + S_{2,s}^{(4)} + S_{4,s}^{(4)} \quad (2.35)$$

の形に書ける。ゆえに (2.17) により (2.35) は

$$H_5 = 1 + k_1 k_2 e^{-2\lambda(h_2-h_1)} + k_1 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_1)} \\ + k_1 k_4 e^{-2\lambda(h_4-h_1)} + k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2)} \\ + k_2 k_4 e^{-2\lambda(h_4-h_2)} + k_3 k_4 e^{-2\lambda(h_4-h_3)} \\ + k_1 k_2 k_3 k_4 e^{-2\lambda(h_4-h_3+h_2-h_1)} \quad (2.36)$$

になる。(2.35) の右辺の各項の項数をチェックとして計算すれば、第1項は ${}_4C_0=1$; 第2項は ${}_4C_2=6$; 第3項は ${}_4C_4=1$ となつて (2.36) の正しいことが判る。

(2.34) 及び (2.36) を (2.26) に代入すれば $K_5(k_j, h_j; \lambda)$ の形が定まる。

また (2.26) の分母の形を決定するのに, (2.29) を使つても結果は同じになる。

3. 核函数の構成理論

3.1 構 成

(2.17) と定理Ⅱ によつて, 核函数の構成に関して次の定理をうる。

定理Ⅲ: n -層問題における電位の積分表示式に含まれる核函数は可換体 $K^{(n-1)} = K[k_1, \dots, k_{n-1}]$ における指数函数付基本対称式そのものの多項式の分数表示の形で一意的に表わされ, その分子は奇数次の指数函数付基本対称式の多項式から組立てられ, また分母は偶数次 (0 次を含む) の指数函数付基本対称式の多項式と一 (負) 符号をつけた分子とから構成される。ただし不定素 $k_1, \dots, k_{n-1}$ は固有抵抗反射係数に相当するものとする。

(2.17) の定義から判るように, h_i に関する指数函数の基本対称式 $\sigma_i^{(n-1)}$, $i=0, 1, \dots, n-1$, すなわち

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0^{(n-1)} &= 1, \\ \sigma_1^{(n-1)} &= k_1 + \dots + k_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} k_i, \\ \sigma_2^{(n-1)} &= k_1 k_2 + \dots + k_{n-2} k_{n-1} = \sum_{i,j} k_i k_j, \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_i^{(n-1)} &= \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_i} k_{\alpha_1} k_{\alpha_2} \dots k_{\alpha_i}, \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_{n-1}^{(n-1)} &= k_1 k_2 \dots k_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

への結合が $\sigma_i^{(n-1)}$ の導来結合として与えられている。

したがつて, その結合団 (2.17) が $\sigma_i^{(n-1)}$ に含まれていると考えても一般性を失わない。この考えから次の定理が導かれる。

核函数構成の基本定理: 電気探査学における n -層問題の電位式に含まれる核函数の構成は $k_1, \dots, k_{n-1}$ に関する基本対称式によつて一意的に定まる。ただし $k_1, \dots, k_{n-1}$ は固有抵抗反射係数に相当するものとする。

3.2 核函数のつくり方

与えられた n の値に対する核函数を直接的に表わす方法は定理Ⅱ あるいはⅢ により明らかであるが, ここでは核函数をつくる一般的方法を次の2段階に分けて, 判り

易く述べることにする。

第I段階：まず n が与えられたならば、 $k_1, \dots, k_{n-1}$ に関する基本対称式 $\sigma_0^{(n-1)}, \sigma_1^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}$ を書き下せ。

(A) 分子核の構成：上に書き下された基本対称式の中から、奇数次の σ をピックアップして、多項式の形に書き並べよ。これを構成記号 $E_{2m+1}^{(n-1)}$ で表わすと、これは一意に定まる。

(B) 分母核の構成：書き下された基本対称式において奇数次の σ に対して一符号をつけ、 σ 全体の多項式をつくれば分母核の構成記号 $E_{-}^{(n-1)}$ を与える。これはまた

$$E_{-}^{(n-1)} = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - k_j) \quad (3.2)$$

の形に書かれる。

他方において、 $K^{(n-1)}$ 上の 0 次を含む偶数次の σ の多項式を $E_{2m}^{(n-1)}$ で表わせば、分母核の構成記号は

$$E_{-}^{(n-1)} = E_{2m}^{(n-1)} - E_{2m+1}^{(n-1)} \quad (3.3)$$

で与えられ、その表示もまた唯一通りである。

第II段階：基本対称式の多項式の各項に (2.17) に示される指数函数を結合せよ。

以上と同様に、核媒介函数 (2.30) は 1 つの分数式で与えられるが、その分子及び分母はそれぞれ $K^{(n-1)}$ 上の奇数次の σ 及び偶数次 (0 次を含む) の σ の多項式によつて構成されることが判る。

3.3 例題

$n=6$ のときの核函数を 3.2 にしたがってつくつてみる。まず、 $k_1, \dots, k_5$ に関する $\sigma_i^{(5)}$ を書き下す：

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(5)} &= 1, \\ \sigma_1^{(5)} &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5, \\ \sigma_2^{(5)} &= k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_1 k_5 + k_2 k_3 + k_2 k_4 \\ &\quad + k_2 k_5 + k_3 k_4 + k_3 k_5 + k_4 k_5, \\ \sigma_3^{(5)} &= k_1 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_4 + k_1 k_3 k_4 + k_2 k_3 k_4 + k_1 k_2 k_5 \\ &\quad + k_1 k_3 k_5 + k_2 k_3 k_5 + k_1 k_4 k_5 + k_2 k_4 k_5 + k_3 k_4 k_5, \\ \sigma_4^{(5)} &= k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1 k_2 k_3 k_5 + k_1 k_2 k_4 k_5 + k_1 k_3 k_4 k_5 \\ &\quad + k_2 k_3 k_4 k_5, \\ \sigma_5^{(5)} &= k_1 k_2 k_3 k_4 k_5. \end{aligned}$$

$$\therefore E_{2m+1}^{(n-1)} = \sigma_1^{(5)} + \sigma_3^{(5)} + \sigma_5^{(5)}. \quad (3.4)$$

$$\text{また } E_{2m}^{(n-1)} = \sigma_0^{(5)} + \sigma_2^{(5)} + \sigma_4^{(5)}. \quad (3.5)$$

(3.4), (3.5) の $\sigma_i^{(5)}$ の各項に (2.17) の定義によつて指数函数を結合させる。

あるいは、

$$E_{-}^{(5)} = \sigma_0^{(5)} - \sigma_1^{(5)} + \sigma_2^{(5)} - \sigma_3^{(5)} + \sigma_4^{(5)} - \sigma_5^{(5)} \quad (3.6)$$

の $\sigma_i^{(5)}$ 各項に指数函数を結合させて核函数の分母がでる。

4. 核函数の性質

4.1 G_n, H_n, D_n の漸化関係

$$m = \left[\frac{n-1}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n-1}{2} \cdot n : \text{奇数} \\ \frac{n}{2} - 1, n : \text{偶数} \end{cases} \quad \text{とするとき} \quad (4.1)$$

(2.27) から

$$G_n = S_1^{(n-1)} + S_3^{(n-1)} + \dots + S_{2m+1}^{(n-1)} \quad (4.2)$$

の形が得られる。いま $K^{(n-1)}$ 上の指数函数付基本対称式 $S_i^{(n-1)}$, $i=0, 1, \dots, n-1$, において $k_1, \dots, k_{n-2}$ はそのままとし、 k_{n-1} の代りに k_{n-1}^{-1} とおいた式を $S_i^{(n-1)*}$ なる記号で表わす。そうすると G_n^* は

$$G_n^* = S_1^{(n-1)*} + S_3^{(n-1)*} + \dots + S_{2m+1}^{(n-1)*} \quad (4.3)$$

の形に書かれる。しかるとき次の漸化式が成り立つ。

$$G_n + G_n^* k_{n-1} k_n e^{-2\lambda(h_n - h_{n-1})} = G_{n+1}. \quad (4.4)$$

ただし $G_{n+1} = S_1^{(n)} + S_3^{(n)} + \dots + S_{2m+1}^{(n)}$ (4.5)

であつて、 $S_i^{(n)}$ は $K^{(n)}$ 上の指数函数付基本対称式を表わす。同様に

$$H_n = S_0^{(n-1)} + S_2^{(n-1)} + \dots + S_{2m}^{(n-1)} \quad (4.6)$$

$$H_n^* = S_0^{(n-1)*} + S_2^{(n-1)*} + \dots + S_{2m}^{(n-1)*} \quad (4.7)$$

とするとき、次の漸化式が成り立つ。

$$H_n + H_n^* k_{n-1} k_n e^{-2\lambda(h_n - h_{n-1})} = H_{n+1}. \quad (4.8)$$

ただし $H_{n+1} = S_0^{(n)} + S_2^{(n)} + \dots + S_{2m}^{(n)}$. (4.9)

最後に

$$D_n = S_0^{(n-1)} - S_1^{(n-1)} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}^{(n-1)} \quad (4.10)$$

$$D_n^* = S_0^{(n-1)*} - S_1^{(n-1)*} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}^{(n-1)*} \quad (4.11)$$

$$D_{n+1} = S_0^{(n)} - S_1^{(n)} + \dots + (-1)^n S_n^{(n)} \quad (4.12)$$

とおくときは、次の漸化式が成立つ。

$$D_n + D_n^* k_{n-1} k_n e^{-2\lambda(h_n - h_{n-1})} = D_{n+1}. \quad (4.13)$$

これらの漸化関係式 (4.4), (4.8) 及び (4.13) は核函数の n -層から $(n+1)$ -層への移行手続を示すものである。

〔例〕 3 層問題の核函数は

$$K_3(k_j, h_j; \lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 e^{-2\lambda h_2} + k_1 k_2 e^{-2\lambda(h_2 - h_1)}}$$

の形で与えられることはよく知られている。この式で (4.2) 及び (4.3) に相当するものは

$$\begin{aligned} G_3 &= k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2} \\ G_3^* k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3 - h_2)} &= \{k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2^{-1} e^{-2\lambda h_2}\} \\ &\quad \cdot k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3 - h_2)} \end{aligned}$$

$$= k_1 k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3 + h_2 + h_1)} + k_3 e^{-2\lambda h_3}$$

$$\begin{aligned} \therefore G_3 + G_3^* k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3 - h_2)} &= k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2} + \\ &\quad k_3 e^{-2\lambda h_3} + k_1 k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3 - h_2 - h_1)} \\ &= G_4 \dots (4.4) \text{ の関係} \end{aligned}$$

また (4.10) 及び (4.11) に相当するものは

$$D_3 = 1 - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 e^{-2\lambda h_2} + k_1 k_2 e^{-2\lambda(h_2+h_1)}$$

$$\begin{aligned} D_3^* k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2)} &= \{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2^{-1} e^{-2\lambda h_2} + \\ &k_1 k_2^{-1} e^{-2\lambda(h_2+h_1)}\} k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2)} \\ &= k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2)} - k_1 k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2+h_1)} - k_3 e^{-2\lambda h_3} \\ &+ k_1 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_1)} \end{aligned}$$

$\therefore D_3 + D_3^* k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2)} = D_4 \dots (4.13)$ の関係

よつて 4 層問題の核函数は次の形で与えられることになる。

$$\begin{aligned} K_4(k_j, h_j; \lambda) &= \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2} + k_3 e^{-2\lambda h_3} + k_1 k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2+h_1)}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 e^{-2\lambda h_2} - k_3 e^{-2\lambda h_3} + \\ &k_1 k_2 e^{-2\lambda(h_2+h_1)} + k_1 k_3 e^{-2\lambda(h_3+h_1)} + \\ &k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2)} - k_1 k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_3-h_2+h_1)}} \end{aligned}$$

また (4.8) の関係も容易に成立つことがわかる。

4.2 核函数の分子・分母の項数

核函数の分子・分母の項数を定める前に次の定理を証明しておく。

定理Ⅳ： G_n, H_n -函数の項数は互いに等しく、 2^{n-2} で与えられ； D_n -函数の項数は 2^{n-1} に等しい。ただし n は正の整数を表わす。

証明：(2.27) の項数を Sc_n で表わすと、(2.18) により

$$Sc_n = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} n-1 C_{2m+1} = 2^{n-2} \quad (4.14)$$

になる。また (2.28) の項数を SH_n で表わすと、(2.18) により

$$SH_n = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} n-1 C_{2m} = 2^{n-2} \quad (4.15)$$

になる。ゆえに

$$Sc_n = SH_n. \quad (4.16)$$

したがつて (2.29) の項数 SD_n は (2.26) により

$$SD_n = Sc_n + SH_n = 2^{n-1} \quad (4.17)$$

になる。(証明終り)

定理Ⅳから直ちに次の定理が得られる。

定理Ⅴ： n -層問題における核函数の分子及び分母の項数はそれぞれ 2^{n-2} 及び 2^{n-1} に等しい。ここに n は地層の数を表わす。

$n=2 \sim 10$ に対する G_n, H_n, D_n -函数の項数は第 2 表に示す如くパスカル三角形と一致する (二項係数)。

5. 結 論

まず行列式 G_n, H_n の一般展開から出発して、最終漸化式 (2.15) 及び (2.12) を導いた。その性質に基づいて、 $S_{n,s}^{(n-1)}$ -函数すなわち指数函数付基本対称式を手段として選んだことにより、 G_n, H_n, D_n の恒等変換並びに n -層問題の電位式に含まれる核函数表示の一般化に成

第 2 表

n	$n-1$	$n-1C$									SG_n	SH_n	SD_n	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8				9
2	1	1	1									1	1	2
3	2	1	2	1								2	2	4
4	3	1	3	3	1							4	4	8
5	4	1	4	6	4	1						8	8	16
6	5	1	5	10	10	5	1					16	16	32
7	6	1	6	15	20	15	6	1				32	32	64
8	7	1	7	21	35	35	21	7	1			64	64	128
9	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		128	128	256
10	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	256	256	512

功し、その一般公式が定理Ⅱとして与えられた。

この定理から、地層の数を n で表わすとき、核函数は一般に $K^{(n-1)} = K[k_1, \dots, k_{n-1}]$ 上の基本対称式の多項式によつて、一意的に定まるといふ核構成の理論が確立されるに至つた。この理論によれば、電気探査学の基礎的問題である n -層問題を解析的に取扱つてゐる静電論境界値問題は固有抵抗反射係数 $k_1, \dots, k_{n-1}$ を不定素と考えたときの基本対称式を辞引式順序で書き下す問題に移行したことを証明するもので、その事柄を単純化したといえるであろう。

最後に核函数の 2, 3 の性質について言及した。

なお各セクションの終りには例題を挙げて数式の実際の取扱いをわかり易く説明したつもりである。

文 献

- 1) S. STEFANESCO en collaboration avec C. et M. SCHLUMBERGER: SUR LA DISTRIBUTION ELECTRIQUE POTENTIELLE AUTOUR D'UNE PRISE DE TERRE PONCTUELLE DANS UN TERRAIN A COUCHES HORIZONTALES, HOMOGENES ET ISOTROPES. J. de Physique et le radium (7)4, 1930 pp. 132~141.
- 2) H. FLATHE: A PRACTICAL METHOD OF CALCULATING GEOELECTRICAL MODEL GRAPHS FOR HORIZONTAL HORIZONTALLY STRATIFIED MEDIA. Geophysical Prospecting, Vol. III, No. 3, September, 1955 pp. 268~294.
- 3) 清野武: 境界値問題の三つの型とその電気探査学への応用, 電気評論, 39巻, 9号, 昭和26年9月(1951), 289~292頁。
- 4) LOUIS V. KING: On the Flow of Electric Current in Semi-Infinite Stratified Media. Proc. Roy. Soc. A. Vol. CXXXIX, 1933, pp. 237~277.
: On the Flow of Electric Current in Semi-Infinite Media in which the Specific Resistance is a Function of the Depth. Philos. Trans. Roy. Soc. London (A), Vol. CCXXXIII, No. 728, 1934 pp. 327~357.
- 5) MORRIS MUSKAT: Potential Distribution About an Electrode on the Surface of the Earth. Physics, Vol. 4, No. 4, April, 1933 pp. 129~147.
- 6) L. B. SLICHTER: The Interpretation of the Resistivity Prospecting Method for Horizontal Structures. Physics, Vol. 4, No. 9, September, 1933, pp. 307~322 and 407.
- 7) A. F. STEVNSON: On the Theoretical Determination of Earth Resistance from Surface Potential Measurements. Physics, Vol. 5, No. 4, April, 1934, pp. 114~124.
- 8) W. W. WETZEL and HOWARD V. McMURRY: A SET OF CURVES TO ASSIST IN THE INTERPRETATION OF THE THREE LAYER RESISTIVITY PROBLEM. Geophysics, Vol. II, No. 4, October, 1937, pp. 329~341.

- 9) C. L. PEKERIS: DIRECT METHOD OF INTERPRETATION IN RESISTIVITY PROSPECTING. Geophysics Vol. V, No. 1, January, 1940, pp. 31~42.
- 10) 前田活郎：電気抵抗式地質調査の計算方法，鉄道業務研究資料，6巻7号，昭和24年，66頁。
——：比抵抗法における直接計算法，物理探鉱，3巻2号，昭和25年10月（1950）8~11頁。
- 11) H. FLATHE: (2).
- 12) La Compagnie Générale de Geophysique: ABAQUES DE SONDAGE ELECTRIQUE. Geophysical Prospecting, Vol. III-SUPPLEMENT No. 3, September, 1955, pp. 1~7.
- 13) HAROLD M. MOONEY and W. W. WETZEL: The Potentials about a Point Electrode and Apparent Resistivity Curves for a Two-, Three- and Four-Layered Earth. THE UNIVERSITY OF MINESOTA PRESS, Minneapolis, 1956.
- 14) F. OLLENDORFF: Die Erdströme, 1928, s. 69.
- 15) 清野武：電気探鉱学I，昭和30年7月（1955），147~154頁。
- 16) 小野寺清兵衛：成層地下構造の地表面における電位函数に含まれる核の一般表示，九大工学集報，第31巻，第1号，昭和33年6月（1958），22~25頁。
- 17) 小野寺清兵衛：可換整域における基本対称式の漸化関係について，九大工学集報，第32巻，第3号，昭和34年11月（1959），174~178頁。

特 許 出 願 公 告（鉱業関係）

公 告 号	分 類	願書番号	発 明 の 名 称	出 願 人	
				都府県国籍	氏 名（名称）
158	15C34 (10E11)	31-6750	チタン鉱の分解法	独 国	フアルベックアブリケン，バイエル，アクチエンゲゼルシャフト
302	10J111 (10J222, 2)	33-12678	瓦斯塩化焙焼法による含クロム鉄鉱石の処理法	東 京	八 幡 製 鉄
303	10J131.2	33-24946	鉄鉱石の還元による製鉄法	米 国	アール，エヌ，コーポレーション
456	10J113 (10A12)	32-22546	製鉄用砂鉄原料の前処理法	東 京	中 西 正 信
601	9A210 (63B07)	31-32176	掘管制動安全装置	東 京	松 井 利 夫
603	9 B 4	32-19326	坑内支柱	独 国	カール，ゲルラッハ
604	9C221	32-31860	バウム水選機	北海道	今 井 正 修
605	9C30 (72B221)	32-12463	浮遊選鉱用条件槽	東 京	中 外 鉱 業
606	10A59 (10A56)	32-16778	混焼式還元熔解炉	〃	中 西 正 信
901	9 B 4	32-15918	坑内支柱設定用装置	独 国	グーテホッフマン・グスマフツ，テ・シュテルクラデー，アクチエンゲゼルシャフト
902	9 B 4 (86A4)	32-17191	坑道又は立坑支保	〃	〃
903	9C223	32-5713	比重選鉱装置	東 京	川 邑 春 松 外 1 名
1101	9B113	33-277	鑿岩機	〃	ラ サ 商 事
1103	10G1 (10E11)	33-13230	含ウラン又は含トリウム鉱石のアルカリ分解法	〃	旭 電 化 工 業
1104	10J131 (10A13)	33-14633	鉄鉱石，砂鉄又は硫酸焼鉱より海綿鉄を製造する方法	〃	同 和 鉱 業
1105	10J131 (10A13)	33-14634	鉄鉱石，砂鉄又は硫酸焼鉱より海綿鉄を製造する流動還元装置	〃	〃
1201	9A21	32-1671	海底用試験機	神奈川	畑 敏 男
1202	9C225 (111D0) (113D2)	31-22652	重液槽における重液粘度自動調整装置	愛 媛	住 友 機 械 工 業
1203	10A51	33-2642	焼 結 機	東 京	日 本 鋼 管
1204	10A51 (10A12)	33-4545	ドラム型ペレタイザー	〃	三 菱 造 船
1206	10E13	33-224	チタン金属の製法	米 国	ユニオン，カーバイド，コーポレーション
1207	10G1	33-8220	タングステンの低品位鉱石よりタングステンの抽出法	高 知	山 崎 重 明
1208	10J123	33-15518	硫酸滓又は含硫鉄鉱石から低硫高硅素鉄を製造する方法	東 京	三 和 重 金 属
1351	9A21	32-1672	海中試験装置	神奈川	畑 敏 男