円形立坑・斜坑・坑道のまわりの応力の一般解*

正 会 員 平 松 良 雄**

正 会 員 岡 行 俊***

Analysis of Stresses Around a Circular Shaft or a Drift Excavated in Ground in a Three-Dimensional Stress State

Yoshio HIRAMATSU and Yukitoshi OKA

The stress state in virgin ground is, in general, three-dimensional. In order to clarify strictly the earth pressure phenomena, it is necessary, therefore, to analyze the stresses around underground openings as a problem of three-dimensional stresses. Accordingly, the authors have analyzed theoretically the stresses around a shaft, vertical or inclined, or a horizontal drift, circular in cross section, excavated in ground in three-dimensional stress states, and obtained a general solution.

From this solution it is shown that the stresses around those openings are statically indeterminate. To show the influence of the inclination of the principal stresses in virgin ground upon the stresses around a circular opening, the stress concentrations have been illustrated for several stress states in undisturbed ground.

1. 緒 言

地下に空洞を開さくするまえの岩盤内の3つの主応力は、鉛直や水平に対して傾くのが一般的であり、また、これらの3つの初期主応力はどんな値でもとりうる。しかし、弾性岩盤中の空洞の周りの応力について、従来発表された研究は、ほとんどすべて、地山中の主応力の1つが鉛直であるという特殊な場合の解にすぎず、したがって、地圧現象の解明の目的に対して、不十分であつた。そこで筆者らは、弾性岩盤内の地圧現象の研究の一環として、地山内の主応力が3次元的で、しかも任意の傾斜をもつ場合の坑内空洞のまわりの応力について研究することにした。

地山内の主応力の1つが坑道の軸に垂直な面内で、種々の方向をとる場合の坑道のまわりに生ずる応力については、すでに報告した¹⁾。しかし、このような応力状態は、まだ十分一般的でない。今回報告するのは、一般的3次元応力状態にある岩盤中に作られた円形立坑、斜坑および坑道のまわりの応力を理論的に研究した結果である。

この研究に関連ある従来の研究を展望すると、円形坑道²⁾や立坑³⁾のまわりの応力の解析は、1つの主応力の方向が中心軸方向と一致する場合について行なわれており²⁾、特に、水平円形坑道のまわりの応力は、古くから2次元問題として、簡単に解析されていた。また、斜坑

のまわりの応力に関する杉原博士の解は、地山内の応力があらゆる方向に同一であるという特殊な場合について行なわれたものである⁴⁾。それゆえ、従来の解析の検討のためにも一般解を求めることは意義あることと思われる。

2. 応 力 解 析

一般的3次元応力状態にある岩盤中に、円形立坑、斜坑あるいは坑道を開さくしたとき、そのまわりに生ずる応力の解析は同一問題に帰する。それゆえ、以下に斜坑のまわりの応力を論じることにする。3つの主応力が

第 1 図

* 昭和36年9月16日受理

** 工博 京都大学教授 鉱山学教室

*** 工博 京都大学助手 鉱山学教室

p_1, p_2, p_3 である岩盤内に、中心軸が水平面と ϕ なる角をなす斜坑が開さくされたものとする。第1図に示すように、斜坑の中心軸 ST 上の一点 O を原点とし、鉛直に z 軸を、中心軸が xz 面上にあるように x 軸をとり、 x, z 軸に垂直に y 軸をとる。次にこの座標の原点 O を原点とし、 y 軸を原線とし、中心軸 ST を ζ 軸とする円柱座標 (r, θ, ζ) をとる。さらに原点を共有し主応力 p_1, p_2 および p_3 の方向をもつ直角座標軸 x', y', z' 軸をとる。

さて、力の釣合の条件を円柱座標で示せば、次のようである。^{*}

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta\zeta}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\zeta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\zeta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\tau_{r\zeta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここに、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\zeta$ は直応力成分、 $\tau_{\theta\zeta}, \tau_{r\zeta}, \tau_{r\theta}$ はせん断応力成分を示す。弾性体では、これらの応力成分と動径方向、動径と ζ 軸とに垂直な方向および ζ 軸方向の変位成分 u, v および w の間には次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_\zeta &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \\ \tau_{\theta\zeta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right), \\ \tau_{r\zeta} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ただし、

$$e = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \dots (3)$$

ここに、 λ, μ は Lamé の定数である。

全ての応力成分と変位成分のうち u および v と、 ζ 方向のひずみ $(\epsilon)_\zeta$ とは ζ 方向に一定と見なされるから、

$$(\epsilon)_\zeta = \frac{\partial w}{\partial \zeta} = K \quad (\text{ここに } K \text{ は定数})$$

したがって (1), (2), (3) 式は次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\zeta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\zeta}}{\partial \theta} + \tau_{r\zeta} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

^{*} (1) 式は物体力を無視しているが、地表からあまり浅くない所では、このように仮定して差支ない。

$$\sigma_r = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \dots (5a)$$

$$\sigma_\theta = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right), \dots (5b)$$

$$\sigma_\zeta = \lambda e + 2\mu K, \dots (5c)$$

$$\tau_{\theta\zeta} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \dots (5d)$$

$$\tau_{r\zeta} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}, \dots (5e)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \dots (5f)$$

$$e = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + K, \dots (6)$$

(5a)~(5f) 式および (6) 式を (4) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) &= 0, \dots (7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) &= 0 \dots (7b) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0. \dots (7c)$$

一方、境界条件として、 r が十分大きいところでは、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= p_1, \quad \sigma_{y'} = p_2, \quad \sigma_{z'} = p_3, \\ \tau_{y'z'} &= \tau_{z'x'} = \tau_{x'y'} = 0. \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

また斜坑の半径を a とすると、 $r=a$ において

$$\sigma_r = 0, \dots (9a)$$

$$\tau_{r\zeta} = 0, \dots (9b)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \dots (9c)$$

が成立する。これらの関係式から、 e, u, v, w が求められ、したがって、各応力成分が決定される。

しかし、境界条件を示す (8) 式は $x'y'z'$ 座標で表示されているので、これらを、まず xyz 座標へ転換し、さらに $r\theta\zeta$ 座標へ転換する。

いま、 x' 軸が x, y, z 軸となす角の余弦を、それぞれ l_1, l_2, l_3 とし、同様に y' 軸や z' 軸が x, y, z 軸となす角の余弦を、それぞれ $m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3$ とすると、応力転換の公式により、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= l_1^2 \sigma_{x'} + m_1^2 \sigma_{y'} + n_1^2 \sigma_{z'} + 2m_1 n_1 \tau_{y'z'} \\ &\quad + 2n_1 l_1 \tau_{z'x'} + 2l_1 m_1 \tau_{x'y'}, \\ \sigma_y &= l_2^2 \sigma_{x'} + m_2^2 \sigma_{y'} + n_2^2 \sigma_{z'} + 2m_2 n_2 \tau_{y'z'} \\ &\quad + 2n_2 l_2 \tau_{z'x'} + 2l_2 m_2 \tau_{x'y'}, \\ \sigma_z &= l_3^2 \sigma_{x'} + m_3^2 \sigma_{y'} + n_3^2 \sigma_{z'} + 2m_3 n_3 \tau_{y'z'} \\ &\quad + 2n_3 l_3 \tau_{z'x'} + 2l_3 m_3 \tau_{x'y'}, \\ \tau_{yz} &= l_2 l_3 \sigma_{x'} + m_2 m_3 \sigma_{y'} + n_2 n_3 \sigma_{z'} + (m_2 n_3 \\ &\quad + n_2 m_3) \tau_{y'z'} + (n_2 l_3 + l_2 n_3) \tau_{z'x'} + (l_2 m_3 \\ &\quad + m_2 l_3) \tau_{x'y'}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= l_3 l_1 \sigma_{x'} + m_3 m_1 \sigma_{y'} + n_3 n_1 \sigma_{z'} \\
 &\quad + (m_3 n_1 + n_3 m_1) \tau_{y'z'} + (n_3 l_1 + l_3 n_1) \tau_{z'x'} \\
 &\quad + (l_3 m_1 + m_3 l_1) \tau_{x'y'}, \\
 \tau_{xy} &= l_1 l_2 \sigma_{x'} + m_1 m_2 \sigma_{y'} + n_1 n_2 \sigma_{z'} + (m_1 n_2 \\
 &\quad + n_1 m_2) \tau_{y'z'} + (n_1 l_2 + l_1 n_2) \tau_{z'x'} + (l_1 m_2 + m_1 l_2) \\
 &\quad \tau_{x'y'} \dots\dots\dots (10)
 \end{aligned}$$

r が十分大きいところでは (8) 式が成立するから, (10) に (8) 式を代入し,

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= l_1^2 p_1 + m_1^2 p_2 + n_1^2 p_3, \\
 \sigma_y &= l_2^2 p_2 + m_2^2 p_2 + n_2^2 p_3, \\
 \sigma_z &= l_3^2 p_1 + m_3^2 p_2 + n_3^2 p_3, \\
 \tau_{yz} &= l_2 l_3 p_1 + m_2 m_3 p_2 + n_2 n_3 p_3, \\
 \tau_{zx} &= l_3 l_1 p_1 + m_3 m_1 p_2 + n_3 n_1 p_3, \\
 \tau_{xy} &= l_1 l_2 p_1 + m_1 m_2 p_2 + n_1 n_2 p_3,
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

また, xyz 座標と $r\theta\zeta$ 座標との間の関係は, 第 1 図を参照すると, 次式で与えられることがわかる。

$$\left. \begin{aligned}
 \cos(x, r) &= -\sin\phi \sin\theta, \quad \cos(x, \theta) = \\
 &= -\sin\phi \cos\theta, \quad \cos(x, \zeta) = \cos\phi, \quad \cos \\
 (y, r) &= \cos\theta, \quad \cos(y, \theta) = -\sin\theta, \quad \cos \\
 (y, \zeta) &= 0, \quad \cos(z, r) = \cos\phi \sin\theta, \quad \cos \\
 (z, \theta) &= \cos\phi \cos\theta, \quad \cos(z, \zeta) = \sin\phi.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

そこで応力転換の公式により, 次式をうる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\theta + \alpha_3 \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots (13a) \\
 \sigma_\theta &= \alpha_1 - \alpha_2 \cos 2\theta - \alpha_3 \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots (13b) \\
 \sigma_\zeta &= \beta_1 \quad \dots\dots\dots (13c) \\
 \tau_{r\theta} &= \gamma_1 \cos\theta + \gamma_2 \sin\theta \quad \dots\dots\dots (13d) \\
 \tau_{r\zeta} &= \gamma_1 \sin\theta - \gamma_2 \cos\theta \quad \dots\dots\dots (13e) \\
 \tau_{\theta\zeta} &= -\alpha_2 \sin 2\theta + \alpha_3 \cos 2\theta. \quad \dots\dots\dots (13f)
 \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{2} \{ (l_1^2 \sin^2 \phi + l_2^2 + l_3^2 \cos^2 \phi - 2l_3 l_1 \sin \phi \cos \phi) p_1 \\
 &\quad + (m_1^2 \sin^2 \phi + m_2^2 + m_3^2 \cos^2 \phi - 2m_3 m_1 \sin \phi \cos \phi) p_2 \\
 &\quad + (n_1^2 \sin^2 \phi + n_2^2 + n_3^2 \cos^2 \phi - 2n_3 n_1 \sin \phi \cos \phi) p_3 \}, \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{2} \{ (-l_1^2 \sin^2 \phi + l_2^2 - l_3^2 \cos^2 \phi + 2l_3 l_1 \sin \phi \cos \phi) p_1 \\
 &\quad + (-m_1^2 \sin^2 \phi + m_2^2 - m_3^2 \cos^2 \phi + 2m_3 m_1 \sin \phi \cos \phi) p_2 \\
 &\quad + (-n_1^2 \sin^2 \phi + n_2^2 - n_3^2 \cos^2 \phi + 2n_3 n_1 \sin \phi \cos \phi) p_3 \}, \\
 \alpha_3 &= (l_2 l_3 \cos \phi - l_1 l_2 \sin \phi) p_1 + (m_2 m_3 \cos \phi - m_1 m_2 \sin \phi) p_2 \\
 &\quad + (n_2 n_3 \cos \phi - n_1 n_2 \sin \phi) p_3, \\
 \beta_1 &= (l_1^2 \cos^2 \phi + l_3^2 \sin^2 \phi + 2l_3 l_1 \sin \phi \cos \phi) p_1 \\
 &\quad + (m_1^2 \cos^2 \phi + m_3^2 \sin^2 \phi + 2m_3 m_1 \sin \phi \cos \phi) p_2 \\
 &\quad + (n_1^2 \cos^2 \phi + n_3^2 \sin^2 \phi + 2n_3 n_1 \sin \phi \cos \phi) p_3, \\
 \gamma_1 &= \{ -l_1^2 \sin \phi \cos \phi + l_3^2 \cos \phi \sin \phi + l_2 l_1 (\cos^2 \phi \\
 &\quad - \sin^2 \phi) \} p_1 + \{ -m_1^2 \sin \phi \cos \phi + m_3^2 \cos \phi \sin \phi \\
 &\quad + m_2 m_1 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \} p_2 + \{ -n_1^2 \sin \phi \cos \phi \\
 &\quad + n_3^2 \cos \phi \sin \phi + n_2 n_1 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \} p_3, \\
 \gamma_2 &= (-l_2 l_3 \sin \phi - l_1 l_2 \cos \phi) p_1 + (-m_2 m_3 \sin \phi \\
 &\quad - m_1 m_2 \cos \phi) p_2 + (-n_2 n_3 \sin \phi - n_1 n_2 \cos \phi) p_3.
 \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots (14)$$

まず, (7c) 式から w の解を求め, (5d), (5e), (13d) および (13e) 式を考慮して, 必要な項だけを示すと, 次式を得る。

$$w = (A_1' r + A_1 r^{-1}) \cos \theta + (B_1' r + B_1 r^{-1}) \sin \theta \quad \dots\dots\dots (15)$$

したがって, (2d), (2e) 式により,

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta\zeta} &= \mu \{ (-A_1' - A_1 r^{-2}) \sin \theta + (B_1' \\
 &\quad + B_1 r^{-2}) \cos \theta \}, \\
 \tau_{r\zeta} &= \mu \{ (A_1' - A_1 r^{-2}) \cos \theta + (B_1' \\
 &\quad - B_1 r^{-2}) \sin \theta \}.
 \end{aligned}$$

(13d), (13e) および (9b) 式の境界条件より,

$$\tau_{\theta\zeta} = \gamma_1 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta + \gamma_2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad \dots\dots (16)$$

$$\tau_{r\zeta} = \gamma_1 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \gamma_2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta. \quad \dots\dots (17)$$

(7a) および (7b) 式を書き直すと,

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (18a)$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right. \\
 \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (18b)
 \end{aligned}$$

を得る。つぎに, (18a) 式を r で微分した式と, r で除した式と, (18b) 式を θ で微分し, さらに r で除した式とを辺々加え合わせて, 次式を得る。

$$\frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

(5a)~(5c), (13a)~(13c) および (9a) 式を考慮して, 上式の解を求めるとつぎのようになる。

$$e = C_0 + C_2 r^{-2} \cos 2\theta + D_2 r^{-2} \sin 2\theta. \quad \dots\dots\dots (20)$$

(7a) 式に (20) 式および (6) 式を代入して, $\frac{\partial e}{\partial r}$ および $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ を消去すると,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
 = 2(C_0 - K) r^{-1} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\mu} r^{-3} (C_2 \cos 2\theta \\
 + D_2 \sin 2\theta). \quad \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

(5a), (13a) および (9a) 式を考慮して, (21) 式の解を求めると,

$$\begin{aligned}
 u &= 2(C_0 - K) r + E_0 r^{-1} + \left(E_2' r + E_2 r^{-3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} C_2 r^{-1} \right) \cos 2\theta + \left(F_2' r + F_2 r^{-3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} D_2 r^{-1} \right) \sin 2\theta. \quad \dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

また、(6), (20) および (22) 式より次式を得る。

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = er - u - r \frac{\partial u}{\partial r} = (-2E_2 r + 2E_2 r^{-3} + C_2 r^{-1}) \cos 2\theta + (-2F_2' r + 2F_2 r^{-3} + D_2 r^{-1}) \sin 2\theta \dots\dots\dots (23)$$

(7b) 式を考慮して (23) 式を解くと、

$$v = \left(-E_2' r + E_2 r^{-3} + \frac{1}{2} C_2 r^{-1} \right) \sin 2\theta - \left(-F_2' r + F_2 r^{-3} + \frac{1}{2} D_2 r^{-1} \right) \cos 2\theta \dots\dots\dots (24)$$

を得る。

(20), (22), (24) 式を (5a)~(5c), (5f) 式に代入し, (13a)~(13c), (13f) 式および (9a), (9c) の諸式の境界条件から各定数を決定し, σ_r , σ_θ , σ_ϕ および $\tau_{r\theta}$ を求めると, つぎのようになる。なお (16), (17) 式も再録しておく。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \alpha_1 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \alpha_2 \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} - 4 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ &\quad + \alpha_3 \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} - 4 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \alpha_1 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \alpha_2 \left(-1 - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ &\quad + \alpha_3 \left(-1 - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta, \\ \sigma_\phi &= \beta_1 - \frac{2\lambda}{\lambda + \mu} \alpha_2 \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta - \frac{2\lambda}{\lambda + \mu} \alpha_3 \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta, \\ \tau_{r\phi} &= \gamma_1 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta + \gamma_2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta, \\ \tau_{r\theta} &= \gamma_1 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \gamma_2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \\ \tau_{\theta\phi} &= \alpha_2 \left(-1 + 3 \frac{a^4}{r^4} - 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta + \alpha_3 \left(1 - 3 \frac{a^4}{r^4} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ポアソン数を m とすれば, $m = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda}$ なる関係があるから, (25) 式の第 3 式における $\frac{2\lambda}{\lambda + \mu}$ なる係数を $\frac{4}{m}$ で置き換えることができる。(25) 式は一般的 3 次元応力状態の岩盤中に作られた円形斜坑の周りの応力を与える式である。ここに $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \gamma_1$ および γ_2 は (14) 式で与えられる定数である。いうまでもなく, (25) 式において, $\phi = 0$ とおけば, 水平円形坑道のまわりの応力が得られ, $\phi = 90^\circ$ とおけば円形立坑のまわりの応力が得られる。

3. 立坑, 斜坑, 坑道のまわりの応力は 静定か否かの吟味

3 次元応力状態にある岩盤中に円形立坑, 斜坑, 坑道

を開さくしたとき, そのまわりの応力の厳密解が得られたから, ここで, 応力は静定であるか否かの吟味を行ない, 3 次元光弾性実験による応力解析のための参考資料を提供したいと思う。

(25) 式を見ると, $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\phi}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta\phi}$ は弾性定数に無関係に表わされているから, 静定である。しかし, σ_ϕ は弾性定数に関係するから不静定である。ただし, 地山内の主応力の一つの方向が ϕ 軸方向と一致し, かつ, 他の二つの主応力の大きさが相等しいときは, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ となり, (25) 式の第 3 式は $\sigma_\phi = \beta_1$ となる。したがって, σ_ϕ も静定応力である。

4. 地山内の応力状態が特殊な場合の 円筒形空洞のまわりの応力

特殊な応力状態にある岩盤中に円形水平坑道や立坑や斜坑が開さくされた場合の応力は, 古くから簡単に解析されていたので, その結果とわれわれの厳密解とを比較してみよう。従来取扱われた特殊な応力状態としては, 主応力の一つ p_3 が鉛直で, 他の二つ p_1, p_2 は水平であり, かつ $p_1 = p_2 = k p_3$ である場合が挙げられる。このような応力状態の岩盤中に円形坑道を開さくした場合の応

第2図 円形斜坑の壁面上の点Bにおける直応力 σ_θ および $\tau_{\theta\phi}$ と斜坑の傾斜角 ϕ との関係
(ただし地山内の応力状態は鉛直方向に p_3 , 水平面上あらゆる方向に $k p_3$ とする)

第3図 円形斜坑の壁面上の点A (またC) における応力成分 $\sigma_\theta, \sigma_\phi$ および $\tau_{\theta\phi}$ と斜坑の傾斜角 ϕ との関係
(ただし, 地山内の応力状態は第2図と同じ)

第4図 円形斜坑の壁面上の点A(またはC)における主応力の大きさ及び方向と斜坑の傾斜角 ϕ との関係

(ただし、地山内の応力状態は第2図と同じ)

力は、従来、まず p_2 だけが存在すると仮定して、平面ひずみの問題として σ_r, σ_θ および $\tau_{r\theta}$ を簡便に解析し、つぎに p_3 だけが存在すると仮定して、同様に平面ひずみの問題として $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ を解析し、それらの結果を加え合わせた次式によって与えられていた。

$$\sigma_r = \frac{p_3}{2} \left[\left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} - \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} + k \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_3}{2} \left[\left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} + k \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{p_3}{2} (1-k) \left(1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta.$$

これらの式はわれわれの厳密解 (25) および (14) 式において、 p_1, p_2 を $k p_3$ で置きかえ、 $\phi=0$ とし、かつ $l_1=m_1=n_1=1$ とおき、他の方向余弦をすべて0とおくことにより得られる解と一致する。したがって、このような特殊な場合の $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ については簡便解と厳密解とが一致することがわかった。

もつとも、簡便解では σ_z は求まらない。また、同じ応力状態の岩盤中に立坑を開き出した場合、 $\phi=90^\circ$ において、 σ_z, σ_r および σ_θ を示す式を導くと、これらの式は鈴木博士の誘導にかかる式と形は異なるが、数値計算を行なった結果、同一大きさの応力を与えることが確かめられた。

水平坑道が傾斜すれば斜坑となり、垂直に立つと立坑となるが、この傾斜角と応力集中との関係を検討してみよう。上に述べた地山内の応力条件の下では、水平坑道の中心軸の真上(または真下)の壁面上の点Bに最大引張応力が現われ、真横の点AまたはCに最大圧縮応力が現われることはよく知られている(ただし、 $k \geq \frac{1}{3}$ であれば、引張応力は生じない)。さて、水平坑道の軸が傾斜して斜坑となるものとし、点BおよびAまたはCの応力 $\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$ が、斜坑の傾斜角 ϕ とともにいかに変化するかを、 $k=1, 1/4, 1/3$ および0の場合について計算して図示すると、第2図および第3図のようである。

第5図 一般的な地山の応力状態の一例(左)と、その中に開き出された円形立坑、斜坑および坑道の壁面上の応力分布(右) (Max. comp. はその付近に最大の圧縮応力が生じていることを示す)

ただし、これらの応力は岩盤のポアッソン数 m を4として計算した結果である。ここで注意すべきことは、点Bの σ_θ や σ_r は主応力であるが、点AまたはCのそれらは主応力でないことである。そこで点AまたはCの主応力やその方向と ϕ との関係を示せば第4図のようである。同図の鎖線は、小さい方の圧縮主応力の方向を、 ϕ 軸の正の方向から時計回りに測った角度 ψ で示したものである。

第2,3および4図は地山内の応力状態がこのように特殊な場合、円筒形空洞のまわりに現われる最大の圧縮応力や引張応力は、水平坑道のまわりにおいて最も大きく、斜坑の傾斜が大きくなるほど減少し、立坑のまわりにおいて最も小さいことを示している。

5. 地山内の応力状態が一般的な場合 の円筒形空洞のまわりの応力

地山内の主応力の方向が鉛直や水平でなく、しかも、それらの大きさが任意の値をとる一般的な場合、その中に開さくされた円筒形空洞の壁面に生ずる応力の一例を示そう。一般的応力状態の一例として、第5図の左方に示すように、主応力 p_1, p_2, p_3 のうち p_3 が最も大きく、 $p_1=p_3/4$, $p_2=p_3/3$ で、いずれも鉛直や水平に対して傾いているものを取りことにし、このような応力状態の岩盤中に、水平坑道、傾斜 15° の斜坑および立坑を開さくしたとき壁面上の各点に現われる各応力成分を(25)式によつて計算し、さらに主応力を計算し、この結果を壁面の展開図上に示せば第5図のようである。ただし、岩盤のポアッソン数は4として計算を行なつた。

第5図はただ1種の地山内の応力状態の場合の計算結果であるから、これから空洞のまわりの応力分布に関する一般的傾向を導き出すことは無理である。しかし、つぎの事柄が成立することは認められる。空洞の中心から p_3 に平行な直線を引き、これが壁面を貫く点の付近に、最大の引張主応力、あるいは最小の圧縮主応力が生じ、また、その点から、ほぼ $\theta=\pm 90^\circ$ 偏つた点に最大の圧縮主応力が生ずる。この最大圧縮主応力の方向は p_3 の方向に近い。 p_1 および p_2 が壁面上の応力分布に及ぼす影響は、 p_3 の影響にかくれて明瞭でない。

つぎに、空洞軸の方向と壁面上の最大や最小の主応力

の大きさとの関係についていえば、空洞軸と p_3 の方向とのなす角が直角のとき、最大の主応力はもつとも大きく、最小の主応力はもつとも小さくなり、直角より小さくなるにつれて、前者は小さく、後者は大きくなる。しかし、壁面上の最大(最小)の主応力がもつとも大きく(小さく)なるのは、空洞軸に垂直に、 p_3 が存在し、しかも $p_1=p_2=0$ の場合であつて、この場合の最大圧縮応力は $3p_3$ 、最大の引張応力は $-p_3$ である。

6. 結 言

岩盤内の応力状態は、一般には、3次元的で傾いている。それゆえ、地圧現象を十分明らかにするためには、一般的3次元応力状態にある弾性岩盤中に開さくされた空洞のまわりの応力を明らかにすることが必要である。その第一歩として、円形立坑、斜坑および坑道のまわりの応力を示す厳密な解を得た。この解から、これらの応力状態は不静定であることを指摘し、また、地山内の主応力の方向が鉛直および水平である特殊な場合についての、従来の解析を批判した。

また、地山内の応力状態が一般的な場合、その中に開さくされた円筒形空洞の壁面に現われる応力分布の計算結果の一例を示し、地山内の主応力の大きさおよび方向や空洞軸の方向と応力集中度との間の関係を明らかにした。その二、三を述べると、最も大きい初期主応力 p_3 の方向と空洞軸とが直交する場合、壁面に現われる圧縮応力や引張応力は最大となり、平行する場合、最小となる。壁面上で最も小さい主応力の生ずる点は、空洞の中心を通り、 p_3 の方向を持つた直線が壁面と交わる点の付近である。。またこの点と空洞の中心に関して直角の位置にある点の付近に最も大きい主応力が現われる。この最大の主応力の方向は、 p_3 の方向に近い。壁面上の主応力の大きさは種々の条件によつて異なるが、 $3p_3$ と $-p_3$ との間にある。

参 考 文 献

- 1) 平松・岡・吉住：日本鉱業会誌，75巻，858号，昭和34年12月，1081頁。
- 2) 山口昇：土木学会誌，15巻，4号，昭和4年，291頁。
Kühn：Glückauf，Nr. 48，67 Jahrg.，Nov. 1931，S. 1477.
- 3) 鈴木光：日本鉱業会誌，65巻，733号，昭和24年4～5月，118頁
- 4) 杉原武徳：日本鉱業会誌，47巻560号，昭和6年12月，1176頁。