論文・報告

排水管など自重による挫屈について (第1報)*

正 会 員 吉 沢 幸 雄**
 正 会 員 川 島 俊 夫***
 正 会 員 富 地 信 夫****
 准 会 員 小 川 紀 一*****

Buckling of Pipe due to its Own Weight
 (1st Report)

Yukio YOSHIZAWA, Toshio KAWASHIMA,
 Nobuo TOMICHI, and Toshikazu OGAWA

In this study, the buckling tests of pipe due to its own weight with the diameter 8mm and the length 1,000~4,500mm were examined.

As the results of this tests, the following conclusions were obtained.

- (1) Empirical formula of deflection curve of the pipe;

$$\delta = \delta_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^n \dots\dots\dots (1)$$

where $n=1.17 \sim 2.05$

- (2) Critical length of pipe obtained by using the strain energy of bending ΔU and the total work during the buckling ΔT ;

$$l_{cr} = \left\{ \frac{n(n+1)^2}{2(2n-1) \left[\frac{(n+1)^2}{2n+1} + \frac{n-2}{n+2} - \frac{n^2+3n}{2n+3} \right]} \right\}^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{EI}{q}} \dots\dots\dots (2)$$

- (3) Relation between l_{cr} and l_{cr0} or the ratio of l_{cr} and l_{cr0} ;

$$l_{cr} = C \cdot l_{cr0} = \left\{ \frac{n(n+1)^2}{2 \times 7.837(2n-1) \left[\frac{(n+1)^2}{2n+1} + \frac{n-2}{n+2} - \frac{n^2+3n}{2n+3} \right]} \right\}^{\frac{1}{3}} \cdot l_{cr0} \dots\dots\dots (3)$$

For the abovevalue of $n=1.17 \sim 2.05$, the value of C is less than 1.04, consequently the above equations about the deflection's curve and the critical length are practically well enough applicable.

l_0 =length of pipe

ΔT =total work during buckling

l =arbitrary length of pipe

l_{cr} =critical length of pipe

δ_0 =deflection of upper end

l_{cr0} =exact solution about critical length of pipe given

δ =deflection at the point of length

by Timoshenko

ΔU =strain energy of bending

C =coefficient

1. 緒 言

鉱山などで深部採掘が進むにつれ、排水もまた深部からの垂直管による場合が多くなりつつある。この場合、排水管の設置の方法によつては、自重だけで排水管が挫屈を起し、場合によつては破壊にいたることも考えねば

ならない。立坑において排水管を据えつける方法としては、坑口において吊る場合と、坑底において支持する場合が考えられるが、自重により挫屈を起す場合は後者である。

このような現象は鉱山のみならず、石油採掘などの場合においてもきわめて重要な問題であるが、これらに関

* 昭和41年7月15日受理

** 工博 東北大学工学部教授 資源工学科

*** 工博 東北大学工学部助教授 資源工学科

**** 山形大学教育学部助教授

***** 東北大学工学部助手 資源工学科

* 吉沢・川島：昭和38年度日本鉱業会秋季大会研究発表講演要旨集33～35頁，および吉沢・川島・富地・小川：昭和41年度日本鉱業会春季大会研究発表講演要旨集 19～21頁にて発表

第1図 ボアホール内の挫屈の様式

する実験はいまだほとんど見受けられない。本報においては、8mm径の特注のパイプを用いて実験し、この実験結果を用いて挫屈に関し考察を行なったものであるがパイプのたわみ曲線について、従来より簡単な新しい近似式を求めたので、これらについて報告するものである。

2. パイプの挫屈状態

いまパイプが立坑において挫屈を起す状態は第1図の(a)(b)(c)の3つの条件の場合が考えられ、下端固定で上端自由な問題としてそれぞれの場合のたわみ曲線の微分方程式は、つぎのように示される。

(a) 排水管の上端がボアホールの内壁面に接触しない場合

$$E \cdot I \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_x^{l_0} q(\eta - y) d\eta \quad \dots\dots\dots (1)$$

(b) 排水管の上端がボアホールの内壁面に接触し反力をうける場合

$$E \cdot I \frac{d^2 y}{dx^2} = -N_2(l_0 - x) - R_2(r_0 - y) + \int_x^{l_0} q(\eta - y) d\eta \quad \dots\dots\dots (2)$$

(c) 排水管の上端がボアホールの内壁面に接触し反力をうけるが、さらに途中でたわみが止められる場合

(1) $0 < x < l_1$

$$E \cdot I \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -N_2(l_0 - x) - R_2(r_0 - y_1) + N_3 \cdot (l_1 - x) + R_3(r_0 + y_1) + \int_x^{l_0} q(\eta - y_1) d\eta \quad \dots\dots\dots (3)$$

(2) $l_1 < x < l_0$

$$E \cdot I \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -N_2(l_0 - x) - R_2(r_0 - y_2) + \int_x^{l_0} q(\eta - y_2) d\eta \quad \dots\dots\dots (4)$$

第2図 実験装置略図

本報告は、これらの中で最も簡単な境界条件(a)の場合について実験を行なったものである。

3. 実験装置および方法

実験装置の主体は、第2図にみられるとおりで、高さ7m、断面が正方形（一辺が0.9m）の鉄塔の中に組み、試験片固定部分とたわみ測定用の基準線（径3mmのピアノ線）よりなる。

この種の試験においては、固定部分のわずかの誤差が試験片のたわみにおよぼす影響が大きいので、試験片固定部分を2つに割り周囲から一様に試験片を締めつけるようにした。また固定部分から試験片上端までの長さを変えられるように、固定部分の中をくりぬき、下端にねじを切つて試験片の下端をうける部分を上下できるようにした。

供試パイプは初期たわみが少ないものが望ましいので市販のパイプより真直度の高い特注の軟鋼みがきパイプを用いた。装置にパイプを設置する場合の取扱いには変形を生じないよう細心の注意を払ったことはもちろんである。

供試パイプの長さについては、100mmずつ変化させ、1,000~4,500mmのものについて測定した。また、おのこのパイプの測定箇所は、固定部分より200mm間隔とし、各点のたわみ量は第3図に示すピアノ線O、O'を基準として、パイプまでの距離a'、b'を差動トランスなど

第3図
たわみ量の測定法

を用いて測定し、次の計算により求めた。

第3図において、供試パイプの原点AがたわんでAからBになったとすると、たわみ量 δ は次のようにして求められる。すなわち、

$O'A=a$, $OA=b$, $OO'=c$ は測定前の位置で一定であるゆえ、 α は次式で表わされる。

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

なお、A点の座標は $x=b \cos \alpha$, $y=b \sin \alpha$ であるから、たわみが生じたときの座標B点は次のように表わされる^{a)}。

$$x + \Delta x = b' \cos \alpha' \quad \Delta x = b' \cos \alpha' - b \cos \alpha$$

$$y - \Delta y = b' \sin \alpha' \quad \Delta y = b \sin \alpha - b' \sin \alpha'$$

$$\alpha' = \cos^{-1} \frac{b'^2 + c^2 - a'^2}{2b'c}$$

これより、 δ は次のように表わされる。

$$\delta = AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(b' \cos \alpha' - b \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha - b' \sin \alpha')^2}$$

第4図
つかみ長さ
150 mm の
場合のたわ
み量

第5図
パイプ長さと
上端のたわみ
量との関係

この式により、 α' , b' の実測値を用いてたわみ量 δ を求めた。

4. 実験結果

供試パイプの長さを変え、かつ、つかみの長さを一定にした場合の測定結果の一例を第4図に示す。すなわち1本のパイプにつき、測定箇所を200mmずつにとり同図の測定値として示した。なお実線、破線で示される曲線は実測値の最大たわみ δ_0 をとり、後述の筆者らの式(5)と従来示されている近似式(16)とにより、数値計算を行なったものである。

第5図は第4図のようにして得られたパイプ長さとパイプ上端の最大たわみとの関係を図示したものである。図から明らかなように、パイプ長さが約4,000mmでたわみ量が急激に増加している。この付近では、わずかの風によつても、パイプがゆれ動き、非常に不安定な状態を呈していることがわかった。

しかし従来からの屈曲長さに関する理論式より、供試パイプの屈曲長さ l_{cr} を計算すれば、第6図に示すとおり約5,060mmで、筆者らの実験結果とはかなりの差異が認められた。なおパイプ内に水が充満されている場合は計算によると、同図の破線で示した値のように低くなりしたが実際の排水の場合には考慮せねばならぬ問題

第6図 パイプ径と屈曲長さの理論値との関係
(パイプ肉厚 1 mm)

a) 一般的には Δx , Δy は正負の符号を任意にとりうるものである。

と思われる。

5. 実験結果の考察

5.1 主な記号

l_0, l = 供試パイプの長さおよび任意長さ	cm
δ_0, δ = 上端 l_0 におけるたわみおよび長さ l におけるたわみ	cm
n = 指数	
l_{cr} = 挫屈長さ	cm
E, I = 供試パイプの縦弾性係数および慣性モーメント	kg/cm ² , cm ⁴
q = 供試パイプの単位長さあたり重量	kg/cm
M = パイプの任意断面における曲げモーメント	kg・cm
ΔU = 曲げのひずみエネルギー	kg・cm
ΔT = 挫屈中の全仕事量	kg・cm
C = 補正係数	

5.2 たわみに関する近似式

第4図に示されるような長さ l_0 とたわみ量 δ_0 との関係を図対数方眼紙に示した一例が第7図である。

これを見ると直線関係になるので、たわみに関する近似式として、次式のようにおくことができる。

$$\delta = \delta_0 (l/l_0)^n, \quad y = \delta_0 (x/l_0)^n \quad (5)$$

この場合、測定値を代入し、最小自乗法により n の値を求めると、 $n=1.17 \sim 2.05$ の範囲の値をとつた。

5.3 挫屈長さの算式

(5) 式で示される l および δ について、 ξ および η について表わすと次式が得られる。

$$\eta = \delta_0 (\xi/l)^n \quad (6)$$

しかし、任意断面における曲げモーメント M は次式で示される。

$$M = \int_x^l q(\eta - y) d\xi \quad (7)$$

(6) 式を(7)式に代入すると次のようになる。

$$M = \int_x^l q \left\{ \delta_0 \left(\frac{\xi}{l} \right)^n - \delta_0 \left(\frac{x}{l} \right)^n \right\} d\xi$$

第7図 パイプ長さとなわみ量との関係

$$\begin{aligned} &= \frac{q \cdot \delta_0}{l^n} \int_x^l (\xi^n - x^n) d\xi \\ &= \frac{q \cdot \delta_0}{l^n} \left[\frac{1}{n+1} \xi^{n+1} \Big|_x^l - x^n \xi \Big|_x^l \right] \\ &= \frac{q \cdot \delta_0}{l^n} \left\{ \frac{1}{n+1} (l^{n+1} - x^{n+1}) - x^n (l - x) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

一方 ΔU は次のようにして求められる。

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \quad (9)$$

ゆえに、(8)式を(9)式に代入すると、 ΔU は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2EI} \int_0^l \frac{q^2 \delta_0^2}{l^{2n}} \left[\frac{1}{(n+1)^2} (x^{2(n+1)} - 2l^{n+1}x^{n+1} + l^{2(n+1)}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{(n+1)} (x^{2(n+1)} - lx^{2n+1} - l^{n+1}x^{n+1} + l^{n+2}x^n) \right. \\ &\quad \left. + (x^{2(n+1)} - 2lx^{2n+1} + l^2x^{2n}) \right] dx \end{aligned}$$

これを計算すると(10)式が得られる。

$$\Delta U = \frac{q^2 \delta_0^2 l^3}{2EI(n+1)^2} \left\{ \frac{(n+1)^2}{2n+1} + \frac{n-2}{n+2} - \frac{n^2+3n}{2n+3} \right\} \quad (10)$$

一方、 ΔT は次式により表わされる。

$$\Delta T = \frac{1}{2} q \int_0^l (l-x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (11)$$

(5) 式より、 $\frac{dy}{dx}$ を求め(11)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} q \int_0^l (l-x) \frac{n^2 \delta_0^2}{l^{2n}} x^{2(n-1)} \cdot dx \\ &= \frac{n \delta_0^2 q}{4(2n-1)} \quad (12) \end{aligned}$$

ゆえに、(10)式と(12)式とを等置すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{n \delta_0^2 q}{4(2n-1)} &= \frac{q^2 \delta_0^2 l^3}{2EI(n+1)^2} \\ \left[\frac{(n+1)^2}{2n+1} + \frac{n-2}{n+2} - \frac{n^2+3n}{2n+3} \right] & \quad (13) \end{aligned}$$

これより、挫屈長さ l_{cr} は(13)式において $l=l_{cr}$ とおくと次式にて示される。

$$\begin{aligned} l_{cr} &= \left\{ \frac{n(n+1)^2}{2(2n-1) \left[\frac{(n+1)^2}{2n+1} + \frac{n-2}{n+2} - \frac{n^2+3n}{2n+3} \right]} \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &\quad \sqrt[3]{\frac{EI}{q}} \quad (14) \end{aligned}$$

5.4 挫屈長さに関する従来の式との比較

挫屈長さ l_{cr} に関する理論値 l_{cr0} は次式により表わされる²⁾。

第8図 補正係数と指数との関係

$$l_{cr0} = \sqrt[3]{\frac{7.837EI}{q}} \quad \dots\dots\dots(15)$$

また、たわみ曲線としては、次式が与えられている³⁾。

$$\delta = \delta_0 \left(1 - \cos \frac{\pi l}{2l_0} \right) \quad \dots\dots\dots(16)$$

(16)式を用いて挫屈長さ l_{cr}' は次のように求められている⁴⁾。すなわち

$$l_{cr}' = \sqrt[3]{\frac{7.89EI}{q}} \quad \dots\dots\dots(17)$$

よって、(14)式および(15)式を用いて l_{cr} を次のように表わせば、理論値に対する誤差が知られる。

$$l_{cr} = C \cdot l_{cr0} \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここに

$C =$

$$\left[\frac{n(n+1)^2}{2 \times 7.837(2n-1) \left\{ \frac{(n+1)^2}{2n+1} - \frac{2-n}{2+n} - \frac{n^2+3n}{2n+3} \right\}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \dots\dots\dots(19)$$

C の値を n に対して図示すると第8図のようになる。第8図を見れば、測定結果の n の値1.17~2.05に対しては、4%以内の誤差にて満足することがわかる。

なお、(17)式を用いて l_{cr}'/l_{cr0} の値を求め同図に示したが $n=1.6 \sim 1.8$ の範囲においては筆者らの求めた近似式と差のないことがわかる。

しかして、実験においては、多少の誤差が考えられるゆえ、取扱いの便利さを考えれば筆者らの求めた近似式(5)式が充分使えることが知られる。

5.5 曲げ応力の計算

曲げモーメント M は、(8)式にて示されるが、最大のモーメントは、 $x=0$ において与えられるゆえ、(8)式において $x=0$ とおけば $(M)_{\max}$ は次のようになる。

$$(M)_{\max} = \frac{1}{n+1} q \cdot \delta_0 \cdot l_0 \quad \dots\dots\dots(20)$$

ゆえに、断面係数を Z とすれば、最大曲げ応力 σ_b は次式にて求められる。

$$\sigma_b = \frac{(M)_{\max}}{Z} \quad \dots\dots\dots(21)$$

6. む す び

本報告は、外径8mm(肉厚1mm)の一種類のパイプを用いた測定結果によるものであり、かつ、パイプの固定部の構造上の問題、あるいは、測定値のバラツキの問題などにより正確に挫屈長さを求めるには充分とはいえないが、実験結果によれば次のことが結言される。

(1) たわみ曲線を示す近似式を極めて簡単な形で表わすことができた。しかも、従来示されている式に比べて、実験条件により変わりうるパラメータを1つ余分に加えることができた。

(2) このたわみ曲線の近似式を用いて挫屈長さを求めた結果、わずかの誤差をみとめれば理論値とほぼ合い充分実用に供しうることがわかった。

(3) 挫屈長さを求める理論式(15)式は、単に材料の弾性係数 E 、慣性二次モーメント I のみを関数としているが、筆者らの実験結果によれば、さらに他の因子も考慮する余地があるように思われる。

(4) 近似式における指数 n に影響をおよぼす因子としては、断面形の違い、パイプ内の充てん物の有無、パイプ内を流れる流体の有無またはその速度などが考えられるが、これらについては今後の研究にまきたい。

参 考 文 献

- 1) 吉沢幸雄・川島俊夫：昭和38年度日本鉱業会秋季大会研究発表講演要旨集，33~35頁
- 2) Timoshenko & Gere：Theory of Elastic Stability, 1961, p. 103 3), 4)：同上 p. 105