排水管など自重による挫屈について (第2報)*

正 会 員 吉 沢 幸 雄**

正 会 員 川 島 俊 夫***

正 会 員 富 地 信 夫****

Buckling of Pipe due to its Own Weight (2nd Report)

Yukio YOSHIKAWA, Toshio KAWASHIMA and Nobuo TOMICHI

In the previous paper, the buckling tests of a steel pipe due to its own weight with the diameter 8mm were examined.

In this paper steel pipe, copper pipe and copper rod were used with 6mm, 8mm and 10mm diameter and furthermore in the case of flow of water in pipe the above tests were examined.

As the results of these tests, the following conclusions were obtained.

- (1) The actual critical length of buckling was 44 to 66 percent of the length showed by the Timoshenko.
- (2) The critical length of the pipe was the same length as it obtained by calculating the maximum bending stress.
- (3) The deflection of the pipe filled with water was maximum in comparison with the other case and the relation $\Delta\delta/\delta_0$ and length l_0 (mm), diameter d_0 (mm) was showed as follows,

$$\frac{\Delta\delta}{\delta_0} = A \left(\frac{L_0}{\sqrt{D_0}} \right)^m$$

where $\Delta\delta = \delta - \delta_0$ = increase of deflection of pipe filled with water

δ_0 = deflection of the hollow pipe

$L_0 = l_0/1000$ mm

$D_0 = d_0/1$ mm

A, m = constants respectively 0.0183 and 6.7

1. 緒 言

筆者らは自重による排水管の挫屈に関して、排水管上端がボアホールの内壁面に接触しないような場合について、外径8mm、肉厚1mmの鉄パイプを用いて実験を行ない、従来の理論式よりも実際値に近いたわみ曲線を示す近似式および挫屈長さを求める式を發表した¹⁾。

本報告ではいまままで同じ境界条件のもとで、さらに外径6, 8, 10mm、肉厚1mmの鉄パイプ、また鉄より縦弾性係数が小さく、比重量の大きい外径6, 8mm、肉厚1mmの銅パイプ、外径8mmの銅棒について実験した。また、まだ文献にも見られないところであるが、パイプ内に水を流した場合についても実験したので、その結果について報告する。

2. 実験装置および実験方法

本実験においては、固定部分のわずかな誤差が供試パイプのたわみに大きく影響するので、前報²⁾の測定装置を第1図のように改良した。すなわち、供試パイプの固定には特製のつかみ部分の長いコレットチャックを用い、供試パイプの各点のたわみ量 δ は、直径25mm、長さ7mの磨棒鋼を基準として、第1図に示す方法により $\frac{1}{2}$ 0mmまでの変位を測定できる差動トランスを用い、固定部分より200mm間隔にパイプまでの距離を測定し、前報³⁾と同様に計算により求めた。

パイプ内に水を流す場合には、供試パイプ受け棒の下部より送水し、しかもコレットチャックで供試パイプを固定できるような供試パイプ受け棒を用い、水は小型ポンプで送り、バルブで流量調節を行なった。パイプ上端よりの噴出水は、上端に設けたバケツにうけ、ホースで下方に流しその排水量からパイプ内の流速を求めた。バケツはその下面とパイプ先端が接触することなく噴

* 昭和43年8月13日受理 昭和42年度、43年度日本鉱業会春季大会にて一部発表

** 工博 東北大学教授 工学部資源工学科

*** 工博 東北大学助教授 工学部資源工学科

**** 山形大学助教授教育学部

第1図
実験装置

出水をうけ、また噴出水がパイプにふりかかり、たわみに影響することのないような構造にした。

3. 供試パイプ

本実験においては供試パイプの選定が極めて重要であるので、鉄パイプは特注の磨きパイプを使用し、これの輸送には特別の輸送用ケースを用い、その取扱いは細心の注意を払った。

また銅パイプ、銅棒は市販のもので最も元たわみ量の少ないものを選んだ。

さらに実験に当っては、各パイプの全長にわたり元たわみ量、たわみの方向を測定しておき、コレットチャックへのパイプの固定条件を常に同一にして実験するように努めた。

4. 実験結果および考察

4.1 供試パイプ長さとお端のたわみ量

実験結果を第2図に示す。図はパイプ長さとお端のたわみ量との関係を半対数で示したもので、実験点1個は1本のパイプのその長さ l_0 における上端の最大たわみ量 δ_0 を表わす。

図から明らかなように、鉄パイプについていえば、外径6mm, 8mm, 10mmと外径が増加するにしたがつて、上端のたわみ量 δ_0 が急激に増加し始めるパイプ長さ l_0 の値は、当然のことであるが、大きくなっている。また

第2図

水が充たされている場合は、中空の場合より、さらにたわみ量 δ_0 は大きくなる。

さらに鉄パイプより比重が大きく、縦弾性係数は小さい銅パイプ、銅棒のたわみ量を見れば、同じパイプ長さ l_0 に対しては、鉄パイプよりも大きなたわみ量を示し、たわみ量 δ_0 が急激に増加し始めるパイプ長さ l_0 の値は小さくなっている。また外径8mmの銅棒の場合、同じ径の銅パイプに比較すれば、やはりより大きなたわみ量が測定された。

第2図の関係を両対数にとると第3図のようになり、鉄、銅のいずれのパイプの場合にも変曲点が見られる。すなわち鉄パイプでは6mm ϕ , 8mm ϕ , 10mm ϕ の場合にそれぞれ $l_0=1,800\text{mm}$, $3,300\text{mm}$, $4,100\text{mm}$ に変曲点が見られ、銅パイプでは8mm ϕ で $l_0=2,400\text{mm}$ に、6mm ϕ ではあまり明瞭ではないが大体 $l_0=1,700\text{mm}$ 付近に変曲点が見られた。

一般に柱に荷重をかけた場合、柱がたわみ第1の釣合状態より第2の釣合状態に移る際、ここに変曲点が見られ、この点を挫屈を起こした点としている。筆者らの実験においてもこの変曲点が見られ、したがってこの点を挫屈点と見なし、このときの長さ l_0 を挫屈長さ l_{cr} とした。

4.2 曲げ応力と挫屈長さ

自重によつて柱に生ずる曲げモーメントは次式で示されることを筆者らはすでに発表している⁵⁾。

$$M = \frac{q \cdot \delta_0}{l^n} \left\{ \frac{1}{n+1} (l^{n+1} - x^{n+1}) - x^n (l-x) \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

第 3 図

よつて最大の曲げモーメントは(1)式において $x=0$, $l=l_0$ として与えられるから $M_{\max}=(M)_{x=0}^{l=l_0}$ は

$$M_{\max} = \frac{1}{n+1} q \cdot \delta_0 \cdot l_0 \quad (2)$$

で与えられ、また最大曲げ応力 σ_b は次式で求められる。

$$\sigma_b = \frac{M_{\max}}{Z} \quad (3)$$

ただし Z はパイプの断面係数を示す。

(2), (3) 式に、第 3 図に示す実験結果の最大たわみ δ_0 , この δ_0 を生じたパイプたわみ曲線より求めた指数 n の

第 4 図

第 5 図

第 1 表

パイプの種類 区 分	鉄 パ イ プ			銅 パ イ プ	
	6 mmφ	8 mmφ	10mmφ	6 mmφ	8 mmφ
細 長 比 l_0/k^*	100	135	135	94	96
細長比と曲げ応力との関係から求めた挫屈長さ l_{cr} mm	1,800	3,300	4,100	1,700	2,400
第 3 図から求めた挫屈長さ l_{cr} mm	1,800	3,300	4,100	1,700	2,400
理論挫屈長さ l_{cr0} mm	4,080	5,060	6,220	3,240	4,030
l_{cr}/l_{cr0}	0.44	0.65	0.66	0.52	0.60

* 細長比 l_0/k ここに k =回転半径, l_0 =供試パイプ長さ

値を入れて最大曲げ応力 σ_b を求め、これと柱の細長比 l_0/k との関係と求めると第 4 図、第 5 図のようになる。

第 4 図の鉄パイプ、第 5 図の銅パイプのいずれの場合にも変曲点が見られ、この変曲点は第 1 表に示すとおり第 3 図の挫屈長さとは全くよく一致している。

また TIMOSHENKO によつて求められている理論挫屈長さ l_{cr0} と実験より求めた挫屈長さ l_{cr} との比を求めると第 1 表に見られるように、44~66%程度の開きがあり、理論挫屈長さによつて強度計算をするときは、かなりの安全を見ねばならないことがわかる。

いま供試パイプの外径 d と l_{cr}/l_{cr0} および l_{cr} に対応するたわみ量 δ_0 との関係を図示すると第 6 図のようになり、鉄パイプの場合外径の増加とともに l_{cr}/l_{cr0} の値も増加しているが、その増加の割合は次第に減少していくように見られ、銅パイプの場合は、靱性の性質のため第 1 表に見られるようにあまり大きな差は認められない。

また各パイプの l_{cr} における δ_0 の値も鉄パイプの場合は外径の増加とともに大きくなり、本実験においては直線関係で増加し、また銅パイプの場合には、第 3 図に見られるように 20mm 程度のほぼ同じ値を示した。

4・3 たわみ曲線における指数 n

第 6 図

各供試パイプにおいて、下端固定部分から任意の長さ l と、その点におけるたわみ量 δ との関係を両対数にとると一つの直線にのり（第7図参照）、筆者らがすでに発表した次のたわみ曲線の実験式⁷⁾でよく示される。すなわち

$$\delta = \delta_0 (l/l_0)^n \dots \dots \dots (4)$$

ここで δ = パイプの任意点のたわみ

δ_0 = パイプの上端のたわみ

l = パイプの下端から任意点までの長さ

l_0 = パイプの全長

n = 指数

測定値を代入して最小自乗法により指数 n を求めると、鉄パイプでは $n=1.6 \sim 2.6$ 、銅パイプでは $n=1.4 \sim 2.4$ の範囲の値をとつた。

第1報⁶⁾における鉄パイプの $n=1.17 \sim 2.05$ より高い値となつたが、本報における値は、6mmφ、8mmφ、10mmφと多くの供試パイプを用いて実験したものであり、また下端固定部分の改良などにより得られた結果であるので、より妥当性があるものと考えられる。さらに鉄パイプの n の値が銅パイプよりも大きいことは、鉄パイプの方のたわみの傾斜角の大きいことを示し、第7図に見られるように、同一のパイプ長さにおいては鉄パイプのたわみ量の少ないことを示す。

また筆者らは第1報において、理論挫屈長さ l_{cr0} に対する補正係数 c と指数 n との関係式を求めた。すなわち

$$l_{cr0} = \sqrt[3]{\frac{7.837EI}{q}} \dots \dots \dots (5)$$

$$l_{cr} = c \cdot l_{cr0} \text{ または } c = l_{cr}/l_{cr0} \dots \dots \dots (6)$$

$$c = \left[\frac{n(n+1)^2}{2 \times 7.837(n-1) \left\{ \frac{(n+1)^2}{2n+1} - \frac{2-n}{2+n} - \frac{n^2+3n}{2n+3} \right\}} \right]^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots (7)$$

ここに l_{cr0} = TIMOSHENKO による理論挫屈長さ

第 7 図

第 8 図

l_{cr} = 筆者らの求めた挫屈長さ

c = 補正係数

E = 縦弾性係数

I = 慣性モーメント

q = パイプの単位長さ重量

(7) 式によつて与えられる n と c との関係は第8図に示されるとおりであり、鉄パイプおよび銅パイプの場合の指数 n の値に対する c の値を求めると、それぞれ最大4.8%、銅パイプは最大3.4%以内の誤差で満足することがわかり、筆者らの提唱した(4)式のたわみ曲線の実験式は簡単でよく状態を表わしていることがここでも再確認し得たわけである。

いま指数 n とパイプ長さ l_0 との関係を見ると第9図のようになり、パイプ外径 d を一定とすれば、パイプ長さ l_0 が大きくなるほど指数 n の値は小さくなり、パイプ長さ l_0 を一定とした場合パイプ外径 d が大きいものほど指数 n も大きな値となつている。

第 9 図

第 10 図

さらに指数 n と供試パイプ長さ l_0 をパイプの断面積で除した値 l_0/A との関係を図示すると、第10図のようにわずかの誤差を認めれば鉄パイプ、銅パイプともこの配は異なるがそれぞれ一つの直線で示される。すなわちパイプの長さ、外径、肉厚などの形状がわかれば、指数 n が知られ、したがって最大たわみ量 δ_0 を与えればたわみの状態が(4)式によって求められることになる。

4.4 外径 8mm の鉄パイプ、銅パイプ、銅棒のたわみの比較

いま外径 8mm、長さ 2,800mm の鉄パイプ、銅パイプ、銅棒それぞれ 1 本のたわみを比較して見ると、第11図のように単位長さ当り重量の大きいものほどたわみも大きく、またたわみの傾向もやや異なり、銅パイプでは銅の靱性という性質をよく表わし、曲率半径も鉄パイプに比べて小さい。

4.5 パイプ内を水が流れる場合のたわみ

パイプ内に水を流してたわみを測定した実験例はまだ見当らぬし、また実験もなかなか困難であるが、筆者らの測定結果の一部を第2表に示す。実験には外径 6mm、8mm の鉄パイプを用い、長さはパイプのたわみが顕著にあらわれる長さのものを選び、一つの測定においてはパイプを一度コレットチャックに固定したら、第2表の4種の実験条件を完了するまで固定状態を変えずに実験し比較したものである。

第2表は中空パイプの上端たわみ量 δ_0 を基準とし、同じパイプに水を充たした場合のたわみ量を δ_{0W} 、水を

第 11 図

流した場合のたわみ量をそれぞれ δ_{0vA} 、 δ_{0vB} として、たわみ量の増加割合を比較したものであり、パイプに水を充たした場合が最も大きく、中空パイプのままの場合が最も小さく、水を流した場合がその中間にあり、かつ流速が速いほどたわみ量の少ないことがわかった。ただ表中、外径 6mm の $l_0=3,200$ mm における通水 A の場合の結果のみが例外的な値を示した。

いま長さ l_0 のパイプが水平と θ だけ傾斜しているとき、下方より水を押し上げるに必要な圧力を p とすれば、 p はつぎのようになる。すなわち

$$p = \gamma l_0 \sin \theta + \lambda \frac{l_0}{d} \frac{v^2}{2g} r + \frac{v^2}{2g} r \quad \dots (8)$$

ここに γ = 水の比重量

λ = 管の摩擦係数

v = 流速

パイプに水を流した場合には、(8) 式の第 2 項の摩擦損失による圧力低下分と、第 3 項の動圧力を付加してやらねばならないが、この付加圧力の増大にともないパイプの曲げモーメントに対する抗力曲げモーメントが増大し、パイプのたわみが減少するものと考えられる。

さらにパイプ先端よりの噴出水のスラスト S は、次のように表わされる。

$$S = Qv/g \quad \dots (9)$$

ここに Q = 噴出水の流量

v = 噴出水の速度

(9) 式のスラストの横方向の分力もまたパイプのたわみを減少する方向に作用する。

実際の排水管の設置にあたっては、実験結果からわか

第 2 表 通水実験結果

外径 mm	パイプ 長さ l_0 mm	状 態 割合および流速	中 空	水 充 填	通 水 A	通 水 B
			δ_0/δ_0	δ_{0W}/δ_0	δ_{0vA}/δ_0	δ_{0vB}/δ_0
6	2,600	増加の割合 流速 m/s	1.000	1.039	1.023	1.028
			0	0	4.02	2.38
6	2,800	"	1.000	1.038	1.019	1.028
			0	0	2.87	1.98
6	3,000	"	1.000	1.075	1.025	1.030
			0	0	3.73	3.01
6	3,200	"	1.000	1.103	0.979	1.030
			0	0	3.63	2.52
6	3,500	"	1.000	1.255	1.140	1.197
			0	0	3.60	2.48
8	3,800	"	1.000	1.120	1.035	1.074
			0	0	2.98	2.24
8	4,000	"	1.000	1.168	1.063	1.111
			0	0	3.03	2.06

るように、停電などにより排水ポンプが停止する場合などを考え、水がパイプ内を充たしている場合を考慮して設計すればよいことがわかる。

4.6 パイプに水を充たした場合のたわみの変化

排水管の設置において問題となるのは、前述のようにパイプ内に水が充たされている場合であるが、この場合中空のときのたわみ量といかなる関係にあるかがわかれば非常に好都合である。

いま

$$\left. \begin{aligned} \Delta\delta &= \delta_{0W} - \delta_0 \\ L_0 &= l_0/1,000\text{mm}, \quad D = d/1\text{mm} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

とおく。ただし

$\Delta\delta$ = 水充填によるたわみ量の増加量

δ_{0W} = 水充填によるパイプのたわみ量

δ_0 = 中空のパイプのたわみ量

l_0 = 供試パイプの長さ

d = 供試パイプの外径

実験結果よりたわみの増加率 $\Delta\delta/\delta_0$ と $L_0/\sqrt{D}$ との関係を図示すると第12図のように、肉厚 1mm、パイプ外径 6mm, 8mm, 10mm の鉄パイプの場合は、直線と

第 12 図

なり、したがってつぎのような実験式で表わすことができる。

$$\frac{\Delta\delta}{\delta_0} = A \left(\frac{L_0}{\sqrt{D}} \right)^m \dots\dots\dots(11)$$

ここに $A=0.0183$, $m=6.7$

(11)式より本実験に用いた鉄パイプについては、パイプの長さ、外径が与えられれば水を充たした場合のたわみの増加率が求められ、中空パイプのたわみ量がわかれば、排水管として用いた場合の最大たわみ量、最大曲げ応力が求まり、従来の理論式によるよりも、より安全な設計ができることになる。さらにパイプ外径の大きなものについても、(11)式のような関係が成立するかどうかは、今後の検討すべき課題である。なお銅パイプについては、大体の方向性は見られるが、ばらつきが大きく、一定の関係では表わしえない。

5. む す び

1) 各種外径の中空鉄パイプ、銅パイプの挫屈長さを求めたが、従来、TIMOSHENKO によつて示されている理論式による挫屈長さとは、44~66%程度の差異のあることがわかった。

2) 筆者らの提唱したたわみに関する実験式の指数 n を求め、鉄パイプに対しては $n=1.6\sim 2.6$ 、銅パイプに対しては $n=1.4\sim 2.4$ の値を得た。

3) パイプの挫屈長さを示すたわみの変曲点と、パイプの最大曲げ応力の変曲点を示す点とはよく一致した。すなわち、挫屈長さをこえると曲げ応力も急に増加することが確かめられた。

4) 外径 6mm, 8mm の鉄パイプ内を水が流れている場合のたわみ量を測定し、種々なる条件におけるたわみ量の大小を知り得た。

5) 鉄パイプのパイプ長さ、外径を知り、中空の場合のたわみ量がわかれば、水を充たした時におけるたわみ量の増加率を示す実験式を求めることができた。

参 考 文 献

- 1) 吉沢幸雄・川島俊夫・富地信夫・小川紀一：排水管など自重による挫屈について、日鉱誌，Vol. 82, No. 943 (1966)，p. 6
- 2) 同 上：同 上 p. 4
- 3) 同 上：同 上 p. 5
- 4) 倉西正嗣：応用弾性学，共立出版(1965)，p. 223
- 5) 吉沢・川島・富地・小川：日鉱誌，Vol. 82, No. 943 (1966)，p. 7
- 6) 同 上：同 上 p. 7
- 7) 同 上：同 上 p. 6